Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXIII. Jahrgang.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Leipzig,
Verlag von B. G. Teubner.
1888.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

I.

Verschiedene Darstellungen der Resultante zweier binären Formen.

Von
LEOPOLD SCHENDEL.

In der vorliegenden Abhandlung stellen wir die Resultante

$$(a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$

der binären Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ als Resultante der in den Formen $a_1^{n_1}a_{2,0}^{n_2-1}p^{n_1+n_2-1}$ und $a_2^{n_2}a_{1,0}^{n_1-1}p^{n_1+n_2-1}$ durch die Grössen $a_{2,0}^{n_2-1}$ und $a_{1,0}^{n_1-1}$ linear verbundenen, für die Grösse $p^{n_1+n_2-1}$ linearen Formen durch die Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_2-1}\,.\,.\,\varepsilon_2^{n_2-1}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,.\,.\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}}\,.\,.\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-1}}$$

und darnach, indem wir diese Determinante umformen, unter der Voraussetzung $n_1 \geqq n_2$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_1}{2}}(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^{n_1-n_2}$ durch die algebraisch-symmetrische Determinante

$$((r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r})^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\,.\,.\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}\,{}^2$$

und demnächst in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}$ durch die Determinante

$$((r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}})^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\,.\,.\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\,.\,.\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\,.\,.\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

dar.

Nach der Zusammensetzung ihrer Elemente können wir dieser letzteren Determinante auch die Form

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2})^{n_2}\,\varepsilon_1^{\overline{n_2}}\,(\overline{\varepsilon_2^{1}}-\overline{\varepsilon_1^{n_2}\,\varepsilon_2^{1}}\,\varepsilon_1^{n_2})\,.\,.\,\overline{\varepsilon_1^{1}}\,(\overline{\varepsilon_2^{n_2}}-\overline{\varepsilon_1^{1}\,\varepsilon_2^{n_2}}\,\varepsilon_1^{1})\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}$$
$$.\,.\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\,.\,.\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

geben und sie ableiten vermittelst der Form

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}}\,(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}}-\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa})\,p^{n_1-1}.$$

Eine eigenartige Darstellung der binären Formen als Aggregat von zwei Gliedern führt nun auf die allgemeinere Form

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}}\,(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}}-\overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{w+1-\varkappa})\,p^{n_1-1}.$$

Vermittelst derselben leiten wir für die Resultante die Gleichung

$$(-1)^{w(n_2-w)+\binom{w}{2}} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (a_1^{n_1} a_2^{n_2})^w \overline{\varepsilon_1^{w}} (\overline{\varepsilon_2^{1}} - \overline{\varepsilon_1^{w} \varepsilon_2^{1}} \varepsilon_1^{w}) \,..\, \overline{\varepsilon_1^{1}} (\overline{\varepsilon_2^{w}} - \overline{\varepsilon_1^{1} \varepsilon_2^{w}} \varepsilon_1^{1}) (a_1^{n_1})^{n_2-w} \varepsilon_1^{n_2-w-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2-w-1}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-w} \varepsilon_1^{n_1-w-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1-w-1} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-w-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-w-1}}$$

für $w = 0, .., n_2$ ab und geben im Anschluss daran die Gleichung

$$(-1)^{w n_2} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (\overline{a_1^{n_1}})^{w-r} \overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_{w-r}} \varepsilon_2^{\mu_{w-r}-1}} (\overline{a_2^{n_2}})^r \overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_r} \varepsilon_2^{\nu_r-1}}$$
$$(a_1^{n_1})^{n_2+w} \varepsilon_1^{n_2+w-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2+w-1} (a_2^{n_2})^{n_1+w} \varepsilon_1^{n_1+w-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1+w-1} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2+w-1}}$$
$$: a_1^{n_1} a_2^{n_2} \mid 1 1^w \varepsilon_1^{w-1} \,..\, \varepsilon_2^{w-1} \mid (\overline{a_1^{n_1}})^{w-r} \overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_{w-r}} \varepsilon_2^{\mu_{w-r}-1}}$$
$$(\overline{a_2^{n_2}})^r \overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_r} \varepsilon_2^{\nu_r-1}}$$

oder

$$(-1)^{w(n_2+r)} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (\overline{a_1^{n_1}})^{w-r} \overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_{w-r}} \varepsilon_2^{\mu_{w-r}-1}} (\overline{a_2^{n_2}})^r \overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_r} \varepsilon_2^{\nu_r-1}}$$
$$(a_1^{n_1})^{n_2+w} \varepsilon_1^{n_2+w-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_2+w-1} (a_2^{n_2})^{n_1+w} \varepsilon_1^{n_1+w-1} \,..\, \varepsilon_2^{n_1+w-1} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2+w-1}}$$
$$: (a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_1^{n_1}})^r \overline{\varepsilon_1^{-\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{-\nu_r} \varepsilon_2^{\nu_r}} (a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2}})^{w-r} \overline{\varepsilon_1^{-\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{-\mu_{w-r}} \varepsilon_2^{\mu_{w-r}}} \mid \overline{\varepsilon_1^{1} \varepsilon_2^{-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_1^{w} \varepsilon_2^{-w}}$$

für $w = 0, 1, \ldots$

Die Form aber jener Determinante weist hin auf ihren Zusammenhang mit der Form

$$(r; n_1)\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1-n_2} \mid \varepsilon_1^{-r} \varepsilon_2^{r-1} \varepsilon_1^{r-1} \varepsilon_2^{-r} \;\; p^{n_1-1} p_1^{n_1-1}.$$

Wir zeigen, dass für das combinatorische Product $p_1^n p_2^n$ die Gleichung

$$\mid p_1^n p_2^n = (r; n) \mid \varepsilon_1^{-r} \varepsilon_2^{r-1} \varepsilon_1^{r-1} \varepsilon_2^{-r} \;\; p_1^{n-1} p_2^{n-1} . p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

und ferner die Gleichung

$$\mid p_1^n p_2^n = \mid e_1 e_2 \;\; p_1^{n-1} p_2^{n-1} . p_1 p_2 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

besteht. Jene Form stellt sich auf Grund der Beziehung

$$\mid e_1 e_2 = (r; n)\, \varepsilon_1^{-r} \varepsilon_2^{r-1} \varepsilon_1^{r-1} \varepsilon_2^{-r}$$

auch in der Form

$$\mid a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1-n_2} \mid e_1 e_2 \;\; p^{n_1-1} p_1^{n_1-1},$$

die sich aus zweistufigen Determinanten zweiten Grades zusammensetzt, dar und geht aus der Grösse

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1-n_2} \mid p^{n_1} p_1^{n_1}$$

durch Division mit der Grösse $p p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$ hervor. Auch vermittelst dieser Grösse lässt sich die Determinante, die sich alsdann in der Form

$$(\mid a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1-n_2} \mid e_1 e_2\, \overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}})^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_2^{n_2-1}} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1}$$
$$\,..\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1-1}} \,..\, \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

darstellt, ableiten.

Ferner geben wir für die Resultante auf Grund des Satzes, dass die Grösse

$$a_1^{n_1} p^{n_1-n_2} a_2^{n_2} \mid p^{n_2} p_1^{n_2}$$

durch die Grösse $p p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$ theilbar und als Summe aus einer gleichartigen Grösse und einem mit dem Factor $a_2^{n_2} p^{n_2} . p p_1 \mid \varepsilon_1 \varepsilon_2$ behafteten Aggregate darstellbar ist, die Determinanten

$$(|a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}|e_1\,e_2)^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

und

$$((a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}}.\,|\,\varepsilon_1^{n_2}+\varepsilon_2^{n_1-n_2}.\,|a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2)\,a_2^{n_2}\,|\,e_1\,e_2)^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}},$$

die mit der vorher genannten Determinante in ihrem Werthe genau übereinstimmen, und von denen die letztere ihr auch in der Zusammensetzung der Elemente gleich ist und aus der ersteren dadurch erhalten werden kann, dass man zu einem Theile der Elemente dieser Determinante gewisse Grössen additiv hinzufügt.

Endlich leiten wir den Satz ab, dass die Form

$$a_1^{n_1}\,(a_2^{n_2})^{\nu}\,\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}}\,p^{n_1-\nu}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}},$$
$$\nu=0,\,..,\,n_1-n_2+1,$$

die man erhält, wenn man aus der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ die Grössen $p^{n_1}\,\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}$, .., $p^{n_1}\,\varepsilon_2^{n_1}$ vermittelst der Form $a_2^{n_2}p^{n_2}$ eliminirt und das Eliminationsresultat durch $p^{\nu}\varepsilon_1^{\nu}$ dividirt, mit der Form $a_2^{n_2}p^{n_2}$ eine Resultante hat, die sich von der Resultante der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ nur durch den Factor $(a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)}$ unterscheidet, und stellen darnach die Resultante $(a_1^{n_1})^{n_2}$ $(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$ in der Verbindung mit dem Factor $(a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)}$ durch die Determinante

$$(a_1^{n_1}\,(a_2^{n_2})^{\nu}\,\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}})^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2-1}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-\nu}\,\varepsilon_1^{n_1-\nu-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-\nu-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-\nu-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-\nu-1}}$$

für $\nu=0,\,..,\,n_1-n_2+1$ und ferner in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}\,(a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)}$ durch die Determinante

$$(|a_1^{n_1}\,(a_2^{n_2})^{\nu}\,\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-\nu}\,|$$
$$e_1\,e_2\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2-\nu}})^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2-\nu}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-\nu-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-\nu-1}\,|$$
$$\overline{\varepsilon_1^{n_1-\nu-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-\nu-1}}$$

für $\nu=0,\,..,\,n_1-n_2$ und in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_1-\nu}{2}}$ $(a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)}$ durch die Determinante

$$(a_1^{n_1}\,(a_2^{n_2})^{\nu}\,\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}})^{-n_1+n_2+\nu}\,\varepsilon_1^{-n_1+n_2+\nu-1}$$
$$..\,\varepsilon_2^{-n_1+n_2+\nu-1}(\,|a_1^{n_1}\,(a_2^{n_2})^{\nu}\,\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\,\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}}$$
$$..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,\varepsilon_2^{-n_1+n_2+\nu}\,a_2^{n_2}|\,e_1\,e_2\,\overline{\varepsilon_2^{-n_1+n_2+\nu}})^{n_1-\nu}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\nu-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-\nu-1}}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}$$

für $\nu=n_1-n_2,\;n_1-n_2+1$ dar. Für $\nu=0$ stimmen die ersteren zwei Determinanten mit den entsprechenden vordem gegebenen Determinanten überein und für $\nu=n_1-n_2$ nehmen die letzteren zwei Determinanten die Form der algebraisch-symmetrischen Determinante

$$(|a_1^{n_1}\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\,\varepsilon_2\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-n_2}}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\,\varepsilon_2^{n_2+1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,a_2^{n_2}\,|\,e_1\,e_2)^{n_2}$$
$$\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}\;{}^{2}$$

an.

1. Die Resultante der binären Formen

$$a_1^{n_1} p^{n_1}, \quad a_2^{n_2} p^{n_2}$$

ist die Grösse

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2},$$

die das Product der $n_1 n_2$ Determinanten darstellt, die man unter der Voraussetzung

$$a_r^{n_r} = a_{r,1} \,..\, a_{r,n_r}$$

aus der Determinante

$$a_{1,\varkappa_1} a_{2,\varkappa_2} \,|\, e_1 e_2$$

dadurch erhält, dass man den Grössen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ auf alle möglichen Weisen die Werthe

$$\varkappa_1 = 1, .., n_1; \quad \varkappa_2 = 1, .., n_2$$

beilegt.

Sie erweist sich durch die Form

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2} e_1 e_2^{n_2})^{n_1},$$

in welcher sie darstellbar ist, als eine ganze rationale Function der Coefficienten der gegebenen Formen, welche diese bezw. in den Dimensionen n_2 und n_1 enthält, und deren Verschwinden das Vorhandensein einer Grösse p anzeigt, für welche beide Formen verschwinden.

Die Resultante der m linearen Formen

$$a_1 p, \,..,\, a_m p$$

stellt sich in der Form

$$a_1 \,..\, a_m \,|\, \bar{\varepsilon}_1 \,..\, \bar{\varepsilon}_m$$

dar. In derselben Weise ist daher, wenn man erwägt, dass sich die Grösse p^{n-1} aus n Einheiten zusammensetzt, die Resultante der zwei binären Formen durch ihre Coefficienten darstellbar, wenn man n von einander unabhängige, für die Grösse p^{n-1} lineare Formen anzugeben vermag, welche die Eigenschaft besitzen, dass sie für eine etwaige gemeinschaftliche Verschwindungsgrösse der gegebenen Formen auch verschwinden und dass in ihrem Producte die Coefficienten derselben in denjenigen Dimensionen auftreten, in welchen sie in der Resultante vertreten sind. Die Resultante dieser Formen kann sich von der Grösse $(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$ höchstens nur durch einen von den Coefficienten unabhängigen Factor unterscheiden und ist ihr gleich, sobald sie ein in dieser Grösse auftretendes Glied enthält, sobald also zu den Gliedern, aus denen sie sich zusammensetzt, z. B. die Grösse

$$(a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_2} (a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{n_1}$$

gehört, welche sich in der Form

$$(a_1^{n_1})^{n_2} (e_1^{n_2} a_2^{n_2} e_2^{n_2})^{n_1}$$

durch die Gleichung

$$a_2^{n_2} e_1 e_2^{n_2} = a_{2,1} \,|\, e_1 e_2 \,..\, a_{2,n_2} \,|\, e_1 e_2$$

als ein Glied der Grösse $(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$ erweist.

Hinsichtlich des Verschwindens verhalten sich nun wie die gegebenen Formen die $n_1 + n_2$ für die Grösse $p^{n_1 + n_2 - 1}$ linearen Formen

$$a_1^{n_1}\varepsilon_1^{n_2-1}p^{n_1+n_2-1},\ \ldots,\ a_1^{n_1}\varepsilon_2^{n_2-1}p^{n_1+n_2-1};$$
$$a_2^{n_2}\varepsilon_1^{n_1-1}p^{n_1+n_2-1},\ \ldots,\ a_2^{n_2}\varepsilon_2^{n_1-1}p^{n_1+n_2-1},$$

welche, linear verbunden, in den Formen

$$a_1^{n_1}a_{2,0}^{n_2-1}p^{n_1+n_2-1},\quad a_2^{n_2}a_{1,0}^{n_1-1}p^{n_1+n_2-1}$$

enthalten sind, und deren Product wie die Resultante jener Formen die Grösse $a_1^{n_1}$ in der $n_2$ten und die Grösse $a_2^{n_2}$ in der $n_1$ten Dimension enthält. Ihre Resultante hat die Form

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\varepsilon_1^{n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_2-1}(a_2^{n_2})^{n_1}\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-1}}$$

und zählt augenscheinlich, wenn man dem rechts stehenden combinatorischen Producte die Form

$$(\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_2}\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}(\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{n_1}\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

giebt, die Grösse $(a_1^{n_1}\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_2}(a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{n_1}$ zu ihren Gliedern.

Folglich ist die Resultante der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$

$$(a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1}e_1e_2^{n_1n_2}$$
$$=(a_1^{n_1})^{n_2}\varepsilon_1^{n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_2-1}(a_2^{n_2})^{n_1}\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-1}}.$$

In dieser (n_1+n_2)stufigen Determinante ist das $(\varkappa,\lambda)$te Element für $\varkappa=1,\ldots,n_2$

$$a_1^{n_1}\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\varepsilon_2^{\varkappa-1}\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-\lambda}\varepsilon_2^{\lambda-1}}=a_1^{n_1}\overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda+\varkappa}\varepsilon_2^{\lambda-\varkappa}}$$

und das $(n_2+\varkappa,\lambda)$te Element für $\varkappa=1,\ldots,n_1$

$$a_2^{n_2}\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\varepsilon_2^{\varkappa-1}\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-\lambda}\varepsilon_2^{\lambda-1}}=a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_1^{n_2-\lambda+\varkappa}\varepsilon_2^{\lambda-\varkappa}}.$$

2. Die Resultante ist unter der Voraussetzung $n_1\geqq n_2$ auch durch eine $n_1$stufige Determinante darstellbar, die man durch Umformung der (n_1+n_2)stufigen Determinante erhält.

Wir geben dieser Determinante, indem wir jeden Factor des links stehenden combinatorischen Productes mit $\varepsilon_2^{n_1-n_2}$ und jeden Factor des rechts stehenden combinatorischen Productes mit $\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}$ verbinden, die Form

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\varepsilon_1^{n_2-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}(a_2^{n_2}\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{2n_1-1}}$$

und multipliciren sie mit der Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_1-n_2}\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_1^{n_2}\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\mid\overline{\varepsilon_1^{2n_1-1}}\ldots\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2}\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}},$$

welche der Grösse $(a_1^{n_1}\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_1-n_2}$ gleich ist. Wir erhalten alsdann, wenn wir bemerken, dass die Grössen

$$a_1^{n_1}\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\varepsilon_2^{n_1-n_2+\varkappa-1}\overline{\varepsilon_1^{2n_1-\lambda}\varepsilon_2^{\lambda-1}}=a_1^{n_1}\overline{\varepsilon_1^{2n_1-n_2+\varkappa-\lambda}\varepsilon_2^{-n_1+n_2-\varkappa+\lambda}}$$

für

$$\varkappa=1,\ldots,n_2;\quad\lambda=1,\ldots,n_1-n_2$$

und

$$a_2^{n_2}\varepsilon_2^{n_1-n_2}\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\varepsilon_2^{\varkappa-1}\overline{\varepsilon_1^{2n_1-\lambda}\varepsilon_2^{\lambda-1}}=a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_1^{n_1+\varkappa-\lambda}\varepsilon_2^{-n_1+n_2-\varkappa+\lambda}}$$

für

$$\varkappa=1,\ldots,n_1;\quad\lambda=1,\ldots,n_1-n_2$$

infolge der für diese Werthe geltenden Relation $-n_1+n_2-\varkappa+\lambda<0$ verschwinden, mit Rücksicht auf den Laplace'schen Determinantensatz die Gleichung

$$(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_1-n_2}.\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$
$$=(a_1^{n_1})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{2n_1-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{2n_1-1}}$$

und darnach die Gleichung

$$(-1)^{\binom{n_1}{2}}\,(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_1-n_2}.\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$
$$=(a_1^{n_1})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{2n_1-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{2n_1-1}}.$$

Wird in dieser Determinante an die Stelle des Factors

$$a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{\varkappa-1}\,\varepsilon_2^{n_1-\varkappa}$$

die Grösse

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}$$

gesetzt, so verschwindet sie für $r=1,\,..,\,\varkappa-1$ und nimmt für $r=\varkappa$ den Factor $a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}}$ an, und tritt an seine Stelle die Grösse

$$a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}},$$

so verschwindet sie für $r=1,\,..,\,\varkappa$.

Setzt man also an die Stelle des Factors

$$a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{\varkappa-1}\,\varepsilon_2^{n_1-\varkappa}$$

die Grösse

$$(r;\,\varkappa)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}$$

und nimmt diese Operation mit allen Factoren des combinatorischen Productes

$$(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_1^{n_1-1}$$

der Reihe nach, den Werthen $\varkappa=n_1,\,..,\,1$ entsprechend, vom letzten bis zum ersten vor, so nimmt die Determinante den Factor $(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n}})^{n_1}$ an und ist also gleich dem Quotienten

$$(a_1^{n_1})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\,(r;\,1)\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1+r}\,\varepsilon_2^{1-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}$$
$$..\,(r;\,n_1)\,\overline{\varepsilon_1^{r}\,\varepsilon_2^{n_1-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{2n_1-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{2n_1-1}}:(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_1}.$$

In dem Dividendus verschwindet aber das $(n_1+\varkappa,\,\lambda)$te Element

$$(r;\,\varkappa)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}\,\overline{\varepsilon_1^{2n_1-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}}$$

oder

$$(r;\,\varkappa)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,\overline{\varepsilon_1^{2n_1-\lambda-r+1}\,\varepsilon_2^{-n_1+\lambda+r-1}}$$

für

$$\lambda=1,\,..,\,n_1,$$

weil für $r<n_1-\lambda+1$ der Exponent $-n_1+\lambda+r-1<0$ ist und für $r\geqq n_1-\lambda+1$ in der Summe der den Werthen $r=n_1-\lambda+1,\,..,\,\varkappa$ entsprechenden Glieder die vom Anfang und vom Ende gleichweit abstehenden Glieder entgegengesetzt gleich sind, der Dividendus ist somit nach dem Laplace'schen Determinantensatze gleich dem Producte aus der dem Divisor gleichen Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-1}\mid\varepsilon_1^{\overline{2n_1-1}}\ldots\overline{\varepsilon_1^{n_1}\,\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

und der Determinante

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\,(r;1)\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1+r}\,\varepsilon_2^{1-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}$$
$$\ldots(r;n_1)\,\overline{\varepsilon_1^{r}\,\varepsilon_2^{n_1-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{n_1-r}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}\,\varepsilon_2^{n_1}}\ldots\varepsilon_2^{\overline{2n_1-1}}$$

und also jene Determinante gleich dieser letzten Determinante und darnach gleich der Determinante

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2})^{n_1}\,(r;1)\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1-1}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}$$
$$\ldots(r;n_1)\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_2^{\overline{n_1-1}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\mid\varepsilon_1^{\overline{n_1-1}}\ldots\varepsilon_2^{\overline{n_1-1}}.$$

Nun kann die Grösse

$$(r;\varkappa)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r},$$

da für $r>\varkappa$ der Exponent $n_1-\varkappa+r>n_1$ ist, durch die Grösse

$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r},$$

ferner auch, da die Grösse

$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}}\,\varepsilon_1^{r-1}\varepsilon_2^{-r}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}}$$

infolge des Umstandes, dass die Grösse

$$(r;\varkappa)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda-r+1}\,\varepsilon_2^{\lambda+r-1}}$$

sich von der Grösse

$$(r;\lambda)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda+r}\,\varepsilon_2^{\lambda-r}}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa-r+1}\,\varepsilon_2^{\varkappa+r-1}}$$

für $\varkappa>\lambda$ nur um die verschwindende Grösse

$$(r;\varkappa-\lambda)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda-r+1}\,\varepsilon_2^{\lambda+r-1}}$$

unterscheidet, bei einer Vertauschung von $\varkappa$ und λ ihren Werth unverändert beibehält, durch die Grösse

$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}}$$

und demnach durch die Grösse

$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\;\;\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}}$$

ersetzt werden. Folglich ist die in Rede stehende Determinante und somit

$$(-1)^{\binom{n_1}{2}}\,(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^{n_1-n_2}.\,(a_2^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1n_2}$$
$$=\big((r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\big)^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1-1}}\ldots\varepsilon_2^{\overline{n-1}}\frac{2}{}.$$

Dieser Gleichung geben wir die Form

$$(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^{n_1-n_2}.\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1n_2}$$
$$=\big((r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\big)^{n_1}\,\varepsilon_2^{\overline{n_1-1}}\ldots\varepsilon_1^{\overline{n_1-1}}\mid\varepsilon_1^{\overline{n_1-1}}\ldots\varepsilon_2^{\overline{n_1-1}}$$

und bemerken, dass der $(n_1+1-\varkappa)$te Factor des links stehenden combinatorischen Productes

$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\;\;\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}}$$

oder

$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\mid\overline{\varepsilon_1^{n\;-\varkappa+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa-r}}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}$$

für $\varkappa \leq n_1 - n_2$ infolge der dann geltenden Relation $n_1 - \varkappa + r > n_2$ die Form

$$(r;\, n_1)\, a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+r}\, \varepsilon_2^{\varkappa-r}}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-r}$$

annimmt. Berücksichtigen wir also, dass die Grösse

$$a_1^{n_1}\, \varepsilon_1^{-n_1}\, \varepsilon_1^{\varkappa-1}\, \varepsilon_2^{n_1-\varkappa}\, \overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\, \varepsilon_2^{n_1-\nu}} = a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa+\nu}\, \varepsilon_2^{\varkappa-\nu}}$$

für $\varkappa \leq n_1 - n_2$ und $\nu > n_1 - n_2$ verschwindet, weil für diese Werthe $n_1 - \varkappa + \nu > n_1$ ist, und ferner die Grösse

$$\varepsilon_1^{\varkappa-1}\, \varepsilon_2^{n_1-\varkappa}\, \overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\, \varepsilon_2^{n_1-\nu}}$$

für $\nu = \varkappa$ der Eins und für $\nu \gtrless \varkappa$ der Null gleich ist, so lässt sich der $(n_1 + 1 - \varkappa)$te Factor für

$$\varkappa = 1, \ldots, n_1 - n_2$$

in der Form

$$a_1^{n_1}\, \varepsilon_1^{-n_1}\, \varepsilon_1^{\varkappa-1}\, \varepsilon_2^{n_1-\varkappa} \big(\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}.(r;\, n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}} + \\ \ldots + \overline{\varepsilon_1^{n_1-n_2}\, \varepsilon_2^{n_2-1}}.(r;\, n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-1}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2}} \\ + \overline{\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\, \varepsilon_2^{n_2}}.\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} + \ldots + \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}.\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\big)$$

und für

$$\varkappa = n_1 - n_2 + 1, \ldots, n_1$$

in der aus dieser durch Weglassung der Grösse $a_1^{n_1}\, \varepsilon_1^{-n_1}$ hervorgehenden Form darstellen, und es ist daher bei Berücksichtigung der Gleichung

$$a_1 \ldots a_m \,|\, e_1 \ldots e_m \,.\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m \,|\, p_1 \ldots p_m = (\nu;\, m)\, a_1\, e_\nu \,.\, \varepsilon_\nu \ldots (\nu;\, m)\, a_m\, e_\nu \,.\, \varepsilon_\nu \,|\, p_1 \ldots p_m$$

die in der obigen Gleichung auftretende Determinante gleich dem Producte aus der der Grösse $(a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_1-n_2}$ gleichen Determinante

$$\varepsilon_1^{n_1-1} \ldots \varepsilon_1^{n_1-n_2}\, \varepsilon_2^{n_2-1}\, (a_1^{n_1}\, \varepsilon_1^{-n_1})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\, \varepsilon_2^{n_2} \ldots \varepsilon_2^{n_1-1} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

und der Determinante

$$\big((r;\, n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\big)^{n_2}\, \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}} \\ \ldots \overline{\varepsilon_1^{n_2-1}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2}}\, (a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}.$$

Demnach gilt für die Resultante der Formen $a_1^{n_1} p^{n_1}$ und $a_2^{n_2} p^{n_2}$ die Gleichung

$$(-1)^{\binom{n_2}{2}} . (a_1^{n_1})^{n_2}\, (a_2^{n_2})^{n_1}\, e_1\, e_2^{n_1 n_2} \\ = \big((r;\, n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, \overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\big)^{n_2}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-1}} \\ \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}\, (a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}.$$

In der in ihr auftretenden Determinante setzt sich das $(\varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, \ldots, n_2$

$$(r;\, n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2+\varkappa-1}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda}\, \varepsilon_2^{\lambda-1}}$$

aus Gliedern von der Form

$$a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa+r}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2+\varkappa-r}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda-r+1}\, \varepsilon_2^{\lambda+r-1}}$$

oder

$$a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_2^{n_1}}\, a_2^{n_2}\, \overline{\varepsilon_2^{n_2}} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa+r}\, \varepsilon_2^{-n_2+\varkappa-r}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda-r+1}\, \varepsilon_2^{-n_1+\lambda+r-1}}$$

zusammen, in der, wenn man berücksichtigt, dass die den Werthen $r = 1, \ldots, n_1 - n_2 + \varkappa - \lambda$ entsprechenden Glieder in ihrer Summe und ausserdem alle Glieder, in welchen $n_2 - \varkappa + r > n_1$ oder $n_1 - \lambda - r + 1 < 0$ ist, einzeln verschwinden, für r die Beziehungen

$$r \leqq n_1 - n_2 + \varkappa, \quad r \geqq 1, \quad r \leqq n_1 + 1 - \lambda, \quad r \geqq n_1 - n_2 + \varkappa - \lambda + 1$$

gelten.

Wir setzen

$$\varrho = n_1 - n_2 + \varkappa - r + 1.$$

Alsdann ist infolge der Beziehungen

$$\varrho \geqq 1, \quad \varrho \leqq n_1 - n_2 + \varkappa, \quad \varrho \geqq \lambda - n_2 + \varkappa, \quad \varrho \leqq \lambda$$

in der Determinante das $(\varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, .., n_2$

$$(r; n_1)\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1 - n_2} \mid \varepsilon_1^{-r} \varepsilon_2^{r-1} \varepsilon_1^{r-1} \varepsilon_2^{-r} \overline{\varepsilon_1^{n_2 - \varkappa} \varepsilon_2^{n_1 - n_2 + \varkappa - 1}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 - \lambda} \varepsilon_2^{\lambda - 1}}$$

ein Aggregat von Gliedern, die aus der Determinante

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1}} a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1 + 1 - \varrho} \varepsilon_2^{-n_1 - 1 + \varrho}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 - \varkappa - \lambda + \varrho} \varepsilon_2^{-n_2 + \varkappa + \lambda - \varrho}}$$

dadurch hervorgehen, dass man der Grösse ϱ alle diejenigen Zahlenwerthe beilegt, welche den Zahlenreihen

$$1, .., n_1 - n_2 + \varkappa; \quad \lambda - n_2 + \varkappa, .., \lambda$$

gemeinsam sind, und ausserdem das $(n_2 + \varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, .., n_1 - n_2$

$$a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1 - n_2 - \varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa - 1} \overline{\varepsilon_1^{n_1 - \lambda} \varepsilon_2^{\lambda - 1}} = a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2 - \lambda + \varkappa} \varepsilon_2^{\lambda - \varkappa}}.$$

3. Wir stellen das Aggregat derjenigen Glieder der Grösse

$$a^n = a^n \overline{\varepsilon_1^{n}} . \varepsilon_1^n + \cdot\cdot + a^n \overline{\varepsilon_2^{n}} . \varepsilon_2^n,$$

in welchen die Grössen $\varepsilon_1^{\varkappa_1}$ und $\varepsilon_2^{\varkappa_2}$ auftreten, durch die Grösse

$$a^n \overline{\varepsilon_1^{\varkappa_1} \varepsilon_2^{\varkappa_2}} \varepsilon_1^{\varkappa_1} \varepsilon_2^{\varkappa_2}$$

dar und bestimmen darnach die Grösse $a^n \overline{\varepsilon_1^{\varkappa_1} \varepsilon_2^{\varkappa_2}}$ durch die Gleichung

$$a^n \overline{\varepsilon_1^{\varkappa_1} \varepsilon_2^{\varkappa_2}} = a^n \overline{\varepsilon_1^{n - \varkappa_2} \varepsilon_2^{\varkappa_2}} . \varepsilon_1^{n - \varkappa_1 - \varkappa_2} + \cdot\cdot + a^n \overline{\varepsilon_1^{\varkappa_1} \varepsilon_2^{n - \varkappa_1}} . \varepsilon_2^{n - \varkappa_1 - \varkappa_2}.$$

Das aus der Determinante

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1}} a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1 + 1 - \varrho} \varepsilon_2^{-n_1 - 1 + \varrho}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 - \varkappa - \lambda + \varrho} \varepsilon_2^{-n_2 + \varkappa + \lambda - \varrho}}$$

für die den Zahlenreihen

$$1, .., n_1 - n_2 + \varkappa; \quad \lambda - n_2 + \varkappa, .., \lambda$$

gemeinschaftlichen Zahlenwerthe der Grösse ϱ hervorgehende Aggregat ergiebt sich, wenn wir

$$\nu_1 = n_1 + 1 - \varrho, \quad \nu_2 = n_2 - \varkappa - \lambda + \varrho$$

setzen, aus der Determinante

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1}} a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}} \mid \overline{\varepsilon_1^{\nu_1} \varepsilon_2^{-\nu_1}}\, \overline{\varepsilon_1^{\nu_2} \varepsilon_2^{-\nu_2}}$$

für diejenigen Werthe der Grössen ν_1 und ν_2, welche den Bedingungen

$$n_2 + 1 - \varkappa \leqq \nu_1 \leqq n_1, \quad 0 \leqq \nu_2 \leqq n_2 - \varkappa,$$
$$\nu_1 + \nu_2 = n_1 + n_2 + 1 - \varkappa - \lambda$$

genügen; es ist daher, wenn wir berücksichtigen, dass die Grösse

$$a^n\,\overline{\varepsilon_1^{\varkappa_1}\,\varepsilon_2^{\varkappa_2}}$$

durch ein Aggregat von Gliedern dargestellt wird, die aus der Grösse

$$a^n\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}\,\varepsilon_2^{n-\nu}}\,\varepsilon_1^{\nu-\varkappa_1}\,\varepsilon_2^{n-\nu-\varkappa_2}$$

für

$$\nu = \varkappa_1,\,..,\,n-\varkappa_2$$

hervorgehen, in der entsprechenden Darstellung der Grösse

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}}\,(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}}-\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa})$$

der Coefficient der Grösse $\varepsilon_1^{n_1-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}$ und somit in der Form

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}}\,(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}}-\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa})\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}}$$

darstellbar.

Die Determinante

$$((r;\,n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}})^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}$$
$$..\,\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}},$$

welche die Resultante $(a_1^{n_1})^{n_2}(a_1^{n_2})^{n}\,e_1 e_1^{n_1 n_2}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}$ darstellt, kann also auch in der Form

$$(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2})^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,(\overline{\varepsilon_2^{1}}-\overline{\varepsilon_1^{n_2}\,\varepsilon_1^{1}}\,\varepsilon_1^{n_2})\,..\,\overline{\varepsilon_1^{1}}\,(\overline{\varepsilon_2^{n_2}}-\overline{\varepsilon_1^{1}\,\varepsilon_2^{n_2}}\,\varepsilon_1^{1})$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

dargestellt werden und erscheint in dieser Form als die Resultante der aus der Form

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}}\,(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}}-\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{n_2+1-\varkappa})\,p^{n_1-1},$$

welche offenbar der Form

$$(r;\,n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+\varkappa-1}}\,p^{n_1-1}$$

gleich ist, für $\varkappa = 1,\,..,\,n_2$ hervorgehenden n_2 und der in der Form $a_2^{n_2}\,a^{n_1-n_2-1}\,p^{n_1-1}$ durch die Grösse $a^{n_1-n_2-1}$ linear verbundenen n_1-n_2 Formen.

4. Die Grösse a^n ist für $r_1+r_2 \leq n+1$ als Summe zweier Aggregate, von denen das eine alle Glieder, in welchen die Grösse $\varepsilon_1^{r_1}$ auftritt, und das andere alle diejenigen Glieder, welche die Grösse $\varepsilon_2^{r_2}$ und nicht zugleich die Grösse $\varepsilon_1^{r_1}$ enthalten, umfasst, in der Form

$$a^n = a^n\,\overline{\varepsilon_1^{r_1}}\,\varepsilon_1^{r_1}+a^n\,(\overline{\varepsilon_2^{r_2}}-\overline{\varepsilon_1^{r_1}\,\varepsilon_2^{r_2}}\,\varepsilon_1^{r_1})\,\varepsilon_2^{r_2}$$

darstellbar.

Stellen wir daraufhin die Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ in der durch die Gleichung

$$a^n p^n = a^n\,\overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}}\,p^{n-w-1+\varkappa}.\,\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\,p^{w+1-\varkappa}$$
$$+\,a^n\,(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}}-\overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{w+1-\varkappa})\,p^{n-\varkappa}.\,\varepsilon_2^{\varkappa}\,p^{\varkappa}$$

gekennzeichneten Form dar, indem wir die Grösse w als kleiner oder höchstens gleich der Grösse n_2 annehmen, so treten an ihre Stelle zwei für die Grössen

$$\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\,p^{w+1-\varkappa}, \quad \varepsilon_2^{\varkappa}\,p^{\varkappa}$$

lineare Formen, deren Resultante die Form

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}}\left(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}} - \overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\right)p^{n_1+n_2-w-1}$$

ist.

Diese Form, die nach ihrer Entstehungsweise für eine etwaige gemeinschaftliche Verschwindungsgrösse der Formen $a_1^{n}\,p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}\,p^{n_2}$ auch verschwindet, setzt sich, wenn man wiederum berücksichtigt, dass die Grösse

$$a^{n}\,\overline{\varepsilon_1^{\varkappa_1}\,\varepsilon_2^{\varkappa_2}}$$

durch ein Aggregat von Gliedern dargestellt wird, die aus der Grösse

$$a^{n}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu}\,\varepsilon_2^{n-\nu}}\,.\,\varepsilon_1^{\nu-\varkappa_1}\,\varepsilon_2^{n-\nu-\varkappa_2}$$

für

$$\nu = \varkappa_1, \ldots, n-\varkappa_2$$

hervorgehen, aus Gliedern zusammen, die man aus dem Ausdrucke

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu_1}\,\varepsilon_2^{-\nu_1}}\;\overline{\varepsilon_1^{\nu_2}\,\varepsilon_2^{-\nu_2}}\,.\,\varepsilon_1^{\nu_1+\nu_2-w-1+\varkappa}\,\varepsilon_2^{n_1+n_2-\varkappa-\nu_1-\nu_2}\,p^{n_1+n_2-w-1}$$

für

$$\nu_1 = w+1-\varkappa, \ldots, n_1; \quad \nu_2 = 0, \ldots, w-\varkappa$$

erhält.

Fügt man zu den aus ihr für $\varkappa = 1, \ldots, w$ hervorgehenden w Formen die in den Formen $a_1^{n_1}a_{2,0}^{n_2-w-1}p^{n_1+n_2-w-1}$ und $a_2^{n_2}a_{1,0}^{n_1-w-1}p^{n_1+n_2-w-1}$ durch die Grössen $a_{2,0}^{n_2-w-1}$ und $a_{1,0}^{n_1-w-1}$ linear verbundenen n_2-w+n_1-w Formen hinzu, so erhält man in ihrer Resultante

$$\begin{gathered}(a_1^{n_1}\,a_2^{n_2})^{w}\,\overline{\varepsilon_1^{w}}\left(\overline{\varepsilon_2^{1}} - \overline{\varepsilon_1^{w}\,\varepsilon_2^{1}}\,\varepsilon_1^{w}\right)\ldots\overline{\varepsilon_1^{1}}\left(\overline{\varepsilon_2^{w}} - \overline{\varepsilon_1^{1}\,\varepsilon_2^{w}}\,\varepsilon_1^{1}\right)(a_1^{n_1})^{n_2-w}\,\varepsilon_1^{n_2-w-1} \\ \ldots\varepsilon_2^{n_2-w-1}(a_2^{n_2})^{n_1-w}\,\varepsilon_1^{n_1-w-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-w-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-w-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-w-1}}\end{gathered}$$

die Resultante der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$.

In dieser Determinante ist das $(\varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, \ldots, w$

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}}\left(\overline{\varepsilon_2^{\varkappa}} - \overline{\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa}}\,\varepsilon_1^{w+1-\varkappa}\right)\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-w-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}}$$

ein Aggregat von Gliedern, die sich aus der Determinante

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{\nu_1}\,\varepsilon_2^{-\nu_1}}\;\overline{\varepsilon_1^{\nu_2}\,\varepsilon_2^{-\nu_2}}$$

für die den Bedingungen

$$\begin{gathered} w+1-\varkappa \leqq \nu_1 \leqq n_1, \quad 0 \leqq \nu_2 \leqq w-\varkappa, \\ \nu_1+\nu_2 = n_1+n_2+1-\varkappa-\lambda \end{gathered}$$

genügenden Werthe von ν_1 und ν_2 ergeben, oder also, wenn wir

$$\nu_1 = n_1+1-\varrho, \quad \nu_2 = n_2-\varkappa-\lambda+\varrho$$

setzen und bemerken, dass ϱ nach der ersten Bedingung nur die Werthe

$$1, \ldots, n_1-w+\varkappa$$

und nach der zweiten Bedingung nur die Werthe

$$\lambda-n_2+\varkappa, \ldots, \lambda-n_2+w$$

annehmen kann, ein Aggregat von Gliedern, die aus der Determinante

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{-n_1-1+\varrho}}\;\overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho}\,\varepsilon_2^{-n_2+\varkappa+\lambda-\varrho}}$$

dadurch hervorgehen, dass man der Grösse ϱ alle diejenigen Zahlenwerthe beilegt, welche den Zahlenreihen

$$1, .., n_1 - w + \varkappa; \quad \lambda - n_2 + \varkappa, .., \lambda - n_2 + w$$

gemeinsam sind.

Ferner ist das $(w + \varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, .., n_2 - w$

$$a_1^{n_1}\, \varepsilon_1^{n_2 - w - \varkappa}\, \varepsilon_2^{\varkappa - 1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 + n_2 - w - \lambda}\, \varepsilon_2^{\lambda - 1}} = a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 - \lambda + \varkappa}\, \varepsilon_2^{\lambda - \varkappa}}$$

und das $(n_2 + \varkappa, \lambda)$te Element für $\varkappa = 1, .., n_1 - w$

$$a_2^{n_2}\, \varepsilon_1^{n_1 - w - \varkappa}\, \varepsilon_2^{\varkappa - 1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 + n_2 - w - \lambda}\, \varepsilon_2^{\lambda - 1}} = a_2^{n_2}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 - \lambda + \varkappa}\, \varepsilon_2^{\lambda - \varkappa}}.$$

Die letzte Determinante enthält, da der Werth $\varrho = n_1 + 1$ nicht zulässig ist, die Grösse $a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1}}\, a_2^{n_2}\, \overline{\varepsilon_2^{n_2}}$ nur für $\varrho = 1$, $\varkappa + \lambda - \varrho = n_2$, und zwar wird sie für diese Werthe ihr gleich. In der die Resultante darstellenden Determinante tritt daher diese Grösse für $\varkappa = 1, .., w$ nur als $(\varkappa, n_2 + 1 - \varkappa)$tes Element und somit, wenn wir dem rechts stehenden combinatorischen Producte die Form

$$(\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_2 - w}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 - w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_2 - w - 1}}\, (\overline{\varepsilon_1^{n_1 - w}\, \varepsilon_2^{n_2 - w}})^w\, \overline{\varepsilon_1^{w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{w - 1}}$$
$$(\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{n_1 - w}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 - w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1 - w - 1}}$$

geben, offenbar die Grösse $(a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_2} (a_2^{n_2}\, \overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{n_1}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{w(n_2 - w) + \binom{w}{2}}$ als Glied auf.

Es gilt also für die Resultante der Formen $a_1^{n_1} p^{n_1}$ und $a_2^{n_2} p^{n_2}$ die Gleichung

$$(-1)^{w(n_2 - w) + \binom{w}{2}} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1}\, e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (a_1^{n_1}\, a_2^{n_2})^w\, \overline{\varepsilon_1^{w}}\, (\overline{\varepsilon_2^{1}} - \overline{\varepsilon_1^{w}\, \varepsilon_2^{1}}\, \varepsilon_1^{w}) .. \overline{\varepsilon_1^{1}}\, (\overline{\varepsilon_2^{w}} - \overline{\varepsilon_1^{1}\, \varepsilon_2^{w}}\, \varepsilon_1^{1})\, (\overline{a_1^{n_1}})^{n_2 - w}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 - w - 1}}$$
$$.. \overline{\varepsilon_2^{n_2 - w - 1}}\, (a_2^{n_2})^{n_1 - w}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 - w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1 - w - 1}} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1 + n_2 - w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1 + n_2 - w - 1}},$$

und zwar für

$$w = 0, .., n_2.$$

Die den Werthen $w = 0$ und $w = n_2$ entsprechenden Determinanten sind die für die Resultante vorhin gegebenen Determinanten.

Im Anschluss an diese Darstellung bemerken wir, ohne es jedoch an dieser Stelle weiter zu begründen, dass die Resultante der Formen $a_1^{n_1} p^{n_1}$ und $a_2^{n_2} p^{n_2}$ ferner in unendlich mannigfacher Weise durch einen Determinantenquotienten darstellbar ist. Es gilt für sie die Gleichung

$$(-1)^{w n_2} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1}\, e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (\overline{a_1^{n_1}})^{w - r}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 + w - \mu_1}\, \varepsilon_2^{\mu_1 - 1}} .. \overline{\varepsilon_1^{n_2 + w - \mu_{w-r}}\, \varepsilon_2^{\mu_{w-r} - 1}}\, (\overline{a_2^{n_2}})^r\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 + w - \nu_1}\, \varepsilon_2^{\nu_1 - 1}}$$
$$.. \overline{\varepsilon_1^{n_1 + w - \nu_r}\, \varepsilon_2^{\nu_r - 1}}\, (\overline{a_1^{n_1}})^{n_2 + w}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 + w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_2 + w - 1}}\, (\overline{a_2^{n_2}})^{n_1 + w}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 + w - 1}}$$
$$.. \overline{\varepsilon_2^{n_1 + w - 1}} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_1 + n_2 + w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1 + n_2 + w - 1}} : a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \mid 11^w\, \overline{\varepsilon_1^{w - 1}} .. \overline{\varepsilon_2^{w - 1}} \mid$$
$$(\overline{a_1^{n_1}})^{w - r}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2 + w - \mu_1}\, \varepsilon_2^{\mu_1 - 1}} .. \overline{\varepsilon_1^{n_2 + w - \mu_{w-r}}\, \varepsilon_2^{\mu_{w-r} - 1}}$$
$$(\overline{a_2^{n_2}})^r\, \overline{\varepsilon_1^{n_1 + w - \nu_1}\, \varepsilon_2^{\nu_1 - 1}} .. \overline{\varepsilon_1^{n_1 + w - \nu_r}\, \varepsilon_2^{\nu_r - 1}}$$

für

$$w = 0, 1, ..,$$

in der die Grössen $\mu_1, .., \mu_{w-r}$ und $\nu_1, .., \nu_r$ nach Belieben irgendwelche den Zahlenreihen $1, .., n_2 + w$ und $1, .., n_1 + w$ angehörige Zahlen sind.

Für die Elemente der ersten Determinante gelten die Gleichungen

$$a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_2+w-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}} = \overline{a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-\lambda+\varkappa}\,\varepsilon_2^{\lambda-\varkappa}}$$

und

$$a_2^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_1+w-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}} = \overline{a_2^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-\lambda+\varkappa}}\,\overline{\varepsilon_2^{\lambda-\varkappa}}$$

und für die der zweiten die Gleichungen

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,11\;\;\varepsilon_1^{w-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,\overline{a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_2+w-\mu}\,\varepsilon_2^{\mu-1}} = a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-\mu+\varkappa}}\,\overline{\varepsilon_2^{\mu-\varkappa}}$$

und

$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,11\;\;\varepsilon_1^{w-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,\overline{a_2^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_1+w-\nu}}\,\overline{\varepsilon_2^{\nu-1}} = -\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\nu+\varkappa}\,\varepsilon_2^{\nu-\varkappa}}.$$

Infolge der letzteren Gleichungen ist die Gleichung auch in der Form

$$(-1)^{w(n_2+r)}.\,(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (a_1^{\overline{n_1}})^{w-r}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_1}\,\varepsilon_2^{\mu_1-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+w-\mu_{w-r}}\,\varepsilon_2^{\mu_{w-r}-1}}\,(a_2^{\overline{n_2}})^r\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_1}\,\varepsilon_2^{\nu_1-1}}$$
$$..\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+w-\nu_r}\,\varepsilon_2^{\nu_r-1}}\,(a_1^{n_1})^{n_2+w}\,\varepsilon_1^{n_2+w-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2+w-1}\,(a_2^{n_2})^{n_1+w}\,\varepsilon_1^{n_1+w-1}$$
$$..\,\varepsilon_2^{n_1+w-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2+w-1}}:(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^r\,\overline{\varepsilon_1^{-\nu_1}\,\varepsilon_2^{\nu_1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{-\nu_r}\,\varepsilon_2^{\nu_r}}$$
$$(a_2^{n_2}\,\varepsilon_1^{\overline{n_2}})^{w-r}\,\overline{\varepsilon_1^{-\mu_1}\,\varepsilon_2^{\mu_1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{-\mu_{w-r}}\,\varepsilon_2^{\mu_{w-r}}}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{1}\,\varepsilon_2^{-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{w}\,\varepsilon_2^{-w}}$$

darstellbar.

Nehmen wir insbesondere

$$\mu_1 = n_2 + r + 1,\;..,\;\mu_{w-r} = n_2 + w;\quad \nu_1 = 1,\;..,\;\nu_r = r$$

an, so nimmt in dieser Darstellung der Dividendus die Form

$$(-1)^{w(n_2+r)}.\,(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{w-r})^{n_2+r}\,\varepsilon_1^{n_2+r-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2+r-1}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{r})^{n_1+w-r}\,\varepsilon_1^{n_1+w-r-1}$$
$$..\,\varepsilon_2^{n_1+w-r-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2+w-1}}$$

und der Divisor die Form

$$(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^r\,\overline{\varepsilon_1^{-1}\,\varepsilon_1^{1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r}}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{\overline{n_2}})^{w-r}\,\overline{\varepsilon_1^{-r-1}\,\varepsilon_2^{r+1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{-w}\,\varepsilon_2^{w}}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{1}\,\varepsilon_2^{-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_1^{w}\,\varepsilon_2^{-w}}$$

oder

$$(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^r\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{\overline{n_2}})^{w-r}$$

an, und wir erhalten in diesem Falle für die Resultante die Gleichung

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{w-r})^{n_2+r}\,\varepsilon_1^{n_2+r-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2+r-1}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{r})^{n_1+w-r}\,\varepsilon_1^{n_1+w-r-1}$$
$$..\,\varepsilon_2^{n_1+w-r-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2+w-1}}:(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^r\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{\overline{n_2}})^{w-r},$$

in der sich die Determinante, wenn man ihr die Form

$$(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_2+w-r})^r\,\varepsilon_1^{r-1}\,..\,\varepsilon_2^{r-1}\,(a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{w-r}\,\varepsilon_2^{r})^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2-1}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_1^{w-r}\,\varepsilon_2^{r})^{n_1}$$
$$\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,(a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1+r})^{w-r}\,\varepsilon_1^{w-r-1}\,..\,\varepsilon_2^{w-r-1}\,|\,(\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2+w-r}})^r\,\overline{\varepsilon_1^{r-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{r-1}}$$
$$(\overline{\varepsilon_1^{w-r}\,\varepsilon_2^{r}})^{n_1+n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-1}}\,(\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2+r}})^{w-r}\,\overline{\varepsilon_1^{w-r-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{w-r-1}}$$

giebt, als das Product aus der Determinante

$$(a_1^{n_1})^{n_2}\,\varepsilon_1^{n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2-1}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-1}}$$

und den Determinanten

$$(a_1^{n_1})^r\,\varepsilon_1^{r-1}\,..\,\varepsilon_2^{r-1}\,|\,(\varepsilon_1^{\overline{n_1}})^r\,\overline{\varepsilon_1^{r-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{r-1}}$$

und

$$(a_2^{n_2})^{w-r}\,\varepsilon_1^{w-r-1}\,..\,\varepsilon_2^{w-r-1}\,|\,(\varepsilon_2^{\overline{n_2}})^{w-r}\,\overline{\varepsilon_1^{w-r-1}}\,..\,\overline{\varepsilon_2^{w-r-1}}$$

darstellt.

(Schluss folgt.)

II.

Ueber eine Art involutorischer Verwandtschaft des zweiten Grades.

Von

Dr. KILBINGER,

Gymnasiallehrer in Saargemünd.

Werden in der Ebene Σ zwei Polarsysteme angenommen, deren reelle Ordnungscurven $\varkappa$ und λ sein mögen, so sind jedem Punkte von Σ zwei Polaren zugeordnet. Je zwei Punkte P und P_1 in Σ sollen dann einander entsprechen, wenn jeder auf den beiden Polaren des andern liegt; die Punkte P und P_1 sind also conjugirt hinsichtlich $\varkappa$ und λ. Einem beliebigen Punkte von Σ entspricht hiernach wieder ein Punkt; dagegen entspricht einer Geraden a (d. h. den Punkten derselben) im Allgemeinen eine Curve zweiter Ordnung α_1. Alle solche Curven, die den Geraden in Σ entsprechen, haben mindestens einen reellen Punkt und höchstens drei solcher mit einander gemein. Die beiden Polaren eines jeden solchen gemeinschaftlichen Punktes Q fallen auf einander; ihm entsprechen also die sämmtlichen Punkte einer und derselben Geraden q_1. Geht die Gerade a durch Q, so zerfällt die entsprechende Curve in die Gerade q_1 und eine zu a projectivische gerade Punktreihe a_1, welche durch Q hindurchgeht.*

Die oben angegebene Beziehung gehört zu den geometrischen Verwandtschaften zweiten Grades oder den quadratischen Verwandtschaften; und zwar haben die in Betracht kommenden quadratisch verwandten Systeme involutorische Lage, da die Punkte P und P_1 in beiden Systemen einander in doppelter Weise entsprechen. Der Punkt Q ist gemeinsamer Hauptpunkt der Systeme und die Gerade q_1 die ihm entsprechende Hauptlinie. Die beiden einander entsprechenden Strahlenbüschel Q haben involutorische Lage. Denn die Systeme haben höchstens vier reelle oder imaginäre Punkte (die Schnittpunkte von $\varkappa$ und λ) mit einander entsprechend gemein; es kann aber nur dann jeder Strahl von Q mit seinem entsprechenden zusammen-

---

* Vergl. Reye, Geometrie der Lage, II. Aufl. I. Abth. S. 169, Nr. 61. Zum Beweise vergl. die Abhandlung des Herrn Professor Dr. Reye in der Zeitschrift für Mathematik und Physik XI, 4. S. 283 flgg.

fallen, wenn die quadratisch verwandten Systeme einen reellen oder imaginären Kegelschnitt entsprechend gemein haben.*

Wir können die beiden involutorisch liegenden Systeme in Σ als ein System auffassen, in welchem der Punkt P dem Punkte P_1, der Hauptpunkt Q der Hauptlinie q_1 „zugeordnet" ist. Der Geraden a ist dann der Kegelschnitt α_1 zugeordnet. Die einander zugeordneten Geraden des Büschels Q bilden einen involutorischen Strahlenbüschel, der kurzweg „Hauptbüschel" heissen soll. Die collinearen Systeme in Σ, welche durch die Beziehung der Polarsysteme auf einander entstanden sind, wollen wir mit ε und ε_1 bezeichnen, und es sollen je zwei Polaren p und p_1 eines Punktes P von Σ als einander entsprechende Geraden von ε resp. ε_1 betrachtet werden. Die Lage und Anzahl der reellen Hauptpunkte in Σ, sowie die Lage der Systeme ε und ε_1 zu einander steht in innigem Zusammenhange mit der Lage und Art der Ordnungscurven $\varkappa$ und λ, wie im Folgenden näher gezeigt werden soll.

Wir setzen an erster Stelle voraus, dass $\varkappa$ und λ vier reelle Schnittpunkte A, B, C, D besitzen. Alsdann enthält das System Σ drei reelle Hauptpunkte U, V, W, und zwar fallen diese Punkte auf die Schnittpunkte der drei Paar Gegenseiten des Vierecks $ABCD$. Jedem Hauptpunkte ist die gegenüberliegende Seite des Hauptdreiecks UVW zugeordnet, und das Dreieck UVW ist gemeinschaftliches Poldreieck der gegebenen Polarsysteme. Jede Seite des Vierecks $ABCD$ ist sich selbst zugeordnet; die Ordnungsstrahlen der drei Hauptbüschel fallen hiernach mit den Seiten des Vierecks $ABCD$ zusammen. Je zwei Ordnungsstrahlen eines Hauptbüschels sind durch die beiden Hauptlinien des Büschels harmonisch getrennt. Die zugeordneten Punkte eines Ordnungsstrahles bilden eine involutorische Punktreihe, deren Ordnungselemente die Schnittpunkte jener Geraden mit $\varkappa$ und λ sind. Hat sowohl $\varkappa$, als auch λ einen Mittelpunkt, und bezeichnen wir diese mit O und O_1, so sind der unendlich fernen Geraden g_∞ die Strahlenbüschel O und O_1 zugeordnet. Die conjugirten Punkte von g_∞ in Bezug auf $\varkappa$ und λ bilden nun zwei involutorische Punktreihen; dieselben enthalten im Allgemeinen zwei Punkte M_∞ und N_∞, welche in jeder der Punktreihen einander zugeordnet sind.** Die Strahlen OM_∞ und O_1M_∞, ON_∞ und O_1N_∞ sind dann bezüglich einander parallel, wenn nicht ein oder beide Strahlenpaare auf einander fallen. Der Geraden g_∞ ist also eine Hyperbel γ_1 zugeordnet. Sind die gegebenen Ordnungscurven zwei Hyperbeln, deren Asymptotenrichtungen von einander getrennt sind, so geht die Hyperbel γ_1 in eine Ellipse über. Liegt ein Hauptpunkt unendlich fern, so geht die zugeordnete Hauptlinie durch die Mittelpunkte von $\varkappa$ und λ. Der Kegelschnitt γ_1 zerfällt alsdann in diese Hauptlinie und eine der g_∞ zugeordnete Gerade g_1. Sind als Ordnungscurven zwei Hyperbeln gegeben, und liegen

* Vergl. Reye, a. a. O. der Abhandlung S. 301 und 302.

** Reye, Geometrie der Lage, II. Aufl. I. Abth. S. 146.

von ihren vier reellen Schnittpunkten zwei auf g_∞, so ist diese Gerade sich selbst zugeordnet; die beiden der unendlich fernen Geraden zugeordneten Durchmesserbüschel sind dann projectivisch gleich. Haben $\varkappa$ und λ einen gemeinsamen Mittelpunkt, so ist dieser Punkt ein Hauptpunkt und g_∞ die zugeordnete Hauptlinie. Ist $\varkappa$ eine Parabel und λ ein Kegelschnitt mit einem Mittelpunkt, so ist g_∞, falls auf ihr kein Hauptpunkt liegt, eine Hyperbel zugeordnet. Die unendlich ferne Gerade kann nach unserer Voraussetzung in diesem Falle nicht Hauptlinie sein.* Auf Grund des Vorhergehenden können wir nunmehr Folgendes behaupten:

Haben die Ordnungscurven $\varkappa$ und λ vier reelle Punkte A, B, C, D mit einander gemein, so enthält das System Σ drei reelle Hauptpunkte, welche mit den Schnittpunkten der Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ zusammenfallen. Jeder Hauptbüschel enthält ein Paar reelle Ordnungsstrahlen, und die drei Paar Ordnungsstrahlen dieser Büschel fallen auf die Seiten des Vierecks $ABCD$. Der unendlich fernen Geraden g_∞ in Σ ist, falls auf ihr kein Hauptpunkt liegt, eine Hyperbel γ_1 zugeordnet und nur dann eine Ellipse, wenn $\varkappa$ und λ zwei Hyperbeln sind, deren Asymptotenrichtungen von einander getrennt sind. Einer Geraden a, welche durch keinen Hauptpunkt hindurchgeht, ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel zugeordnet, je nachdem a mit γ_1 keinen, einen oder zwei reelle Punkte gemein hat. Liegt ein Hauptpunkt U_∞ unendlich fern, so ist der Geraden a eine Hyperbel zugeordnet. Dieselbe geht in eine Parabel über, wenn, falls g_∞ sich selbst zugeordnet ist, a zu der U_∞ zugeordneten Hauptlinie u_1 parallel läuft, oder für den Fall, dass der Geraden g_∞ die Gerade g_1 zugeordnet ist, a durch den Schnittpunkt von g_1 und u_1 hindurchgeht. Ist g_∞ Hauptlinie, so ist der Geraden a immer eine Hyperbel zugeordnet.

Schneiden sich die Ordnungscurven $\varkappa$ und λ in vier imaginären Punkten, so enthält Σ drei reelle Hauptpunkte. Ist das Vierseit $abcd$ den Curven $\varkappa$ und λ umschrieben, so gehen die drei Hauptlinien durch die Gegenecken dieses Vierseits. Nur ein Hauptbüschel kann reelle Ordnungsstrahlen enthalten, da $\varkappa$ und λ keinen reellen Punkt mit einander gemein haben. Es lässt sich auch nachweisen, dass ein Hauptbüschel mit reellen Ordnungsstrahlen vorkommen muss. Denn seien M und N zwei zugeordnete Punkte von Σ, und denken wir uns von den drei Hauptpunkten U, V und W Strahlen nach M und N gezogen, so sind in zwei Hauptbüscheln

* Der Fall, dass zwei Parabeln gegeben sind, kommt hier nicht in Betracht, indem diese zusammenfallen würden. Dagegen sind bei den später zu betrachtenden Fällen auch zwei Parabeln als Ordnungscurven zulässig.

diese Strahlenpaare durch die betreffenden Hauptlinien von einander getrennt, während das beim dritten Büschel nicht der Fall ist. Der letztere enthält hiernach reelle, die beiden anderen dagegen imaginäre Ordnungsstrahlen. Der unendlich fernen Geraden g_∞ ist eine Hyperbel zugeordnet, welche auch in eine Gerade und eine Hauptlinie zerfallen kann. Enthält g_∞ zwei imaginäre Schnittpunkte von $\varkappa$ und λ, so ist sie sich selbst zugeordnet.

Hinsichtlich der Lage der collinearen Systeme ε und ε_1 ergiebt sich aus dem Vorhergehenden Folgendes:

Die Systeme ε und ε_1 sind nur dann affin, wenn die unendlich ferne Gerade von Σ Hauptlinie ist. Sind ε und ε_1 nicht affin, so giebt es in ihnen nur zwei einander entsprechende Parallelstrahlenbüschel. Hat sowohl $\varkappa$ als auch λ einen Mittelpunkt, so werden die beiden Parallelstrahlenbüschel gefunden, indem man den Punkten der durch die Mittelpunkte von $\varkappa$ und λ gehenden Geraden die Polaren in Bezug auf diese Curven zuordnet. Ist $\varkappa$ eine Parabel, so sind der durch den unendlich fernen Punkt von $\varkappa$ und den Mittelpunkt von λ gehenden Geraden zwei Parallelstrahlenbüschel zugeordnet. Liegt ein Hauptpunkt unendlich fern, so ist dieser Punkt gemeinschaftlicher Mittelpunkt der beiden entsprechenden Parallelstrahlenbüschel von ε und ε_1. Dem Mittelpunkte einer Ordnungscurve oder, wenn dieselbe eine Parabel ist, dem unendlich fernen Punkte derselben ist die unendlich ferne Gerade und eine eigentliche Gerade p_1 zugeordnet; p_1 ist sonach die Gegenaxe des einen Systems. Der dem Hauptdreieck UVW umschriebene Kreis $\varkappa_1$, dem eine Gerade von Σ zugeordnet ist, enthält die Mittelpunkte zweier projectivisch gleicher Strahlenbüschel S und S_1 von ε resp. ε_1, während das andere Paar projectivisch gleicher Strahlenbüschel O und O_1 eine gleichseitige Hyperbel erzeugt. Denken wir uns die beiden homologen Geraden m und m_1 in ε resp. ε_1 gezogen, von denen jede auf der zugehörigen Gegenaxe senkrecht steht, so liefern die Schnittpunkte von m und m_1 mit $\varkappa_1$ die Punkte S und S_1, wodurch dann sofort auch O und O_1 bestimmt ist. Ist einer der Hauptpunkte U_∞, ein unendlich ferner Punkt, so liegt das eine Paar projectivisch gleicher Strahlenbüschel von ε und ε_1 perspectivisch zur unendlich fernen Geraden in Σ, während das andere eine gleichseitige Hyperbel erzeugt; letztere zerfällt in die U_∞ zugeordnete Hauptlinie u_1 und eine auf u_1 senkrecht stehende Gerade, wenn die durch U_∞ gehenden Hauptlinien u_1 rechtwinklig schneiden. Die Geraden m und m_1 fallen dann auf u_1. Zur Bestimmung der Punkte S, S_1 und O, O_1 dürfte noch folgende Bemerkung am Platze sein, welche sich namentlich dann anwenden lässt, wenn nicht drei reelle Hauptpunkte in Σ vorkommen. Denken wir uns in ε einen beliebigen Parallelstrahlenbüschel S_∞ gezogen, so entspricht diesem in ε_1 ein Strahlenbüschel S_1, dessen Mittelpunkt auf der Gegenaxe von ε_1 liegt. Der Büschel S_1 enthält nun zwei Strahlen s_1 und p_1, welche m_1 unter denselben Winkeln schneiden, wie die homologen Strahlen von ε die Gerade m. Da ferner die beiden homologen Parallelstrahlenbüschel in ε und ε_1 auf m resp. m_1 senkrecht stehen, so sind die Punkte $s_1 \cdot m_1$ und $p_1 \cdot m_1$ die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel von ε_1, denen in ε zwei projectivisch gleiche Strahlenbüschel entsprechen.

An die vorangehenden Ausführungen wollen wir die weiteren Ergebnisse für die besonderen Fälle anknüpfen, wie folgt:

Wenn zwei der gemeinsamen reellen Punkte A, B, C, D von $\varkappa$ und λ, etwa A und B, sich zu einem Punkte T vereinigen, so fallen in T zwei Hauptpunkte von Σ zusammen. Die Tangente t_1 an $\varkappa$ und λ in T ist die T zugeordnete Hauptlinie. Der zweite Hauptpunkt V ist Schnittpunkt von t_1 und CD. Jeder Hauptbüschel enthält zwei reelle Ordnungsstrahlen; ein Ordnungsstrahl von V fällt mit t_1 zusammen. Hierhin gehört auch der Fall, dass als Ordnungscurven zwei Parabeln gegeben sind, die sich in zwei Punkten schneiden, und deren Axen einander parallel laufen (ev. auf einander fallen). Alsdann ist der gemeinsame unendlich ferne Punkt der Parabeln der eine Hauptpunkt und die unendlich ferne Gerade von Σ zugeordnete Hauptlinie; der andere Hauptpunkt liegt ebenfalls unendlich fern. Haben die Curven $\varkappa$ und λ ausser dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte T keinen weiteren reellen Punkt mit einander gemein, so giebt es in Σ ausser T noch einen Hauptpunkt V; doch enthält nur der Büschel V reelle Ordnungsstrahlen.

Berühren sich $\varkappa$ und λ in zwei Punkten T und W, so liegen die Systeme ε und ε_1 perspectivisch. Die Gerade $\overline{TW}$ ist dann Collineationsaxe und der Schnittpunkt V der gemeinschaftlichen Tangenten von $\varkappa$ und λ ist Collineationscentrum. Letzteres liegt unendlich fern, wenn T und W auf einem gemeinsamen Durchmesser von $\varkappa$ und λ liegen. Dieser Fall tritt dann ein, wenn die sich in zwei Punkten berührenden Ordnungscurven Parabeln sind, weil dann der eine Berührungspunkt unendlich fern liegen muss, wenn beide Parabeln nicht zusammenfallen sollen. Die Systeme ε und ε_1 sind dann affin. Sind $\varkappa$ und λ zwei Hyperbeln, die sich in ihren unendlich fernen Punkten berühren, so fallen je zwei Durchmesser derselben, die jedem der unendlich fernen Punkte in Σ zugeordnet sind, auf einander. Die Systeme ε und ε_1 haben dann perspectivisch ähnliche Lage. Die perspectivisch ähnliche Lage von ε und ε_1 findet ausserdem noch statt, wenn die gegebenen Ordnungscurven zwei ähnliche, concentrische und ähnlich liegende Ellipsen. (bezüglich zwei concentrische Kreise) sind. Wir haben uns dann vorzustellen, dass sich die Ellipsen in zwei imaginären, auf der unendlich fernen Geraden von Σ gelegenen Punkten berühren.

Schneiden sich $\varkappa$ und λ in zwei reellen Punkten T und P, und berühren sie sich ausserdem noch in T, so ist T der einzige Hauptpunkt von Σ, in dem drei Hauptpunkte sich vereinigen; die Hauptlinie von Σ geht durch T und ist gemeinsame Tangente von $\varkappa$ und λ. Sind als Ordnungscurven zwei Parabeln gegeben, die derselben Bedingung genügen sollen, so müssen ihre Axen einander parallel laufen. Die beiden unendlich fernen Punkte der

Parabeln fallen in einen Punkt A_∞ zusammen, und dieser Punkt ist zugleich Schnitt- und Berührungspunkt der Parabeln; die unendlich ferne Gerade ist die einzige Hauptlinie in Σ. Haben $\varkappa$ und λ nur zwei reelle Punkte M und N mit einander gemein, ohne sich zugleich in einem derselben zu berühren, so hat Σ einen reellen und zwei imaginäre Hauptpunkte. Der reelle Hauptpunkt W liegt auf $\overline{MN}$, und zwar befindet sich W ausserhalb $\varkappa$ und λ; die zugeordnete Hauptlinie w_1 schneidet somit beide Curven. Die Annahme, dass W innerhalb (also w_1 ausserhalb) $\varkappa$ und λ läge, führte nämlich zu dem Widerspruche, dass ein beliebiger Strahl s des Büschels W von jedem Paare seiner Schnittpunkte mit $\varkappa$ und λ durch W und $s \cdot w_1$ harmonisch getrennt wäre, was bei der angenommenen Lage von $\varkappa$ und λ nicht stattfinden kann. Die beiden involutorischen Punktreihen auf w_1, welche dadurch erhalten werden, dass wir jedem Punkte von w_1 die ihm in Bezug auf $\varkappa$ und λ conjugirten zuweisen, haben reelle Ordnungselemente. Die Ordnungspunkte der einen Punktreihe sind nun durch die der andern von einander getrennt; also giebt es keine reellen Punkte auf w_1, die einander doppelt zugeordnet sind. Hieraus folgt aber, dass w_1 keine reellen Hauptpunkte enthalten kann. Es giebt also in Σ ausser W keinen weiteren reellen Hauptpunkt.*

Hinsichtlich der Hauptpunkte hat sich also Folgendes ergeben:

Haben die Ordnungscurven $\varkappa$ und λ vier reelle oder imaginäre Punkte A, B, C, D mit einander gemein, so enthält das System Σ jedesmal drei reelle Hauptpunkte U, V, W. Dieselben sind die Schnittpunkte der (reellen oder imaginären) Gegenseiten des Vierecks $ABCD$. Von den Hauptpunkten können einer oder zwei unendlich fern liegen. Berühren sich $\varkappa$ und λ in einem Punkte T, und schneiden sie sich ausserdem noch in zwei reellen oder imaginären Punkten, so giebt es in Σ nur zwei Hauptpunkte, von denen der eine der Punkt T ist; in ihm vereinigen sich zwei Hauptpunkte von Σ. Die T zugeordnete Hauptlinie ist die Tangente an $\varkappa$ und λ in T. Schneiden sich $\varkappa$ und λ in zwei reellen Punkten und berühren sie sich noch in einem derselben, so ist der gemeinsame Schnitt- und Berührungspunkt Q der einzige Hauptpunkt von Σ, in dem die drei Hauptpunkte zusammenfallen. Ist keiner der beiden Schnittpunkte zugleich auch Berührungspunkt, so giebt es in Σ einen reellen Hauptpunkt U, während die beiden anderen V und W imaginär sind. Die U zugeordnete Hauptlinie geht nicht durch U und schneidet $\varkappa$ und λ.

Die den Geraden in Σ zugeordneten Kegelschnitte haben also drei reelle, zwei oder einen Punkt mit einander gemein, je nachdem in Σ drei reelle Hauptpunkte, zwei oder nur ein solcher vorkommen. In Bezug auf die

* Vergl. auch Reye, Geometrie der Lage, II. Aufl. I. Abth. S. 204, Nr. 190.

Lage der Kegelschnitte, die den sämmtlichen durch einen Punkt P gehenden Geraden zugeordnet sind, verweisen wir auf die genannte Abhandlung des Herrn Reye S. 289.

Wir wollen noch eine kurze Anwendung unserer Untersuchung auf einen bestimmten Fall machen, indem wir als Ordnungscurven zwei Kreise ξ und ξ' in Σ annehmen und voraussetzen, dass ξ und ξ' weder auf einander fallen, noch concentrisch liegen. Wir haben hierbei drei Fälle zu unterscheiden. Die Kreise ξ und ξ' haben entweder 1. zwei reelle Punkte mit einander gemein, oder 2. einen gemeinschaftlichen Berührungspunkt, oder 3. sie haben keinen reellen Punkt mit einander gemein. In jedem der drei Fälle enthält Σ einen unendlich fernen Hauptpunkt U_∞; die zugeordnete Hauptlinie u_1 geht durch die Mittelpunkte der beiden Kreise. Der Hauptpunkt U_∞ liegt auf der Potenzaxe von ξ und ξ'; die Potenzaxe selbst ist der eine Ordnungsstrahl des Hauptbüschels U_∞, der andere Ordnungsstrahl ist die unendlich ferne Gerade von Σ, welche durch die beiden Durchmesserbüschel von ξ und ξ' erzeugt wird. Die Mittelpunkte M und M_1 von ξ und ξ' fallen hiernach zusammen mit den resp. Mittelpunkten zweier projectivisch gleicher Strahlenbüschel von ε und ε_1. Das andere Paar projectivisch gleicher Strahlenbüschel erzeugt (ausser u_1) eine auf u_1 senkrecht stehende Gerade g_1. Sind die Kreise ξ und ξ' einander gleich, so fällt g_1 mit der Potenzaxe beider Kreise zusammen. Berühren sich dann die Kreise in dem Punkte V, so ist dieser Punkt ein Hauptpunkt und zugleich gemeinschaftlicher Mittelpunkt des einen Paares projectivisch gleicher Strahlenbüschel in ε und ε_1; haben dagegen die gleichen Kreise zwei oder keinen reellen Punkt mit einander gemein, so haben die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel, wodurch die Potenzaxe erzeugt wird, gleichen Abstand von derselben. Im Falle 1. hat das System Σ ausser U_∞ keinen weiteren reellen Hauptpunkt mehr, im Falle 2. enthält Σ zwei und im Falle 3. drei reelle Hauptpunkte, und die beiden durch den unendlich fernen Hauptpunkt gehenden Hauptlinien schneiden die dritte unter rechten Winkeln. In keinem der drei Fälle kann einer beliebigen Geraden a eine Ellipse zugeordnet sein. Im Allgemeinen ist a eine Hyperbel zugeordnet. Den parallel zu der Hauptlinie u_1 laufenden Geraden sind Parabeln zugeordnet, welche die Potenzaxe s der Kreise ξ und ξ' zur gemeinsamen Axe haben; denn jede Parallele n zu u_1 wird von dem zugeordneten Kegelschnitte ν_1 in zwei zugeordneten reellen oder imaginären Punkten A und B geschnitten. Die Strahlen $\overline{U_\infty A}$ und $\overline{U_\infty B}$ sind nun von s und der unendlich fernen Geraden harmonisch getrennt; also halbirt s die Strecke $\overline{AB}$ und ausserdem steht s auf $\overline{AB}$ senkrecht. Die sämmtlichen Parabeln, welche den Geraden in Σ zugeordnet sind, berühren sich hiernach in U_∞ und haben je nach der Lage der Kreise ξ und ξ' noch die auf u_1 gelegenen reellen oder imaginären Hauptpunkte V und W mit einander gemein, und zwar haben V und W gleichen Abstand von s, oder die Parabeln berühren sich noch in dem Schnittpunkte von s und u_1 und haben u_1 zur gemeinsamen Scheiteltangente. Hinsichtlich der Hauptbüschel lässt sich noch bemerken, dass bei dem Büschel U_∞ je zwei zugeordnete Strahlen gleichen Abstand von s haben, dass aber bei jedem der anderen Hauptbüschel je zwei zugeordnete Strahlen auf einander senkrecht stehen. Es enthält also je nach der Lage der Kreise ξ und ξ' das System Σ entweder zwei, oder einen, oder gar keinen reellen rechtwinkligen Hauptbüschel.

Projiciren wir das System Σ aus einem beliebigen Punkte S, so erhalten wir eine involutorische quadratische Beziehung im Strahlenbündel S, welche der oben behandelten ganz analog ist. Die Ordnungscurven $\varkappa$ und λ werden dann durch Ordnungskegel, die Hauptpunkte durch Hauptstrahlen projicirt etc. Den durch S gehenden Strahlen einer Ebene ist im Allgemeinen eine Kegelfläche zugeordnet. Alle solche Kegelflächen, welche den Strahlenbüscheln des Bündels S zugeordnet sind, haben mindestens einen reellen Strahl und höchstens drei solcher mit einander gemein. Die weiteren hierbei in Betracht kommenden Ausführungen überlasse ich dem Leser.

Saargemünd, den 20. Mai 1887.

III.

Ueber die Differentialgleichung der Functionen des parabolischen Cylinders.

Von

Dr. E. Haentzschel

in Berlin.

Stellt man sich die Aufgabe, die Potentialgleichung $\Delta^2 V = 0$ für einen wulstförmigen Körper, der eine Cardioide zur Directrix und ihren Rückkehrpunkt zum Pol hat, zu integriren, so gelangt man, wie Herr K. Baer* gezeigt hat, zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung, deren Integrale von Herrn Baer als Functionen des parabolischen Cylinders bezeichnet worden sind. Die genannten Functionen sind ein functionentheoretischer Grenzfall der Functionen des elliptischen Cylinders;** sie werden definirt durch die Differentialgleichung:

$$1)\qquad \frac{d^2 z}{du^2} = [h^2 \alpha^2 u^2 - \nu^2] z,$$

welche in der Umgebung der ausserwesentlich singulären Stelle $u = 0$ die Integrale hat:

$$z_1 = a_0 + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \cdots + a_{2p} u^{2p} + \cdots,$$

$$2)\quad z_1 = a_0 \left(1 - \frac{\nu^2}{2!} u^2 + \frac{(2h^2\alpha^2 + \nu^4)}{4!} u^4 - \frac{\nu^2 (14 h^2 \alpha^2 + \nu^4)}{6!} u^6 \pm \cdots \right),$$

indem die Beziehungsgleichung besteht:

$$3)\qquad (2p+2)(2p+1) a_{2p+2} + \nu^2 a_{2p} = h^2 \alpha^2 a_{2p-2},$$

und weiter

$$z_2 = u(a'_0 + a'_2 u^2 + a'_4 u^4 + \cdots + a'_{2p} u^{2p} + \cdots),$$

$$4)\quad z_2 = a'_0 u \left(1 - \frac{\nu^2}{3!} u^2 + \frac{(6h^2\alpha^2 + \nu^4)}{5!} u^4 - \frac{\nu^2(26 h^2 \alpha^2 + \nu^4)}{7!} u^6 \pm \cdots \right)$$

mit der Recursionsformel:

$$5)\qquad (2p+3)(2p+2) a'_{2p+2} + \nu^2 a'_{2p} = h^2 \alpha^2 a'_{2p-2}.$$

---

* K. Baer, Die Function des parabolischen Cylinders. Beilage zum Jahresbericht des Gymnasiums zu Cüstrin, 1883.

** K. Baer, *l. c.* und Haentzschel, Zur Theorie der Functionen des elliptischen Cylinders. Programmabhandlung des Realgymnasiums zu Duisburg, Ostern 1886, S. 11—14.

Mit Herrn **Baer** schreiben wir, unter Einführung der Abkürzung:

$$n = \frac{\nu^2}{h\alpha}, \tag{6}$$

$$z_1 = a_0 e^{\pm\frac{1}{2}h\alpha u^2}\left[1 \mp \frac{(1\pm n)}{2!}h\alpha u^2 + \frac{(1\pm n)(5\pm n)}{4!}h^2\alpha^2 u^4 \right.$$
$$\left. \mp \frac{(1\pm n)(5\pm n)(9\pm n)}{6!}h^3\alpha^3 u^6 + \cdots\right],$$

oder durch das Symbol der hypergeometrischen Reihe ausgedrückt:

$$z_1 = a_0 e^{\pm\frac{1}{2}h\alpha u^2} F\left(\frac{1\pm n}{4},\, g,\, \frac{1}{2},\, \mp\frac{h\alpha u^2}{g}\right) \quad \text{für } g=\infty. \tag{7}$$

Ebenso:

$$z_2 = a'_0 u e^{\pm\frac{1}{2}h\alpha u^2}\left[1 \mp \frac{(3\pm n)}{3!}h\alpha u^2 + \frac{(3\pm n)(7\pm n)}{5!}h^2\alpha^2 u^4 \right.$$
$$\left. \mp \frac{(3\pm n)(7\pm n)(11\pm n)}{7!}h^3\alpha^3 u^6 + \cdots\right]$$

oder

$$z_2 = a'_0 u e^{\pm\frac{1}{2}h\alpha u^2} F\left(\frac{3\pm n}{4},\, g,\, \frac{3}{2},\, \mp\frac{h\alpha u^2}{g}\right) \quad \text{für } g=\infty, \tag{8}$$

wo jedesmal das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist.

Indem Herr **Baer** nun eine tiefere Untersuchung der vorliegenden Transcendente anstellt, entwickelt er namentlich die Eigenschaften derselben für endliche Werthe von u bei ganzzahligem n. Minder vollständig ist der Versuch, unsere Function z für sehr grosse Werthe von u darzustellen.

Im Folgenden soll diese Darstellung, die von dem Standpunkte der Theorie der Differentialgleichungen ebenso nothwendig ist als jene andere, gegeben werden; aber es muss von vornherein bemerkt werden, dass die Entwickelungen nur als ein erster Versuch angesehen werden dürfen, indem sich dem weiteren Eindringen Schwierigkeiten entgegenstellten, die zu überwinden noch nicht gelungen ist.

Wir führen also in Gleichung 1)

$$v = \frac{1}{u} \tag{9}$$

als neue unabhängige Veränderliche ein und erhalten:

$$v^6\frac{d^2z}{dv^2} + 2v^5\frac{dz}{dv} - (h^2\alpha^2 - \nu^2 v^2)z = 0. \tag{10}$$

Es ist also nach Herrn **Fuchs*** die Stelle $v=0$ **eine Stelle der Unbestimmtheit** im Giltigkeitsbereich des Integrals, was man daran erkennt, dass einerseits der Grad der Vielfachheit der singulären Stelle die Ordnung der Differentialgleichung übersteigt, andererseits sich für 10) eine determinirende Fundamentalgleichung im **Fuchs**'schen Sinne nicht bilden

* **Fuchs**, Ueber die Werthe, welche die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung in singulären Punkten annehmen können. Sitzungsberichte der königl. Akademie der Wissenschaften, Berlin, 11. März 1886.

lässt. Unser nächstes Ziel soll es nun sein, das erste Merkmal fortzuschaffen.

Dazu machen wir

11) $$s = v^2$$

zur Unabhängigen und erhalten:

12) $$4s^4 \frac{d^2 z}{ds^2} + 6s^3 \frac{dz}{ds} + (v^2 s - h^2 \alpha^2) z = 0.$$

Wir reduciren durch die Substitution:

13) $$z = \xi s^{-\frac{3}{4}}$$

und dies ergiebt:

14) $$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = \left(-\frac{3}{16}\frac{1}{s^2} - \frac{v^2}{4s^3} + \frac{h^2\alpha^2}{4s^4}\right)\xi.$$

Sei η der Quotient zweier particulären Integrale dieser Gleichung, so genügt derselbe bekanntlich der Kummer'schen Differentialgleichung dritter Ordnung*:

15) $$[\eta]_s = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{3}{8}\frac{1}{s^2} + \frac{v^2}{2s^3} - \frac{h^2\alpha^2}{2s^4}.$$

Zu ihrer Integration setze man:

$$r = \frac{\eta''}{\eta'} = \frac{d}{ds}\left(\log \frac{d\eta}{ds}\right) = \frac{a_{-2}}{s^2} + \frac{a_{-1}}{s} + a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots,$$

also

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{2a_{-2}}{s^3} - \frac{a_{-1}}{s^2} + a_1 + 2a_2 s + \cdots$$

Folglich:

16) $$[\eta]_s = \frac{dr}{ds} - \frac{1}{2}r^2 = -\frac{a_{-2}^2}{2s^4} - \frac{2a_{-2}}{s^3} - \frac{a_{-1}}{s^2} + \cdots$$
$$- \frac{a_{-2}a_{-1}}{s^3} - \frac{a_{-1}^2}{2s^2} - \cdots$$
$$- \frac{a_{-2}a_0}{s^2} - \cdots$$

Durch Vergleichen von 15) und 16) folgt:

$$a_{-2} = \pm h\alpha,$$
$$a_{-1} = \mp \frac{v^2}{2h\alpha} - 2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Deshalb ist zu setzen:

$$r = \pm \frac{h\alpha}{s^2} + \left(\mp \frac{v^2}{2h\alpha} - 2\right)\frac{1}{s} + a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots,$$

$$\log \frac{d\eta}{ds} = \int r\, ds = \log C \mp \frac{h\alpha}{s} + \left(\mp \frac{v^2}{2h\alpha} - 2\right)\log s + a_0 s + \cdots,$$

17) $$\frac{d\eta}{ds} = C s^{-2 \mp \frac{v^2}{2h\alpha}} e^{\mp \frac{h\alpha}{s}} e^{s\left(a_0 + \frac{a_1}{2}s + \frac{a_2}{3}s^2 + \cdots\right)},$$

* Kummer, De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis. Programm des Gymnasiums zu Liegnitz, 1834, und Crelle's Journal, Bd. 100, 1886.

18) $$\eta = C\int^{s} s^{-2\mp\frac{n}{2}}\, e^{\mp\frac{h\alpha}{s}}\, e^{s\left(a_0+\frac{a_1}{2}s+\frac{a_2}{3}s^2+\cdots\right)}\, ds.$$

Nun ist bekanntlich:

19) $$\xi_1 = \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\xi_2 = \eta\,\xi_1,$$

daher

20) $$\xi_1 = c s^{1\pm\frac{n}{4}}\, e^{\pm\frac{h\alpha}{2s}}\, e^{-\frac{s}{2}\left(a_0+\frac{a_1}{2}s+\frac{a_2}{3}s^2+\cdots\right)}.$$

Zur Ermittelung des zweiten Exponentialfactors bezeichnen wir denselben abkürzend mit φ und führen alsdann ξ_1 in 14) ein; wir finden, dass φ der Differentialgleichung genügt:

21) $$4s^2\frac{d^2\varphi}{ds^2} + (8s \pm 2ns \mp 4h\alpha)\frac{d\varphi}{ds} + \frac{(1\pm n)(3\pm n)}{4}\varphi = 0.$$

Indem wir also von ξ das Product

$$s^{1\pm\frac{n}{4}}\, e^{\pm\frac{h\alpha}{2s}}$$

abgesondert haben, ist es uns gelungen, die Gleichung 14) in eine andere 21) überzuführen, welcher das erste der oben genannten beiden Kennzeichen fehlt, nicht aber das zweite. Es drückt sich demnach die bezeichnete Unbestimmtheit von ξ in der Umgebung von $s=0$ dadurch aus, dass wir nicht wissen, zu welchem Exponenten die particulären Integrale von 21) gehören. Im Gegentheil, theoretisch könnte φ zu jedem beliebigen Exponenten, mag er reell oder complex sein, gehören. Wir wählen nun, uns nur auf die Gleichung 20) stützend, unter allen diesen den einfachsten, nämlich Null, aus; ja man erkennt, dass dieser wegen der Constante in dem Coefficienten von $\frac{d\varphi}{ds}$ der allein zulässige ist. Es spricht sich hierin eine gewisse Vollkommenheit des von uns eingeschlagenen methodischen Weges aus, welcher uns von selbst den Factor $s^{1\pm\frac{n}{4}}$ abzusondern gelehrt hat.

Wir führen also in 21) die Potenzreihe ein:

22) $$\varphi = c + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_p s^p + \cdots$$

und finden, dass die Coefficienten derselben durch die Relation verbunden sind:

23) $$c_p\left(p+\frac{1\pm n}{4}\right)\left(p+\frac{3\pm n}{4}\right) = \pm h\alpha(p+1)\,c_{p+1},$$

daher ergeben sich vorerst folgende zwei Ausdrücke für unsere Function z, die, zur Unterscheidung von z_1 in 6), durch $\overline{z_1}$ und $z_1{}^*$ bezeichnet werden mögen:

24) $$\overline{z_1} = c s^{\frac{1+n}{4}}\, e^{\frac{h\alpha}{2s}}\left(1+\frac{(1+n)(3+n)}{4^2.1!}\,\frac{s}{h\alpha}+\frac{(1+n)(3+n)(5+n)(7+n)}{4^4.2!}\,\frac{s^2}{h^2\alpha^2}+\cdots\right),$$

25) $$z_1{}^* = c' s^{\frac{1-n}{4}}\, e^{-\frac{h\alpha}{2s}}\left(1-\frac{(1-n)(3-n)}{4^2.1!}\,\frac{s}{h\alpha}+\frac{(1-n)(3-n)(5-n)(7-n)}{4^4.2!}\,\frac{s^2}{h^2\alpha^2}-\cdots\right).$$

---

* Man vergl. H. Bruns, Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie. Schumacher's Astronomische Nachrichten, Nr. 2533, Bd. 106, 1883, und Nr. 2553, Bd. 107, 1884.

Diese Reihen sind ebenfalls hypergeometrische; in der That kann man für dieselben schreiben:

$$26)\qquad \bar{z}_1 = c s^{\frac{1+n}{4}} e^{\frac{h\alpha}{2s}} F\left(\frac{1+n}{4}, \frac{3+n}{4}, g, \frac{gs}{h\alpha}\right) \quad \text{für } g=\infty,$$

$$27)\qquad z_1^* = c' s^{\frac{1-n}{4}} e^{-\frac{h\alpha}{2s}} F\left(\frac{1-n}{4}, \frac{3-n}{4}, g, -\frac{gs}{h\alpha}\right) \quad \text{für } g=\infty.$$

Bevor wir weitere Schlüsse aus diesen Integralen ziehen, wollen wir dieselben als Functionen von z_1 und z_2 darstellen. Es geschieht dies mit Hilfe einer von Herrn Kummer* herrührenden Formel, welche lautet:

$$\text{I)}\quad 1 - \frac{\alpha\beta}{1!\,y} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{2!\,y^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\,y^3} + \cdots$$
$$= y^{\alpha}\frac{\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}\left(1 + \frac{\alpha y}{(\alpha-\beta+1)\,1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,y^2}{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta+2)\,2!} + \cdots\right)$$
$$+ y^{\beta}\frac{\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)}\left(1 + \frac{\beta y}{(\beta-\alpha+1)\,1!} + \frac{\beta(\beta+1)\,y^2}{(\beta-\alpha+1)(\beta-\alpha+2)\,2!} + \cdots\right).$$

Setzen wir in dieselbe

$$y = -h\alpha u^2, \quad \alpha = \frac{1+n}{4}, \quad \beta = \frac{3+n}{4},$$

so geht hervor:

$$28)\quad \frac{\bar{z}_1}{c} = (-h\alpha)^{\frac{1+n}{4}}\left\{\frac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\frac{-1+n}{4}\right)}\frac{z_1}{a_0} + (-h\alpha)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(-\frac{3}{2})}{\Pi\left(\frac{-3+n}{4}\right)}\frac{z_2}{a_0'}\right\};$$

setzen wir aber

$$y = h\alpha u^2, \quad \alpha = \frac{1-n}{4}, \quad \beta = \frac{3-n}{4},$$

so entsteht:

$$29)\quad \frac{z_1^*}{c'} = (h\alpha)^{\frac{1-n}{4}}\left\{\frac{\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\frac{-1-n}{4}\right)}\frac{z_1}{a_0} + (h\alpha)^{\frac{1}{2}}\frac{\Pi(-\frac{3}{2})}{\Pi\left(\frac{-3-n}{4}\right)}\frac{z_2}{a_0'}\right\}.$$

Wir erinnern nun an den folgenden, von Herrn Fuchs** in seiner Theorie der Differentialgleichungen mitgetheilten Satz:

„Sind y_1 und y_2 die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen, und Y_1 und Y_2 zwei Integrale, welche sich in linearer Weise durch die Elemente y_1 und y_2 ausdrücken lassen, also

$$Y_1 = C_{11}y_1 + C_{12}y_2,$$
$$Y_2 = C_{21}y_1 + C_{22}y_2,$$

so bilden Y_1, Y_2 ein Fundamentalsystem oder auch nicht, je nachdem die Determinante

* Kummer, Ueber die hypergeometrische Reihe. Crelle's Journal Bd. 15, 1836, S. [illegible], insbesondere Formel [illegible].

Anm. Das α der Formel I ist natürlich von dem α unserer Differentialgleichung verschieden.

** Fuchs, Theorie der Differentialgleichungen. Crelle's Journ. Bd. 66 u. 68.

$$\begin{vmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet oder gleich Null ist."

Dies hier angewandt, ergiebt, dass 28) und 29) wohl im Stande wären, ein Fundamentalsystem zu bilden.

Dabei ist aber auf einen Ausnahmefall hinzuweisen. Sobald

$$n = \pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \pm 7, \ \ldots$$

ist, wird die eine oder die andere unserer Darstellungen illusorisch, indem z. B. $\Pi\left(\frac{-1+n}{4}\right)$ unendlich gross wird für $n = -3, -7, -11, \ldots$ und für $n = 1$. Dieser Fall hat sich als solcher bereits bemerkbar gemacht, indem die hypergeometrischen Reihen 7) und 8) in dem genannten Falle für passende Werthe von n abbrechen.

Andererseits erkennen wir aber aus 19), dass die eben niedergeschriebenen Lösungen je ein erstes particuläres Integral zweier verschiedener Fundamentalsysteme von Integralen unserer Differentialgleichung sind. Man ersieht daraus, dass der Satz: „In der Umgebung eines singulären Punktes giebt es stets nur ein Fundamentalsystem von Integralen", für Stellen der Unbestimmtheit nicht gilt. Denn wir gelangen hier zu zwei Fundamentalsystemen, deren einfachste Repräsentanten $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ bez. z_1^*, z_2^* sind. Dadurch ist der von Herrn Fuchs für den Punkt $s = 0$ eingeführte Begriff einer „Stelle der Unbestimmtheit mit bestimmter Verzweigung" vollkommen klargelegt.

Es ist nämlich

$$\bar{z}_2 = \bar{z}_1 \, \bar{\eta}, \tag{30}$$

$$z_2^* = z_1^* \eta^*, \tag{31}$$

wo η aus 18) zu entnehmen ist.

Wir gehen auf eine explicite Darstellung dieser zweiten particulären Integrale, sobald n ganz beliebig ist, nicht weiter ein; wir beschränken uns vielmehr auf den Fall eines reellen, ganzen oder gebrochenen, n und nehmen an, dass i die grösste in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl, r der Rest sei, also

$$\frac{n}{2} = i + r. \tag{32}$$

Alsdann ist:

$$\bar{\eta} = \int \frac{ds}{s^2} \frac{s^{-\frac{n}{2}}}{\bar{\varphi}^2} e^{-\frac{h\alpha}{s}} \tag{33}$$

oder

$$\bar{\eta} = \int \frac{ds}{s^2} \frac{e^{-\frac{h\alpha}{s}}}{s^{\frac{n}{2}}} (1 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots),$$

indem von multiplicativen Constanten abgesehen wird.

Wir erinnern nun an die Recursionsformel:

$$34)\qquad \int \frac{ds}{s^2}\frac{e^{\frac{a}{s}}}{s^p} = -\frac{e^{\frac{a}{s}}}{a s^p} - \frac{p}{a}\int \frac{ds}{s^2}\frac{e^{\frac{a}{s}}}{s^{p-1}},$$

deren Anwendung $\bar{\eta}$ auf die Form zu bringen gestattet:

$$35)\qquad \bar{\eta} = \frac{e^{-\frac{h\alpha}{s}}}{s^{\frac{n}{2}}}(c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots) + B\int e^{-\frac{h\alpha}{s}}\frac{ds}{s^{1+r}},$$

so dass bei verschwindendem r die Function $\bar{\eta}$ vom Integrallogarithmus abhängig ist; B ist eine Constante.

Folglich hat nach 24) und 30) $\bar{z}_2$ die Gestalt:

$$36)\qquad \bar{z}_2 = s^{\frac{1-n}{4}} e^{-\frac{h\alpha}{2s}}(l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \cdots + l_p s^p + \cdots) + B\bar{z}_1\int e^{-\frac{h\alpha}{s}}\frac{ds}{s^{1+r}}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten l_0, l_1, l_2, ... setzen wir diesen Werth in 12) ein und gelangen zu der folgenden, von r unabhängigen Gleichung:

$$37)\qquad \begin{aligned} &\frac{(1-n)(3-n)}{4^2}(l_0 + l_1 s + l_2 s^2 + \cdots) \\ &+ \left[h\alpha + \left(1-\frac{n}{2}\right)s\right](l_1 + 2l_2 s + \cdots + p\, l_p s^{p-1} + \cdots) \\ &+ s^2(2.1 l_2 + 3.2 l_3 s + \cdots + p(p-1)\, l_p s^{p-2} + \cdots) \\ &+ B s^i\Big[(1+i) + \frac{(3+i)(1+n)(3+n)}{4^2.1!}\frac{s}{h\alpha} \\ &\qquad + \frac{(5+i)(1+n)(3+n)(5+n)(7+n)}{4^4.2!}\frac{s^2}{h^2\alpha^2} + \cdots\Big] = 0, \end{aligned}$$

aus welcher sich ergiebt:

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{(1-n)(3-n)}{4^2.h\alpha} l_0, \\ l_2 &= \frac{(1-n)(3-n)(5-n)(7-n)}{4^4.2!\, h^2\alpha^2} l_0, \\ l_3 &= -\frac{(1-n)(3-n)(5-n)(7-n)(9-n)(11-n)}{4^6.3!\, h^3\alpha^3} l_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

bis schliesslich der Index von l gleich $(i+1)$ ist, denn alsdann ist der Coefficient l_{i+1} der erste von der Constanten B abhängige. Man erhält nämlich:

$$38)\qquad -h\alpha(i+1)\, l_{i+1} = \frac{(1-n+4i)(3-n+4i)}{4^2} l_i + B(1+i),$$

und erkennt also aus 25), dass

$$39)\qquad \text{für } B=0:\ \bar{z}_2 = z_1{}^*$$

ist, dass also in diesem besonderen Falle die beiden ersten particulären Integrale 24) und 25) zu einem Fundamentalsystem zusammentreten.

In ähnlicher Weise ist

$$40)\qquad \eta^* = \int \frac{ds}{s^2} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(\varphi^*)^2} e^{\frac{h\alpha}{s}}$$

oder

$$\eta^* = \int \frac{ds}{s^2} s^{\frac{n}{2}} e^{\frac{h\alpha}{s}} (1 + b'_1 s + b'_2 s^2 + \cdots),$$

indem wiederum von multiplicativen Constanten abgesehen wird.

Mit Rücksicht auf 32) und auf die Recursionsformel:

$$41)\qquad \int \frac{ds}{s^2} e^{\frac{a}{s}} s^p = \frac{e^{\frac{a}{s}} s^{p-1}}{(p-1)} + \frac{a}{(p-1)} \int \frac{ds}{s^2} e^{\frac{a}{s}} s^{p-1}$$

ermittelt man daher für η^* die Function:

$$42)\qquad \eta^* = s^{\frac{n}{2}} e^{\frac{h\alpha}{s}} \left(\frac{c'_1}{s^{i-1}} + \frac{c'_2}{s^{i-2}} + \cdots + c'_i + c'_{i+1} s + \cdots \right) + B' \int \frac{ds}{s^{1-r}} e^{\frac{h\alpha}{s}}.$$

wo B' eine Constante bedeutet.

Folglich ist nach 25) und 31) das zweite particuläre Integral z_2^* von der Form

$$43)\qquad z_2^* = s^{\frac{1+n}{4}} e^{\frac{h\alpha}{2s}} \left(\frac{l'_1}{s^{i-1}} + \frac{l'_2}{s^{i-2}} + \cdots + l'_i + l'_{i+1} s + \cdots \right) + B' z_1^* \int \frac{ds}{s^{1-r}} e^{\frac{h\alpha}{s}}.$$

Setzt man diesen Werth in 12) ein, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten $l'_1, l'_2, \ldots$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
44)\qquad & \frac{(1+n)(3+n)}{4} [l'_1 s + l'_2 s^2 + \cdots + l'_i s^i + l'_{i+1} s^{i+1} + \cdots] \\
& + [2(4+n)s - 4h\alpha] [l'_1 (1-i) + l'_2 (2-i) + l'_3 (3-i) s^2 + \cdots \\
& \qquad\qquad - l'_{i-1} s^{i-2} + l'_{i+1} s^i + 2 l'_{i+2} s^{i+1} + \cdots] \\
& - 4i(1-i) l'_1 s + 4(1-i)(2-i) l'_2 s^2 + 4(2-i)(3-i) l'_3 s^3 + \cdots \\
& \qquad + 8 l'_{i-1} s^{i-1} + 8 l'_{i+2} s^{i+2} + \cdots \\
& + 4B' \Big[(1-i) - \frac{(3-i)(1-n)(3-n)}{4^2 . 1!} \frac{s}{h\alpha} \\
& \qquad + \frac{(5-i)(1-n)(3-n)(5-n)(7-n)}{4^4 . 2!} \frac{s^2}{h^2 \alpha^2} - \cdots \Big] = 0,
\end{aligned}$$

aus welcher hervorgeht, dass die Coefficienten $l'_1, l'_2, \ldots, l'_{i-1}$ proportional mit B' sind, und dass man, wenn der Coefficient von s^{i-1} gebildet wird, zur folgenden Gleichung gelangt:

$$\frac{(1-n)(3-n)}{4} l'_{i-1} + 4B' C_{i-1} = 0,$$

wo C_{i-1} der Coefficient von s^{i-1} in der mit B' multiplicirten eckigen Klammer ist. Diese Gleichung drängt zu der Eventualität, entweder B' oder eine gewisse Function von n und i verschwinden zu lassen. Das

Erstere lässt aber mit Rücksicht auf 39) und auf die nächste Bestimmungsgleichung:

$$\frac{(1+n)(3+n)}{4}\,l'_i - 4h\alpha\, l'_{i+1} + 4B'C_i = 0$$

und alle folgenden unsere beiden Fundamentalsysteme, das überstrichene und das mit einem Stern versehene, in ein einziges zusammenfallen.

Es weist dies auf die Aufgabe hin, eine independente Darstellung der Constanten B und B' zu versuchen, welche in genügend einfacher Weise zu geben mir leider noch nicht gelang. Trotzdem darf wohl die Werthverschiedenheit der beiden Fundamentalsysteme in der Umgebung der Stelle der Unbestimmtheit als gesichert angesehen werden. Dies zu zeigen, war vorläufig das Ziel der Untersuchung, deren mehr informatorischer Charakter zum Schluss nochmals hervorgehoben werden möge.

Duisburg, den 24. Mai 1887.

IV.

Beiträge zur Transformation der hyperelliptischen Integrale.

Von

WOLDEMAR HEYMANN,

Mathem. an der Königl. Bauschule zu Plauen i. V.

---

1. Ueber eine Eigenschaft der Discriminante.

Wir beginnen die Untersuchung damit, dass wir einen Discriminantensatz ableiten, welcher in der Transformationstheorie sehr gute Dienste leistet.

Sei $\Delta(x)$ die Discriminante von folgender ganzer Function:

1) $$v^n + A_{n-1}v^{n-1} + \dots + A_1 v + A_0 - x = 0,$$

in der die A_i unabhängig von x gedacht werden, dann ist bis auf einen constanten Factor

2) $$\Delta(x) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Sehen wir mit Rücksicht auf 1) x als Function von v an, also

3) $$x = v^n + \dots + A_0 = \varphi(v),$$

und führen letztere in 2) ein, so entsteht eine ganze Function $\Delta\,\varphi(v)$ vom $n(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, welche die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, dass sie den Factor $\left[\frac{d\,\varphi(v)}{dv}\right]^2$ ausscheiden lässt. Es ist also

4) $$\Delta\,\varphi(v) = \frac{1}{n^2}\psi(v)\,.\,\varphi'(v)^2,^*$$

wo $\psi(v)$ eine ganze Function vom

$$n(n-1) - 2(n-1) = (n-1)(n-2)^{\text{ten}} \text{ Grade}$$

bedeutet.

Der Satz lässt sich folgendermassen beweisen: Die Discriminante $\Delta(x)$ der Gleichung

1) $$x - \varphi(v) = 0$$

kann durch das Product

5) $$\Delta(x) = [x - \varphi(v_1)][x - \varphi(v_2)] \dots [x - \varphi(v_{n-1})]$$

dargestellt werden, wobei v_1 bis v_{n-1} die Wurzeln der Gleichung

---

* Der Factor $\frac{1}{n^2}$ muss beigefügt werden, weil die höchste Potenz von v in $\Delta\,\varphi(v)$ den Coefficienten 1 besitzt.

$$\varphi'(v) = 0$$

bedeuten. — Setzt man nun $x = \varphi(v)$ in 5) ein, so entsteht

6) $$\Delta\,\varphi(v) = [\varphi(v) - \varphi(v_1)][\varphi(v) - \varphi(v_2)] \dots [\varphi(v) - \varphi(v_{n-1})].$$

Greifen wir einen beliebigen Factor

$$\varphi(v) - \varphi(v_k)$$

heraus, so ist ersichtlich, dass dieser durch

$$(v - v_k)^2$$

theilbar ist, weil die Bedingung $\varphi'(v_k) = 0$ besteht. Sonach geht 6) über in

4) $$\Delta\,\varphi(v) = \psi(v) \prod_{k=1}^{n-1} (v - v_k)^2 = \frac{1}{n^2}\,\psi(v) \,.\, \varphi'(v)^2,$$

was zu beweisen war.

Nebenbei bemerkt man, dass $\psi(v)$ eine **reducible** Function ist, nämlich die Resultante der beiden ganzen Functionen

$$\frac{\varphi(v) - \varphi(v_k)}{(v - v_k)^2} \quad \text{und} \quad \varphi'(v_k),$$

wo v_k die zu eliminirende Grösse ist.

2. Anwendung auf die Transformation hyperelliptischer Differentiale.

Es sei das Differential

1) $$dV = \frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}}$$

vorgelegt, wo $\Delta(x)$ bis auf einen constanten Factor die Discriminante von

2) $$v^n + \dots + A_1 v + A_0 - x = 0$$

bedeutet. Führen wir

3) $$x = v^n + \dots + A_0 = \varphi(v)$$

in 1) ein, so entsteht mit Rücksicht auf 4)

4) $$dV = \frac{n\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}.$$

Wir sind hiermit auf ein Transformationsverfahren gekommen, welches folgendermassen formulirt werden kann:

Zu jedem Differential der Form

5) $$\frac{dx}{\sqrt{x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}}$$

existirt eine Gleichung

3) $$x = v^n + \dots + A_1 v + A_0,$$

welche dasselbe überführt in

6) $$\frac{n\,dv}{\sqrt{v^m + \dots + b_1 v + b_0}},$$

wobei $m = (n-1)(n-2)$ **und die** b_i **in bestimmter Weise von den** a_i **abhängen.**

Im Allgemeinen ist $m > n$, und daher wird man bei rückwärts geleiteter Transformation gewisse höhere Transcendenten specieller Art durch niedere ausdrücken können.

Würde man die den Differentialen 5) und 6) entsprechenden Integrale, sowie deren Umkehrfunctionen (im Weierstrass'schen Sinne*) als neue Transcendente einführen, so könnte man mit Hilfe der letzteren die Auflösung der Transformationsgleichung $\varphi(v) = x$ nach v herbeiführen. — Bekanntlich hat schon Landen auf diesem Wege die cubische Gleichung aufgelöst.

Anwendung auf specielle Fälle.

3. Transformation mittels der Gleichung

$$x = v^3 + 3Av^2 + 3Bv + C = \varphi(v). \tag{1}$$

Die Discriminante dieser Gleichung heisst

$$\Delta(x) = 27\,(x^2 + 2px + q),$$

wobei

$$p = -2A^3 + 3AB - C,$$
$$q = 4A^3C - 3A^2B^2 - 6ABC + 4B^3 + C^2 = p^2 + 4(B - A^2)^3.$$

Führen wir $x = \varphi(v)$ in das Differential

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2px + q}}$$

ein, so erhalten wir nach Ausscheidung von

$$\tfrac{1}{3}\,\varphi'(v) = v^2 + 2Av + B$$

folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2px + q}} = \frac{3\,dw}{\sqrt{v^2 + 2Av + 4B - 3A^2}}. \tag{2}$$

Letztere ist des Oefteren schon betrachtet worden, weil durch ihre Integration eine sehr bemerkenswerthe Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichung geleistet wird.

Man kann aber aus der vorliegenden Transformation auch Nutzen für höhere Differentiale ziehen, wenn man von dem allgemeinen Differential

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{\chi(x) \,.\, (x^2 + 2px + q)}}$$

ausgeht, in welchem χ eine ganze Function darstellt.

Um einen einfachen Fall zu statuiren, sei $\chi(x) = x$; dann gelangt man zu einer Gleichung, welche die Reduction eines hyperelliptischen Integrales vom Geschlecht $p = 2$ auf ein elliptisches zeigt, nämlich

$$\frac{dx}{\sqrt{x(x^2 + 2px + q)}} = \frac{3\,dv}{\sqrt{(v^3 + 3Av^2 + 3Bv + C)(v^2 + 2Av + 4B - 3A^2)}}. \tag{3}$$

* Vergl. Monatsberichte der königl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin, 1886; Weierstrass, Ueber eine Gattung reell periodischer Functionen.

4. Transformation mittels der Gleichung

$$1)\qquad x = v^4 + 6Bv^2 + 4Cv + D = \varphi(v).$$

Die Discriminante von
$$\varphi(v) - x = 0$$
heisst bis auf einen constanten Factor
$$\Delta(x) = x^3 + 3px^2 + 3qx + r,$$
wobei
$$2)\quad \begin{cases} p = 6B^2 - D, \quad q = 27B^4 - 12B^2D + 18BC^2 + D^2, \\ r = -81B^4D + 54B^3C^2 + 18B^2D^2 - 54BC^2D + 27C^4 - D^3. \end{cases}$$

Führen wir $x = \varphi(v)$ in das Differential
$$dV = \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3px^2 + 3qx + r}}$$
ein, so erhalten wir
$$dV = \frac{4\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}.$$

Die Function ψ ergiebt sich am einfachsten, wenn man (vergl. Abschnitt 1) die Resultante aus
$$\varphi'(v_k) = 4(v_k^3 + 3Bv_k + C)$$
und
$$\frac{\varphi(v) - \varphi(v_k)}{(v - v_k)^2} = 3v_k^2 + 2v_kv + v^2 + 6B$$
herleitet; man findet so

$$3)\quad \psi(v) = v^6 + 12Bv^4 + 10Cv^3 + 45B^2v^2 + 54BCv + 54B^3 + 27C^2,$$

und die Transformation lautet
$$\frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3px^2 + 3qx + r}} = \frac{4\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}.$$

Beantworten wir nun die Frage: Können die Coefficienten der Gleichung
$$1)\qquad x = v^4 + 6Bv^2 + 4Cv + D$$
bestimmt werden aus den Coefficienten p, q, r ihrer Discriminante $\Delta(x)$, oder auch: Wie ermittelt man die Coefficienten der Transformationsgleichung $x = \varphi(v)$, wenn ein Differential
$$\frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3px^2 + 3qx + r}}$$
mit vorgeschriebenen Coefficienten p, q, r gegeben ist?

Wir haben hiernach die Gleichungen 2) nach B, C, D aufzulösen. — Aus der ersten dieser Gleichungen folgt
$$\alpha)\qquad D = 6B^2 - p,$$
und wird dieser Werth in die zweite eingetragen, so entsteht
$$\beta)\qquad C^2 = \frac{9B^4 - p^2 + q}{18B}, \quad B \gtrless 0.$$

Substituirt man schliesslich die Werthe aus α) und β) in die dritte der Gleichungen 2), so ergiebt sich

$\gamma)\qquad \eta^4+6(q-p^2)\eta^2+4(2p^3-3pq+r)\eta-3(q-p^2)^2=0,$

wobei zur Abkürzung $9B^2=\eta$ gesetzt wurde.

Mittels der Gleichungen $\gamma)$, $\beta)$, $\alpha)$ findet man rückwärts der Reihe nach B, C, D.

Was die Auflösung der biquadratischen Gleichung $\gamma)$ anlangt, so sei nur bemerkt, dass ihre (Euler'sche) Resolvente

$\delta)\qquad \zeta^3+3(q-p^2)\zeta^2+3(q-p^2)^2\zeta-\frac{1}{4}(2p^3-3pq+r)^2=0$

von besonders einfacher Natur ist. Letztere kann nämlich ohne Weiteres zu einem Cubus vervollständigt werden, so dass

$$\zeta=p^2-q+\sqrt[3]{\nabla},$$
$$\nabla=\tfrac{1}{4}[r^2+2(2p^3-3pq)r+4q^3-3p^2q^2].$$

Wie man sieht, ist ∇ die Discriminante von $\Delta(x)$.

Da B achtdeutig, C zweideutig ausfällt, so giebt es im vorliegenden Falle 16 Gleichungen $x=\varphi(v)$, welche zur Transformation ein und desselben Differentiales $\frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}}$ benutzt werden können.

5. Transformation mittels der Gleichung

$$1)\qquad x=v^5+5Av^3+5Bv=\varphi(v).$$

Da die Discriminante einer allgemeinen Gleichung fünften Grades bereits ein sehr complicirter Ausdruck ist, so wollen wir die Betrachtung auf eine gewisse Normalform beschränken.

Eine einfache Betrachtung lehrt, dass jede ganze Function $x=\varphi(v)$ vom n^{ten} Grade, in welcher keine geraden Potenzen von v vorkommen, eine Discriminante $\Delta(x)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade besitzt, in der keine ungeraden Potenzen von x auftreten.

Hiernach wird also die Discriminante der Gleichung 1), abgesehen von einem constanten Factor, folgende Form haben:

$$\Delta(x)=x^4+2px^2+q=(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2),$$

wo α und β noch näher zu bestimmen sind.

Transformirt man nun das Differential

$$dV=\frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}}$$

mittels der Gleichung $x=\varphi(v)$, so entsteht

$$dV=\frac{5\,(v-a)(v+a)(v-b)(v+b)\,dv}{\sqrt{[\varphi(v)-\alpha][\varphi(v)+\alpha][\varphi(v)-\beta][\varphi(v)+\beta]}},$$

wobei $\pm a$ und $\pm b$ die Wurzeln von

$$\tfrac{1}{5}\varphi'(v)=v^4+3Av^2+B=0$$

sind. — Verlangt man, dass $\varphi(v)-\alpha$ theilbar durch $(v-a)$ sei, so muss $\alpha=\varphi(a)$; da aber zufolge der Bedeutung von a auch $\varphi'(a)$ verschwindet, so wird $\varphi(v)-\alpha$ durch $(v-a)^2$ theilbar sein. Ebenso ist $\varphi(v)-\beta$ durch

$(v-b)^2$ theilbar, wenn man $\beta=\varphi(b)$ wählt. Nach diesen Bestimmungen ist endlich auch $\varphi(v)+\alpha$ durch $(v+a)^2$ und $\varphi(v)+\beta$ durch $(v+b)^2$ ganz von selbst restlos theilbar, weil $\varphi(v)=-\varphi(-v)$.

Führt man die Division, die hier ganz einfach ausfällt, wirklich durch, so erhält man

$$\frac{\varphi(v)-\alpha}{(v-a)^2}=v^3+2av^2+\tfrac{1}{3}(4a^2-5b^2)v+\tfrac{2}{3}a(a^2-5b^2)=\chi(a,b,v),$$

und daher lautet das Endresultat

$$2)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}}=\frac{5\,dv}{\sqrt{\psi(v)}},$$
$$\psi(v)=\chi(a,b,v).\chi(-a,b,v).\chi(b,a,v).\chi(-b,a,v).$$

Wie man sieht, ist ψ eine Function zwölften Grades, welche jedoch nur gerade Potenzen von v enthält. Für $v^2=w$ geht

$$\frac{5\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}\ \text{über in}\ \frac{5\,dw}{2\sqrt{w\,\psi(\sqrt{w})}}$$

und nun ist der Grad des Radicanden auf sieben herabgedrückt.

Der Vollständigkeit halber mag noch der Zusammenhang zwischen α, β und a, b aufgesucht werden.

Da $\pm a$ und $\pm b$ die Wurzeln von

$$v^4+3Av^2+B=0$$

bedeuten, so ist

$$3A=-(a^2+b^2),\quad B=a^2b^2,$$

mithin

$$\varphi(v)=v^5-\tfrac{5}{3}(a^2+b^2)v^3+5a^2b^2v,$$

und hiernach wird

$$\left.\begin{aligned}\alpha=\varphi(a)&=-\tfrac{2}{3}a^3(a^2-5b^2)\\ \beta=\varphi(b)&=-\tfrac{2}{3}b^3(b^2-5a^2)\end{aligned}\right\}.$$

Soll umgekehrt a, b durch α, β ausgedrückt werden, so setze man $\frac{a}{b}=\eta$, dann ist

$$\alpha=-\tfrac{2}{3}a^5(1-5\eta^{-2}),\quad \beta=-\tfrac{2}{3}b^5(1-5\eta^2),$$

woraus a und b folgen, sobald η ermittelt ist. Letzteres aber ergiebt sich aus

$$\frac{\alpha}{\beta}=\eta^5\frac{1-5\eta^{-2}}{1-5\eta^2}$$

oder

$$\eta^5-5\eta^3+5\gamma\eta^2-\gamma=0,\quad \gamma=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Man hat demzufolge 25 verschiedene Transformationen für das Differential $\frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}}$.

6. Transformation mittels der trinomischen Gleichung

$$1)\qquad x=v^n+av^{n-s}.$$

Man gelangt hier zu dem Resultat, dass jedes Differential der Form

$$dV=\frac{dx}{\sqrt{x^{n-s-1}(x^s+\alpha)}}$$

mittels der Gleichung 1) in

$$dV = \frac{n\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}$$

übergeführt werden kann, wo ψ eine gewisse ganze Function vom $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet.

Beispielsweise ist

$$\frac{dx}{\sqrt{x^3+27a^4}} = \frac{dv}{\sqrt{v^6+10av^3+27a^2}},$$

wenn

$$x = v^4 + 4av.$$

7. Transformation mittels gebrochener Functionen.

Allgemeine Darlegung.

Wir haben bisher nur den Fall ins Auge gefasst, wo x im Absolutgliede der Transformationsgleichung vorkam.

Es sei jetzt x ein additiver Bestandtheil des Coefficienten von v^p in einer ganzen Function n^{ten} Grades von v, so dass

1) $$x = \frac{\Phi(v)}{v^p} = \varphi(v),$$

wo

$$\Phi(v) = v^n + A_{n-1}v^{n-1} + \cdots + A_1 v + A_0.$$

Bilden wir analog wie in Abschnitt 1:

2) $$\varDelta(x) = [x - \varphi(v_1)] \ldots [x - \varphi(v_n)],$$

wobei v_1 bis v_n die endlichen Wurzeln der Gleichung $\varphi'(v) = 0$ bedeuten, so entsteht eine ganze Function n^{ten} Grades in x:

3) $$\varDelta(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

welche, abgesehen von einem constanten Factor, die Discriminante der Gleichung

$$\Phi(v) - xv^p = 0$$

vorstellt. — Setzt man $x = \varphi(v)$ in $\varDelta(x)$ ein, so erhält man

$$\varDelta\,\varphi(v) = \prod_{k=1}^{n} [\varphi(v) - \varphi(v_k)],$$

und weil $\varphi'(v_k) = 0$, so lässt sich aus diesem Product das Quadrat der Grösse

4) $$\vartheta(v) = \prod_{k=1}^{n} [v - v_k]$$

ausscheiden.

Hieraus folgt aber, das $\varDelta\,\varphi(v)$ in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\varDelta\,\varphi(v) = v^{-pn}\,\vartheta^2(v)\,\psi(v),$$

wobei ψ eine ganze Function vom Grade

$$n^2 - 2n = n(n-2)$$

bedeutet, deren höchste Potenz den Factor 1 besitzt. Offenbar ist ψ eine reducible Function, nämlich die Resultante aus

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta(v_k) \quad \text{und} \quad \dfrac{\varphi(v)-\varphi(v_k)}{(v-v_k)^2}=0 \\ \text{oder} \\ \vartheta(v_k) \quad \text{und} \quad \dfrac{v_k{}^p\,\Phi(v)-v^p\,\Phi(v_k)}{(v-v_k)^2}=0 \end{array}\right\}.$$

Die soeben entwickelte Discriminanteneigenschaft findet wiederum vortheilhafte Verwerthung bei der Transformation von hyperelliptischen Differentialen.

Führt man nämlich in

$$dV=\frac{dx}{\sqrt{\varDelta(x)}},\quad \varDelta(x)=x^n+\cdots+a_1x+a_0$$

die Substitution

$$x=\frac{\Phi(v)}{v^p},\qquad \Phi(v)=v^n+\cdots+A_1v+A_0$$

ein und berücksichtigt, dass

$$\left.\begin{array}{l} dx=\dfrac{v\,\Phi'(v)-p\,\Phi(v)}{v^{p+1}}\,dv=\dfrac{(n-p)\,\vartheta(v)}{v^{p+1}}\,dv \\ \varDelta(x)=v^{-pn}\,\vartheta^2(v)\,\psi(v) \end{array}\right\},$$

so entsteht

$$dV=\frac{(n-p)\,v^{\frac{1}{2}pn-p-1}}{\sqrt{\psi(v)}}\,dv.$$

Der Vortheil liegt wieder, wie früher, darin, dass sich eine gewisse ganze Function, hier $\vartheta(v)$, forthebt.

Bei der vorigen Entwickelung, insbesondere bei der Gradabzählung der Functionen, ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass $0<p<n$. Dies führt aber zu keiner Beschränkung, denn der Fall $p=0$ ist vordem erledigt; der Fall $p=n$ kommt auf $p=0$ zurück, wenn man in $x=\dfrac{\Phi(v)}{v^p}$ die Substitution $v=\dfrac{1}{v_1}$ macht; überhaupt bewirkt die letzte Substitution, dass an Stelle von

$$x=\frac{\Phi(v)}{v^p}\ \text{der Ausdruck}\ x=\frac{\Phi_1(v_1)}{v_1{}^{n-p}}$$

tritt, wo φ_1 eine Function n^{ten} Grades in v_1 ist, deren Coefficienten in umgekehrter Reihenfolge laufen als in φ. Es kommt daher die Transformation im Falle $p>n$ auf eine Transformation mittels

$$x=v_1{}^{p-n}\,\Phi_1(v_1)$$

hinaus, welche vom p^{ten} Grade ist, principiell aber nichts Neues darbietet.

Endlich sieht man noch, dass es mit Rücksicht auf die Substitution $v=\dfrac{1}{v_1}$ genügt, nur die Fälle

$$\left.\begin{array}{ll} p \leqq \frac{n}{2}, & \text{wenn } n \text{ eine gerade Zahl} \\ p \leqq \frac{n-1}{2}, & \text{wenn } n \text{ eine ungerade Zahl} \end{array}\right\}$$

in Ansatz zu bringen.

Bevor wir zu Anwendungen übergehen, sei bemerkt, dass man die bisherige Untersuchung noch allgemeiner führen kann, wenn man die Transformationsgleichung

$$x = \frac{\Phi(v)}{\chi(v)},$$

in welcher Φ und χ ganze Functionen sind, zu Grunde legt.

Anwendung auf specielle Fälle.

8. Transformation mittels der Gleichung

$$1) \qquad x = \frac{v^3 + 3Av^2 + 3Bv + C}{v} = \varphi(v).$$

Die Discriminante von

$$\Phi(v) - vx = 0, \quad \text{wo} \quad \Phi(v) = v^3 + 3Av^2 + 3Bv + C,$$

heisst bis auf einen numerischen Factor

$$2) \qquad \Delta(x) = x^3 + 3px^2 + 3qx + r,$$

wenn

$$3) \qquad \begin{cases} \frac{1}{3}p = \frac{1}{4}A^2 - B, \quad \frac{1}{9}q = B^2 - \frac{1}{2}A^2B - \frac{1}{2}AC, \\ \frac{1}{27}r = \frac{3}{4}A^2B^2 - B^3 + \frac{3}{2}ABC - A^3C - \frac{1}{4}C^2. \end{cases}$$

Nach der allgemeinen Darlegung des vorigen Abschnittes besteht nun folgende Differentialgleichung:

$$4) \qquad \frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}} = \frac{2 . v^{-\frac{1}{2}} dv}{\sqrt{\psi(v)}},$$

wobei $\psi(v)$ die Resultante aus

$$\alpha) \qquad \frac{\varphi(v) - \varphi(v_k)}{(v - v_k)^2} = 0$$

und

$$\beta) \qquad \vartheta(v_k) = 2v_k^3 + 3Av_k^2 - C = 0$$

ist.

Aus α) ergiebt sich

$$v_k = -\frac{v + 3A}{2},$$

welcher Werth in β) einzusetzen ist. Fügt man dem so entstehenden Ausdruck den Factor -4 bei, so hat man das gewünschte $\psi(v)$, nämlich

$$\psi(v) = v^3 + 6Av^2 + 9A^2v + 4C,$$

und die Gleichung 4) lautet demgemäss

$$5) \qquad \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 3px^2 + 3qx + r}} = \frac{2\,dv}{\sqrt{v(v^3 + 6Av^2 + 9A^2v + 4C)}}.$$

Das ist zunächst nichts Neues, sondern eine Jacobi'sche Transformation dritter Ordnung. Wir müssen also, wenn wir auf hyperelliptische Differentiale kommen wollen, von einem allgemeineren Differential, etwa

$$\frac{dx}{\sqrt{\chi(x)\,\Delta(x)}},$$

unter χ eine ganze Function verstanden, ausgehen. Die einfachste und zugleich bemerkenswertheste Annahme ist $\chi(x) = x$. Damit gelangen wir zu folgender Transformation:

$$6)\qquad \frac{dx}{\sqrt{x(x^3+3px^2+3qx+r)}} = \frac{2\,dv}{\sqrt{(v^3+3Av^2+3Bv+C)(v^3+6Av^2+9A^2v+4C)}},$$

wo A, B, C oder p, q, r beliebig gegebene Zahlen bedeuten.

Sind p, q, r gegeben, so findet man A, B, C aus den Gleichungen 3), und zwar ist

$$B = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{3}p,\quad C = -\frac{1}{A}\left(\tfrac{1}{8}A^4 + \tfrac{2}{3}(q-p^2)\right),\quad A \gtrless 0,$$

während A der biquadratischen Gleichung

$$\eta^4 + 6(q-p^2)\,\eta^2 + 4(2p^3-3pq+r)\,\eta - 3(q-p^2)^2 = 0,$$

in welcher

$$\eta = -\tfrac{3}{4}A^2,$$

zu entnehmen ist. — Diese Gleichung stimmt buchstäblich mit jener überein, auf welche wir in Abschnitt 4 kamen und über deren Auflösung wir daselbst einige Bemerkungen gemacht haben.

9. Transformation mittels der Gleichung

$$1)\qquad x = \frac{v^4+6Av^2+B}{v} = \varphi(v).$$

Bemerken wir zunächst Folgendes. Wenn die Transformationsgleichung $x = \varphi(v)$ im Zähler nur gerade, im Nenner nur ungerade Potenzen von v enthält, so kann die zugehörige Discriminante nur gerade Potenzen von x enthalten, und selbstverständlich muss dann auch $\psi(v)$ eine gerade Function sein. Letzteres ist nicht unwesentlich, denn bekanntlich bilden jene Differentiale, welche unter der Quadratwurzel ein Polynom achten Grades mit nur geraden Potenzen haben — und auf ein solches führt eben die Gleichung 1) — die einfachste Classe der Abel'schen Transcendenten.

Setzen wir also die Discriminante in der Form

$$\Delta(x) = x^4 + 2px^2 + q = (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2),$$

wo α und β noch zu bestimmen sind, voraus* und führen in

* Wir benutzen hier ein Verfahren (ähnlich wie in Abschnitt 5), welches den Vortheil darbietet, dass man zunächst nur die Form, nicht aber die Coefficienten

$$dV = \frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}}$$

$x = \varphi(v)$ ein, dann entsteht

$$dV = \frac{(3v^4 + 6Av^2 - B)\,dv}{\sqrt{(\Phi^2(v) - \alpha^2 v^2)(\Phi^2(v) - \beta^2 v^2)}},$$

wo

$$\Phi(v) = v^4 + 6Av^2 + B.$$

Sei

$$3v^4 + 6Av^2 - B = 3(v^2 - a^2)(v^2 - b^2),$$

also

$$2A = -(a^2 + b^2), \quad B = -3a^2b^2,$$

so müssen sich α und β so bestimmen lassen, dass das Differential in v abkürzbar wird durch

$$(v^2 - a^2)(v^2 - b^2).$$

Hierzu gehört aber nichts weiter, als dass

2) $$\alpha = \frac{\Phi(a)}{a}, \quad \beta = \frac{\Phi(b)}{b},$$

weil $\frac{\Phi(v)}{v}$ mit v das Vorzeichen wechselt und weil

$$\frac{d}{dv}\left[\frac{\Phi(v)}{v}\right] = \frac{3v^4 + 6Av^2 - B}{v^2}$$

sowohl für $v = \pm a$ als auch $v = \pm b$ der Voraussetzung nach verschwindet.

Mithin haben wir folgende Transformation:

3) $$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)}} = \frac{3\,dv}{\sqrt{\psi(v)}},$$

wobei

$$\psi(v) = \frac{\Phi(v) - \alpha v}{(v-a)^2} \cdot \frac{\Phi(v) + \alpha v}{(v+a)^2} \cdot \frac{\Phi(v) - \beta v}{(v-b)^2} \cdot \frac{\Phi(v) + \beta v}{(v+b)^2}.$$

Führt man die Division im ersten Factor dieses Productes durch, so entsteht

$$\frac{\Phi(v) - \alpha v}{(v-a)^2} = v^2 + 2av - 3b^2,$$

und nun ergiebt eine blosse Buchstabenvertauschung

4) $$\psi(v) = (v^2 - \lambda_1^2)(v^2 - \lambda_2^2)(v^2 - \mu_1^2)(v^2 - \mu_2^2).$$

Hierin bedeuten λ_1, λ_2 und μ_1, μ_2 die Wurzeln der Gleichungen

5) $$\lambda^2 + 2a\lambda - 3b^2 = 0, \quad \mu^2 + 2b\mu - 3a^2 = 0.$$

Schreibt man w an Stelle von v^2, dann würde das Resultat folgendermassen lauten:

---

der Discriminante $\Delta(x)$ zu kennen braucht. — Auch ergiebt sich dabei die Function $\psi(v)$ ohne beschwerliche Resultantenbildung und sie erscheint sogleich in Factoren aufgelöst. Die Berechtigung dieses Verfahrens folgt aus der allgemeinen Darlegung in Abschnitt 7.

Das Differential

$$\frac{dw}{\sqrt{w(w-\lambda_1^2)(w-\lambda_2^2)(w-\mu_1^2)(w-\mu_2^2)}}$$

kann mittels

$$\frac{w^2-3(a^2+b^2)w-3a^2b^2}{\sqrt{w}}=x$$

in das elliptische

$$\frac{\frac{2}{3}\,dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}}$$

übergeführt werden.

Bestimmen wir noch die Anzahl der hier möglichen Transformationen. Es seien α und β in

$$\varDelta(x)=(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)$$

vorgelegte Zahlen, dann ergeben sich a und b aus

$$6)\qquad \alpha=\frac{\Phi(a)}{a}=-2a(a^2+3b^2),\quad \beta=\frac{\Phi(b)}{b}=-2b(b^2+3a^2).$$

Sucht man umgekehrt a, b, so setze man

$$\frac{\alpha}{\beta}=\gamma,\quad \frac{a}{b}=\eta$$

und erhält aus 6)

$$\gamma=\eta\,\frac{\eta^2+3}{1+3\eta^2},\ \text{d. h.}\ \eta^3-3\gamma\eta^2+3\eta-\gamma=0.$$

Diese Gleichung lässt nachstehende Schreibweise zu:

$$\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right)^3,$$

und hierdurch ist ihre Auflösung unmittelbar gegeben.

Da man für η drei, für a und b je neun sich entsprechende Werthe bekommt, so ist die Anzahl der Transformationen neun.

10. Transformation mittels der trinomischen Gleichung

$$v^n-xv^p+a=0.$$

Man findet hierbei Folgendes.

Das Differential

$$dV=\frac{dx}{\sqrt{x^n+\alpha}}$$

kann mit Hilfe der Substitution

$$x=\frac{v^n+a}{v^p}$$

übergeführt werden in das Differential

$$dV=\frac{(n-p)\,v^{\frac{1}{2}pn-p-1}}{\sqrt{\psi(v)}}\,dv,$$

wobei $\psi(v)$ eine gewisse ganze Function vom $n(n-2)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, welche nach Potenzen von v^n fortschreitet.

11. Eigenschaften der bisher betrachteten hyperelliptischen Differentiale.

Die in den Abschnitten 3, 4, 5, 8 und 9 abgeleiteten hyperelliptischen Differentiale konnten stets in elliptische transformirt werden. Sie haben daher mit letzteren vornehmlich folgende Eigenschaften gemein:

1. Bildet man aus ihnen eine Euler'sche Differentialgleichung, d. h. eine Gleichung der Form
$$\frac{dv}{\sqrt{\psi(v)}}+\frac{du}{\sqrt{\psi(u)}}=0,$$
so lässt sich für diese das allgemeine Integral in Gestalt einer algebraischen Gleichung angeben.

2. Geht man zu den bestimmten Integralen über, so kann man zwei gleichartige zu einem dritten vereinigen, und es besteht dann zwischen den oberen Grenzen ein gewisser algebraischer Zusammenhang.

3. Jene Integrale lassen, ohne unbestimmt zu werden, die Umkehr zu; ihre obere Grenze wird eine algebraische Function von *sinam*, also doppeltperiodisch.

Eine andere Art der Transformation.

12. Historisches.

Es giebt noch eine andere Transformation, bei welcher ein Differential — nicht, wie bisher, auf ein, sondern auf zwei oder mehrere zurückgeführt wird. Dieselbe ist zuerst von Legendre angewendet worden.

Im XXXII. Chap. No. V des Traité des fonct. ellipt. reducirt Legendre das Integral

1) $$J=\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha+\zeta x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\zeta x^5+\alpha x^6}},$$

welches unter der Wurzel eine reciproke Function* besitzt, mittels der Substitution

2) $$x^2+1=xz \quad\text{oder}\quad \frac{1}{\sqrt{x}}=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{z+2}\pm\sqrt{z-2}\}$$

auf die Summe zweier elliptischen Integrale

3) $$J=\int\frac{Z\,dz}{\sqrt{Q.(z+2)}}+\int\frac{Z'\,dz}{\sqrt{Q.(z-2)}},$$

wo, falls P eine rationale Function in x ist, auch Z und Z' rationale Functionen in z werden und wo
$$Q=\alpha(z^3-3z)+\zeta(z^2-2)+\gamma z+\delta.$$

Später, im Troisième Supplément des Traité, ist Legendre auf einen Specialfall des Integrales 1) zurückgekommen; er betrachtet in einem Schlussparagraphen die Transcendente

---

* „Reciproke Function" ist hier natürlich so zu verstehen: Die Gleichung $\alpha+\zeta x+\gamma x^2+\cdots+\alpha x^6=0$ ist eine sogenannte reciproke.

$$4)\qquad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}}$$

und findet, dass diese immer auf die Summe zweier elliptischen Integrale der ersten Gattung, deren Amplitude dieselbe und deren Moduln Complemente von einander sind, zurückgeführt werden kann.

Offenbar ist das letzte Integral ein Sonderfall von 1), denn der Ausdruck

$$(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)$$

wird für $x=\frac{x'}{\sqrt{\varkappa}}$ zu einem reciproken.

In der Anzeige des eben erwähnten Suppléments kommt auch Jacobi auf das letzte Integral zu sprechen. In einer Nachschrift erweitert er alsdann das Legendre'sche Resultat, indem er zeigt, dass jedes der beiden Integrale

$$5)\qquad \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{x.f(x)}} \quad \text{und} \quad \int\limits_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{x.f(x)}},$$

wobei

$$f(x)=(1-x)(1-\varkappa\lambda x)(1+\varkappa x)(1+\lambda x)$$

in zwei elliptische mit derselben Amplitude, aber verschiedenen Moduln zerlegt werden kann.

Auch diese Jacobi'schen Integrale sind Specialfälle des Integrals 1), wie man leicht erkennt, wenn man

$$\text{im ersten } x=\frac{x'}{\sqrt{\varkappa\lambda}}, \text{ im zweiten } x=\frac{\sqrt{\varkappa\lambda}}{x'}$$

substituirt, wodurch $f(x)$ eine reciproke Function wird.

Betreffs der wichtigen und interessanten Bemerkungen, die Jacobi zu diesen Integralen macht, sei auf das Original verwiesen: Crelle's Journ., Bd. 8 S. 413 oder Gesammelte Werke, Bd. 1 S. 378 flgg.

13. Transformation eines hyperelliptischen Differentials in zwei niedere.

Um unsere Untersuchung sogleich zu begrenzen, sei Folgendes vorausgeschickt.

Wir wollen nur solche Differentiale

$$\frac{v^p\,dv}{\sqrt{\psi(v)}}$$

betrachten, in denen $\psi(v)$ eine reciproke Function geraden Grades bedeutet, und sie nach dem Vorgange von Legendre in die Summe zweier niederen Differentiale zu zerfällen suchen. Wir kommen aber auf das oben angeschriebene Differential, wenn wir in

$$1) \qquad dV = \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right)}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \text{wo} \quad \varphi(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$$

die Substitution

$$2) \qquad \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{x-\gamma} \pm \sqrt{x-\beta}}{\sqrt{\beta-\gamma}}, \quad \beta > \gamma$$

einführen. Diese Substitution ist der Legendre'schen nachgebildet, aber allgemeiner, insofern sie zwei Parameter β, γ enthält. Der Nenner $\sqrt{\beta-\gamma}$ ist hinzugefügt, damit die Eigenschaft

$$3) \qquad \sqrt{v} = \frac{\sqrt{x-\gamma} \mp \sqrt{x-\beta}}{\sqrt{\beta-\gamma}}$$

vorhanden ist, welche darin besteht, dass der reciproke Bruch 3) aus dem ursprünglichen 2) durch blossen Vorzeichenwechsel hervorgeht.

Beide Substitutionen nach x aufgelöst ergeben

$$4) \qquad x = \frac{\beta-\gamma}{4v}\left\{v^2 + 2\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}v + 1\right\},$$

und dieses in 1) eingesetzt, liefert

$$5) \qquad dV = \frac{-2^{n-1}\, v^{\frac{n-3}{2}}\, dv}{(\beta-\gamma)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\{v^2 + 2\delta_i v + 1\}}},$$

wobei

$$\delta_i = \frac{\beta+\gamma-2\alpha_i}{\beta-\gamma}.$$

Andererseits zerfällt 1), wenn 2) benutzt wird, in

$$6) \qquad dV = \frac{1}{2\sqrt{\beta-\gamma}}\left\{\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x).(x-\gamma)}} \pm \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x).(x-\beta)}}\right\}.$$

Es kommt also das Differential 5), welches im Nenner eine reciproke Function $2n^{\text{ten}}$ Grades besitzt, auf zwei Differentiale zurück, deren Nenner vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade sind. — Bei geradem n wird man überdies das Differential 5) noch mit $v^{1/2}$ zu erweitern haben, wenn der Zähler rational sein soll.

In dem Ausdruck für δ_i dürfen offenbar zwei der Grössen β, γ oder α_i specialisirt werden. So setzt Legendre von vornherein $\beta = 2$, $\gamma = -2$. Indessen ist es für manche Betrachtungen zweckmässiger, zwei der α_i zu specialisiren und zwar so, dass die beiden Differentiale in 6) ihre Normalform erlangen.

Schreibt man $\frac{1}{v_1}$ an Stelle von v, so geht das Differential 5) über in

$$7) \qquad dV = \frac{2^{n-1}\, v_1^{\frac{n-1}{2}}\, dv_1}{(\beta-\gamma)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\{v_1^2 + 2\delta_i v_1 + 1\}}},$$

während die Gleichung 4) ihre Gestalt nicht ändert, denn es sind eben v und v_1 die Wurzeln jener reciproken Gleichung.

Bezeichnen wir eine reciproke Function $2n^{\text{ten}}$ Grades von v mit $P_{2n}(v)$, so können wir mit Rücksicht auf 5) und 7) folgende Differentiale transformiren:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Für } n=2: & \dfrac{dv}{\sqrt{v\,P_4(v)}} & \text{und} & \dfrac{v_1\,dv_1}{\sqrt{v_1\,P_4(v_1)}} \\ \quad " \quad n=3: & \dfrac{dv}{\sqrt{P_6(v)}} & " & \dfrac{v_1\,dv_1}{\sqrt{P_6(v)}} \end{array}\right\}\ \text{Legendre'sche Integrale,}$$

$$\begin{array}{llll} \quad " \quad n=4: & \dfrac{v\,dv}{\sqrt{v\,P_8(v)}} & " & \dfrac{v_1^2\,dv_1}{\sqrt{v_1\,P_8(v_1)}}, \\ \quad " \quad n=5: & \dfrac{v\,dv}{\sqrt{P_{10}(v)}} & " & \dfrac{v_1^2\,dv_1}{\sqrt{P_{10}(v_1)}} \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

Wie man sieht, erschöpft man hiermit nicht alle Fälle, denn es fehlen jene Differentiale, welche im Nenner den 7. und 8., 11. und 12., überhaupt den $4n-1^{\text{ten}}$ und $4n^{\text{ten}}$ Grad besitzen. Dieser Mangel lässt sich jedoch beseitigen, wenn man in der vorigen Untersuchung die einzige Abänderung trifft, dass man statt des Differentials 1) das folgende:

$$8)\qquad dV=\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{\sqrt{\varphi(x)}},\quad \text{wo}\quad \varphi(x)=(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$$

als Ausgangspunkt nimmt.

Bevor man in 8) die Substitution 4) einführt, ist es zweckmässig, die Grössen β und γ zu specialisiren; man wähle etwa $\beta=1$, $\gamma=-1$ oder $\beta=1$, $\gamma=0$. Im ersten Falle ist

$$9)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{v^2+1}{2v}, \\ \dfrac{1}{v}=x\pm\sqrt{x^2-1},\quad v=x\mp\sqrt{x^2-1}, \end{cases}$$

mithin lautet die Transformation

$$10)\qquad \frac{-2^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}-2}\,dv}{\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{n}\{v^2-2\alpha_i v+1\}}}=\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\pm\frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x).(x^2-1)}},$$

und wenn v mit $\dfrac{1}{v_1}$ vertauscht wird,

$$11)\qquad \frac{2^{\frac{n}{2}}v_1^{\frac{n}{2}}\,dv_1}{\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{n}\{v_1^2-2\alpha_i v_1+1\}}}=\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}\mp\frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x).(x^2-1)}}.$$

Hier tritt also der eigenthümliche Fall ein, dass die Summe oder Differenz zweier Transcendenten verschiedener Classe übereinkommt mit einer neuen Transcendenten höherer Classe.

Addirt man die letzten Gleichungen, so entsteht

$$11)\qquad \frac{v^{\frac{n}{2}}\, d\left(v+\frac{1}{v}\right)}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n}\{v^2-2\alpha_i v+1\}}}=2^{1-\frac{n}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

wobei der Index von v_1 fortgelassen wurde, da die Substitution $x=\frac{v^2+1}{2v}$ für ein reciprokes v ungeändert bleibt. Ist $n=1$ oder $n=2$, so lässt sich $\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ elementar auswerthen, folglich sind

$$\int\frac{\left(v-\frac{1}{v}\right)dv}{\sqrt{v(v^2-2\alpha v+1)}}\ \text{und}\ \int\frac{\left(v-\frac{1}{v}\right)dv}{\sqrt{(v^2-2\alpha_1 v+1)(v^2-2\alpha_2 v+1)}}$$

pseudoelliptische Integrale.

Bezeichnet man, wie früher, durch $P_{2n}(v)$ eine reciproke Function $2n^{\text{ten}}$ Grades von v, so ist nunmehr auch die Transformation der folgenden Differentiale erledigt:

$$\begin{array}{llcl}
\text{Für } n=3: & \dfrac{dv}{\sqrt{v\,P_6(v)}} & \text{und} & \dfrac{v_1^2\,dv_1}{\sqrt{v_1\,P_6(v)}}, \\
\quad " \quad n=4: & \dfrac{dv}{\sqrt{P_8(v)}} & " & \dfrac{v_1^2\,dv_1}{\sqrt{P_8(v_1)}}, \\
\quad " \quad n=5: & \dfrac{v\,dv}{\sqrt{v\,P_{10}(v)}} & " & \dfrac{v_1^3\,dv_1}{\sqrt{v_1\,P_{10}(v)}}, \\
\quad " \quad n=6: & \dfrac{v\,dv}{\sqrt{P_{12}(v)}} & " & \dfrac{v_1^3\,dv_1}{\sqrt{P_{12}(v_1)}} \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Damit ist die früher aufgeschriebene Gruppe vervollständigt.

Ganz unbeantwortet bleibt die Frage, ob solche Differentiale, die unter der Quadratwurzel eine homogene Function ungeraden Grades besitzen, in niedere Differentiale transformirt werden können. — Im einfachsten Falle einer reciproken Function dritten Grades ist eine Vereinfachung nicht möglich, denn das Differential

$$\frac{dv}{\sqrt{(v-1)(v-\alpha)\left(v-\frac{1}{\alpha}\right)}}$$

führt, in die Normalform umgesetzt, auf ein elliptisches mit durchaus allgemeinem Modul, so dass keine weitere Reduction denkbar ist.

Anmerkung.

Die in diesem Abschnitte vorgetragene Reduction eines hyperelliptischen Differentiales auf zwei niedere Transcendenten beruht im Wesentlichen darin, dass in ein Differential

$$dZ = \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

wo

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n), \quad f(z) = \text{rat. Funct. von } z,$$

die Substitution

$$z = \sqrt{a_1 + b_1 x} + \sqrt{a_2 + b_2 x}$$

eingetragen wird, so dass

$$dZ = \frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x).(a_1+b_1x)}} + \frac{f_2(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x).(a_2+b_2x)}}$$

entsteht, wobei f_1 und f_2 wiederum rational sein werden. Andererseits löst man die Substitution nach x auf, führt den gewonnenen Ausdruck ebenfalls in das ursprüngliche Differential ein und gelangt hierdurch zu

$$dZ = \frac{f(z)\,dz}{\sqrt{\Phi(z)}}.$$

Offenbar ist die angedeutete Methode nach verschiedenen Gesichtspunkten hin erweiterungsfähig, man braucht ja nur die Substitution zu verallgemeinern, also etwa

$$z = \sqrt[m_1]{\vartheta_1}(x) + \sqrt[m_2]{\vartheta_2}(x) + \cdots$$

zu Grunde zu legen, wo die ϑ rationale Functionen von x vorstellen. — So hat, um nur Eines zu erwähnen, Jacobi auf den Nutzen der Substitution

$$2t = \sqrt{ay^2 + 2by + c} = \sqrt{ay^2 - 2by + c}$$

bei der Reduction der Abel'schen Integrale erster Ordnung in die Normalform hingewiesen. Man vergl. die Jacobi-Richelot'sche Abhandlung, Borchardt's Journal, Bd. 55 S. 1—14.

Uebrigens darf der Umstand nicht verschwiegen werden, dass die Auflösung der Substitution nach x im Allgemeinen recht verwickelte Ausdrücke in z liefert, wenn sie nicht gar unmöglich ist. Es kommt daher darauf an, die Coefficienten der Functionen ϑ so zu wählen, dass sich x als rationale Function von z ergiebt oder dass wenigstens „rat. Funct. von x = rat. Funct. von z" wird.

14. Das Legendre'sche Differential.

Unter den im letzten Abschnitte behandelten Differentialen bieten jene das meiste Interesse, welche in elliptische zerfällt werden können; das sind aber diejenigen, welche unter der Quadratwurzel eine reciproke Function sechsten Grades besitzen.

Nach unserer Darstellung würde ein solches Differential folgende Zerfällung zulassen:

$$1)\quad \frac{dv}{\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{3}\{v^2+2\delta_i v+1\}}}=-\frac{\beta-\gamma}{8}\left\{\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x).(x-\gamma)}}\pm\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x).(x-\beta)}}\right\},$$

wo

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),$$

$$\delta_i=\frac{\beta+\gamma-2\alpha_i}{\beta-\gamma},\quad i=1,2,3.$$

Wird $\frac{1}{v}$ an Stelle von v gesetzt, so entsteht hieraus

$$2)\quad \frac{v\,dv}{\sqrt{\prod\limits_{i=1}^{3}\{v^2+2\delta_i v+1\}}}=+\frac{\beta-\gamma}{8}\left\{\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x).(x-\gamma)}}\mp\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x).(x-\beta)}}\right\}.$$

In beiden Gleichungen sind x und v durch die quadratische Gleichung

$$3)\quad x=\frac{\beta-\gamma}{4v}\left\{v^2+2\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}v+1\right\}$$

verbunden und zwar so, dass für die eine Transformation die eine Wurzel v, für die andere Transformation die zweite Wurzel v_1 zu wählen ist.

Addirt oder subtrahirt man die Gleichungen 1) und 2) und geht zu den Integralen über, so erhält man

$$4)\quad \int\limits_a^v\frac{(1\pm v)\,dv}{\sqrt{\Phi(v)}}=E(x),$$

wo $\Phi(v)$ das hier vorkommende Polynom sechsten Grades und $E(x)$ ein elliptisches Integral erster Gattung bezeichnet.* — Setzt man $E(x)=u$, so kann man diese Gleichung umkehren; es lässt sich also mit Hinzuziehung der Gleichung 3) auch v als Function von u darstellen.

Schreibt man 4) folgendermassen:

$$5)\quad \int\limits_a^v\frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}}\mp\int\limits_b^{v_1}\frac{dv}{\sqrt{\Phi(v)}}=u,$$

wo v und v_1 die Wurzeln von 3) sind, dann kommt man ganz von selbst und mit Nothwendigkeit auf das so interessante Jacobi'sche Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale vom Geschlecht $p=2$, bei welchem bekanntlich die hyperelliptischen Integrale paarweise zu vereinigen und die oberen Grenzen einer quadratischen Gleichung (hier Nr. 3) mit eindeutigen Coefficienten zu entnehmen sind. — Der vorliegende Fall ist jedoch insofern

* Ist eines der $\alpha_i=\beta$, resp $=\gamma$, so wird das entsprechende $\delta_i=-1$, resp. $=+1$; das Integral 4) lässt dann aus der Wurzel $(1-v)$, resp. $(1+v)$ ausscheiden, ebenso tritt vor die Wurzel in $E(x)$ der Factor $(x-\beta)$, resp. $(x-\gamma)$. Es wird sonach $E(x)$ elementar transcendent, also das Integral auf der linken Seite von 4) pseudoelliptisch.

speciell, als die Wurzeln v und v_1 nicht unabhängig von einander sind und demzufolge ein einziges Paar von Integralen zur Umkehr hinreicht.

Endlich ist noch ersichtlich, dass Integrale der Form 4) mit den elliptischen Integralen die Eigenschaft theilen, dass bereits zwei gleichartige zu einem dritten vereinigt werden können, wenn zwischen den oberen Grenzen ein leicht zu findender algebraischer Zusammenhang besteht.

15. Ein Specialfall des Legendre'schen Differentiales.

Ein besonders bemerkenswerther Specialfall des in Abschnitt 14) betrachteten Differentiales liegt vor, wenn eine der Wurzeln α_i, etwa α_3, unendlich gross wird. Setzen wir noch, was keine Beschränkung mit sich bringt, $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 1$, so gelangen wir zu folgender Gleichung:

$$1)\quad \frac{dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}} = -\frac{\sqrt{\beta-\gamma}}{4}\left\{\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\gamma)}} \pm \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\beta)}}\right\}.$$

In den elliptischen Differentialen können wir jetzt leicht die Normalform herstellen, indem wir schreiben

$$x = \frac{1}{u^2},\quad \beta = \varkappa^2,\quad \gamma = \lambda^2.$$

Es entsteht

$$2)\quad \frac{dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}} = \frac{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}{2}\left\{\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)}} \pm \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}}\right\},$$

und ausserdem, wenn v mit $\frac{1}{v}$ vertauscht wird,

$$3)\quad \frac{v\,dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}} = -\frac{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}{2}\left\{\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\lambda^2u^2)}} \mp \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}}\right\},$$

In beiden Differentialen sind die Variabelen u und v an einander gebunden durch

$$4)\quad \frac{1}{u^2} = \frac{\varkappa^2-\lambda^2}{4v}\left\{v^2 + 2\frac{\varkappa^2+\lambda^2}{\varkappa^2-\lambda^2}v + 1\right\},$$

und $\chi(v)$ hat folgende Bedeutung:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} \chi(v) &= \left\{v^2+2\frac{\varkappa^2+\lambda^2}{\varkappa^2-\lambda^2}v+1\right\}\left\{v^2+2\frac{\varkappa'^2+\lambda'^2}{\varkappa'^2-\lambda'^2}v+1\right\} \\ &= \left(v+\frac{\varkappa+\lambda}{\varkappa-\lambda}\right)\left(v+\frac{\varkappa-\lambda}{\varkappa+\lambda}\right)\left(v+\frac{\varkappa'+\lambda'}{\varkappa'-\lambda'}\right)\left(v+\frac{\varkappa'-\lambda'}{\varkappa'+\lambda'}\right), \end{aligned}\right.$$

wobei, wie gewöhnlich,

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1,\quad \lambda^2 + \lambda'^2 = 1.$$

Die Gleichungen 2) und 3) zeigen, dass die Summe der Differenz zweier elliptischen Differentiale erster Gattung mit gleichen Amplituden, aber verschiedenen Moduln auf ein einziges hyperelliptisches Integral erster Gattung vom Geschlecht $p = 2$ zurückkommt, nämlich auf

$$\frac{v^{\pm\frac{1}{2}}\,dv}{\sqrt{\chi(v)}},$$

wo $\chi(v)$ die zuletzt aufgeschriebene reciproke Function vierten Grades bedeutet.

Addirt man die Gleichungen 2) und 3), so gelangt man zu

$$5)\qquad \frac{(1+v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}}=\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}\cdot\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2)}},$$

und diese neue Gleichung kann benutzt werden, um ein elliptisches Integral erster Gattung mit imaginärem Modul auf die Form $P+Q\sqrt{-1}$ zu bringen.

Setzt man nämlich

$$\varkappa^2=e+f\sqrt{-1},\quad \lambda^2=e-f\sqrt{-1}$$

und führt an Stelle von v eine neue Variabele mittels

$$v=w\sqrt{-1}$$

ein, so entsteht unmittelbar

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_0^u\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(e+f\sqrt{-1})u^2)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2f}}\int_0^w\frac{(1+w\sqrt{-1})\,dw}{\sqrt{w\left(1+2\frac{e}{f}w-w^2\right)\left(1+2\frac{e-1}{f}w-w^2\right)}},\end{aligned}\right.$$

wo u und v verbunden sind durch

$$7)\qquad \frac{1}{u^2}=\frac{f}{2w}\left(1+2\frac{e}{f}w-w^2\right).$$

Die Zerlegung eines elliptischen Integrales mit imaginärem Modul hat zuerst Jacobi behandelt und zwar in der früher erwähnten „Anzeige von Legendre's Fonctions etc.“, Crelle Journal, Bd. 8 S. 413 flgg. Aber der dort gegebene Ausdruck ist ausserordentlich complicirt, und das rührt, wie man sich leicht überzeugen kann, davon her, dass Jacobi seinen Entwickelungen das Integral*

$$\int_0^x\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}}$$

zu Grunde gelegt, welches im Nenner keine reciproke Function besitzt.

Um noch auf ein anderes, von Jacobi a. a. O. mitgetheiltes Resultat zu kommen, bemerken wir Folgendes.

Die Function

$$\left(1+2\frac{e}{f}w-w^2\right)\left(1+2\frac{e-1}{f}w-w^2\right)=W$$

* Also das in Abschnitt 12 unter Nr. 5 erwähnte Integral; nur ist hier λ mit $-\lambda$ vertauscht.

ist aus der reciproken Function $\chi(v)$, vergl. Nr. 4, infolge der Substitution $v = w\sqrt{-1}$ hervorgegangen, und sie hat dabei ihren reciproken Charakter verloren. Letzteren erlangt sie indessen in einem — aber nur in einem — speciellen Falle wieder, nämlich wenn $e = \frac{1}{2}$ ist.

Setzen wir der Gleichförmigkeit wegen $f = \frac{1}{2}k$, wo k eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, so lautet Gleichung 6):

$$8)\quad \int\limits_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1+k\sqrt{-1}}{2}u^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_0^w \frac{(1+w\sqrt{-1})\,dw}{\sqrt{wW}},$$

während die Function W bei passender Anordnung ihrer Factoren folgendermassen geschrieben werden kann:

$$W = (1+2\mu w + w^2)(1-2\mu w + w^2), \quad \mu = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}.$$

Nun ist aber identisch

$$\int\limits_0^w \frac{(1+w\sqrt{-1})\,dw}{\sqrt{wW}} = \frac{1+\sqrt{-1}}{2}\int\limits_0^w \frac{1+w}{\sqrt{wW}}\,dw + \frac{1-\sqrt{-1}}{2}\int\limits_0^w \frac{1-w}{\sqrt{wW}}\,dw,$$

und die letzten beiden Integrale kommen, weil W jetzt reciprok ist, unter Zuhilfenahme der Gleichungen 2) und 3) auf elliptische zurück, nämlich

$$\int\limits_0^w \frac{1+w}{\sqrt{wW}}\,dw = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-\varkappa^2 u_1^2)}}, \quad \varkappa^2 = \frac{\mu+1}{2\mu},$$

$$\int\limits_0^w \frac{1-w}{\sqrt{wW}}\,dw = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\int\limits_0^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{(1-u_1^2)(1-\lambda^2 u_1^2)}}, \quad \lambda^2 = \frac{\mu-1}{2\mu}.$$

Aus dem Zusammenhang zwischen u und w, sowie u_1 und w folgt, dass sich die Werthe $u = 1$ und $u_1 = 1$ entsprechen. Man kann daher mittels $u = \sin\varphi$, $u_1 = \sin\psi$ ohne Weiteres zu den vollständigen Integralen übergehen und findet so

$$9)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1+k\sqrt{-1}}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1+k^2}}\{(1+\sqrt{-1})F(\varkappa) + (1-\sqrt{-1})F(\lambda)\},$$

worin

$$\varkappa^2 = \frac{\sqrt{1+k^2}+k}{2\sqrt{1+k^2}}, \quad \lambda^2 = \frac{\sqrt{1+k^2}-k}{2\sqrt{1+k^2}}; \qquad \varkappa^2+\lambda^2 = 1$$

und k jedwede reelle Zahl sein darf.

16. Transformationsproblem eines hyperelliptischen Differentiales erster Gattung vom Geschlecht $p=2$.

Aus den Gleichungen 2) und 3) des vorigen Abschnittes erhält man durch Addition, resp. Subtraction die neuen Gleichungen

$$1)\qquad \frac{(1+v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}}=\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}\,\frac{du}{\sqrt{f(\varkappa,u)}},$$

$$2)\qquad \frac{(1-v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}}=\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}\,\frac{du}{\sqrt{f(\lambda,u)}},$$

in denen χ und f folgende Bedeutung haben:

$$3)\qquad \begin{cases} \chi(v)=\left(v+\dfrac{\varkappa+\lambda}{\varkappa-\lambda}\right)\left(v+\dfrac{\varkappa-\lambda}{\varkappa+\lambda}\right)\left(v+\dfrac{\varkappa'+\lambda'}{\varkappa'-\lambda'}\right)\left(v+\dfrac{\varkappa'-\lambda'}{\varkappa'+\lambda'}\right), \\ f(\varkappa,u)=(1-u)^2(1-\varkappa^2u^2). \end{cases}$$

Es genügt, nur das erste Differential zu betrachten, denn das zweite entsteht aus dem ersten buchstäblich, wenn $\varkappa$ mit λ und $+v$ mit $-v$ vertauscht wird.

Da obige reciproke* Differentiale auf elliptische zurückgeführt werden können, so steht zu erwarten, dass für sie eine allgemeine algebraische Transformation explicite geleistet werden kann.

In der That, das bestätigt sich auch; doch muss man hierbei zwei wesentlich voneinander verschiedene Fälle auseinander halten.

Es lässt sich nämlich erstens das Differential

$$\frac{(1+v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(v)}}$$

in ein anderes gleichartiges verwandeln, in welchem an Stelle des Parameters λ ein anderer μ erscheint, der von dem ersten völlig unabhängig ist. Da also λ in jedwede vorgelegte Zahl transformirbar ist, so wollen wir diesen Parameter einen transitiven nennen.

Es lässt sich zweitens das Differential durch eine Jacobi-Abel'sche Transformation in ein anderes gleichartiges umsetzen, in welchem an Stelle des Parameters $\varkappa$ ein anderer $\varkappa_1$ erscheint, der aber von $\varkappa$ nicht unabhängig ist, sondern mit jenem durch eine Modulargleichung verbunden ist. Wir wollen $\varkappa$ im Gegensatz zu λ einen intransitiven Parameter nennen.

Die zuerst erwähnte Transformation ist ausserordentlich einfach. Vertauscht man nämlich in der Differentialgleichung

* Es ist wohl nach dem Früheren nicht misszuverstehen, dass sich hier „reciprok" auf die Function $\chi(v)$ beziehen soll.

$$1)\qquad \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}\,\frac{(1+v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(\varkappa,\lambda,v)}}=\frac{du}{\sqrt{f(\varkappa,u)}},$$

wo

$$\frac{1}{u^2}=\frac{\varkappa^2-\lambda^2}{4v}\left\{v^2+2\frac{\varkappa^2+\lambda^2}{\varkappa^2-\lambda^2}v+1\right\},$$

den Buchstaben λ mit μ, und v mit w, so bleibt das Differential auf der rechten Seite ungeändert, folglich ist

$$4)\qquad \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}\,\frac{(1+v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(\varkappa,\lambda,v)}}=\frac{1}{\sqrt{\varkappa^2-\mu^2}}\,\frac{(1+w)\,dw}{\sqrt{w\,\chi(\varkappa,\mu,w)}},$$

und die Transformationsgleichung hierzu lautet

$$5)\qquad \frac{\varkappa^2-\lambda^2}{v}\left\{v^2+2\frac{\varkappa^2+\lambda^2}{\varkappa^2-\lambda^2}v+1\right\}=\frac{\varkappa^2-\mu^2}{w}\left\{w^2+2\frac{\varkappa^2+\mu^2}{\varkappa^2-\mu^2}w+1\right\}.$$

Diese Ausdrücke gelten auch für $\mu=0$, und in diesem Falle reducirt sich das Differential der rechten Seite in 4) wieder auf ein elliptisches.

Was nun zweitens die Transformation des intransitiven Parameters $\varkappa$ in einen andern $\varkappa_1$ anlangt, so führe man in die rechte Seite der Gleichung 1), also in

$$\frac{du}{\sqrt{f(\varkappa,u)}},\quad \text{wo}\quad f(\varkappa,u)=(1-u^2)(1-\varkappa^2u^2),$$

die bekannte Jacobi'sche Substitution n^{ter} Ordnung

$$u=\frac{U}{V},\quad \text{wo } U \text{ und } V \text{ gewisse ganze Functionen von } t \text{ bedeuten,}$$

ein und erhält

$$\frac{du}{\sqrt{f(\varkappa,u)}}=\frac{dt}{M\sqrt{f(\varrho,t)}},$$

wobei $\varkappa$ und ϱ durch eine Modulargleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(\varkappa,\varrho)=0$ verbunden sind und M den Multiplicator bezeichnet.

Andererseits führe man in das bezüglich seines Moduls noch nicht näher bestimmte Differential

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(\varkappa_1,u_1)}}$$

eine Jacobi'sche Substitution m^{ter} Ordnung $u_1=\frac{U_1}{V_1}$, U_1 und V_1 Functionen von t, ein und erhält

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(\varkappa_1,u_1)}}=\frac{dt}{M_1\sqrt{f(\varrho_1,t)}},$$

wobei $\varkappa_1$ und ϱ_1 durch eine Modulargleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\psi(\varkappa_1,\varrho_1)=0$ verbunden sind.

Setzt man jetzt $\varrho_1=\varrho$, so folgt durch Vergleichung der aufgeschriebenen Differentiale

6) $$\frac{du}{\sqrt{f(\varkappa, u)}} = \frac{M_1}{M} \frac{du_1}{\sqrt{f(\varkappa_1, u_1)}}.$$

Der Zusammenhang zwischen u und u_1 ist durch eine Parameterdarstellung

7) $$u = \frac{U}{V}, \quad u_1 = \frac{U_1}{V_1}$$

gegeben, und die zu 6) gehörige Modulargleichung wird gefunden, wenn man aus

8) $$\varphi(\varkappa, \varrho) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(\varkappa_1, \varrho) = 0$$

die Grösse ϱ eliminirt.

Verwandelt man schliesslich das elliptische Differential

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(\varkappa_1, u_1)}}$$

mittels der Substitution

9) $$\frac{1}{u_1^2} = \frac{\varkappa_1^2 - \lambda^2}{4w} \left\{ w^2 + 2\frac{\varkappa_1^2 + \lambda^2}{\varkappa_1^2 - \lambda^2} w + 1 \right\}$$

in ein hyperelliptisches der in Rede stehenden Form, so gelangt man mit Rücksicht auf 1) und 6) zu der Differentialgleichung

10) $$\frac{M}{\sqrt{\varkappa^2 - \lambda^2}} \frac{(1+v)\,dv}{\sqrt{v\,\chi(\varkappa, \lambda, v)}} = \frac{M_1}{\sqrt{\varkappa_1^2 - \lambda^2}} \frac{(1+w)\,dw}{\sqrt{w\,\chi(\varkappa_1, \lambda, w)}}.$$

Hiermit ist das Transformationsproblem für das vorgelegte hyperelliptische Differential in der allgemeinsten Weise erledigt.

Dresden, August 1887.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber einige Ungleichungen.

1. Den Hauptgegenstand der nachstehenden Untersuchung bildet der Quotient

$$\frac{a_1^{k+\delta}+a_2^{k+\delta}+\cdots+a_n^{k+\delta}}{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k},$$

wobei die n Grössen a als positiv vorausgesetzt werden, während der Exponent k beliebig, sein Increment δ aber wieder positiv ist.

Es gilt nun zunächst der Satz, dass jener Quotient mit wachsendem k gleichfalls wächst.

Schreiben wir der Kürze wegen

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k=A^{(k)},$$

so ist also zu zeigen, dass

$$1)\qquad \frac{A^{(k+\delta)}}{A^{(k)}}<\frac{A^{(k+\delta+\varepsilon)}}{A^{(k+\varepsilon)}}\qquad (k \text{ beliebig}; \ \delta,\ \varepsilon \text{ positiv})$$

oder dass $A^{(k)}A^{(k+\delta+\varepsilon)}-A^{(k+\delta)}A^{(k+\varepsilon)}>0$ ist. Dieser Ausdruck lässt sich aber auf die Form

$$\begin{aligned}
&a_1^k a_2^k(a_1^\delta-a_2^\delta)(a_1^\varepsilon-a_2^\varepsilon)\\
&+a_1^k a_3^k(a_1^\delta-a_3^\delta)(a_1^\varepsilon-a_3^\varepsilon)+\cdots+a_1^k a_n^k(a_1^\delta-a_n^\delta)(a_1^\varepsilon-a_n^\varepsilon)\\
&+a_2^k a_3^k(a_2^\delta-a_3^\delta)(a_2^\varepsilon-a_3^\varepsilon)+\cdots+a_2^k a_n^k(a_2^\delta-a_n^\delta)(a_2^\varepsilon-a_n^\varepsilon)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_{n-1}^k a_n^k(a_{n-1}^\delta-a_n^\delta)(a_{n-1}^\varepsilon-a_n^\varepsilon)
\end{aligned}$$

bringen, wie man sich etwa durch den Schluss von n auf $n+1$ überzeugen kann, und hier ist offenbar jedes Glied positiv.

Als unmittelbare Folgerung aus 1) erhalten wir für $\delta=1$, $k=0$, wenn wir noch k statt ε schreiben,

$$2)\qquad \frac{A^{(-k+1)}}{A^{(-k)}}<\frac{A^{(1)}}{n}<\frac{A^{(k+1)}}{A^{(k)}}\qquad (k \text{ positiv}).$$

Auch ohne Benutzung von Formel 1) ergiebt sich dies daraus, dass

$$nA^{(k+1)}-A^{(1)}.A^{(k)}=(a_1^k-a_2^k)(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}^k-a_n^k)(a_{n-1}-a_n)$$

mit k gleichzeitig positiv und negativ ist.

Der Sonderfall

$$\frac{A^{(0)}}{A^{(-1)}}<\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}}$$

oder

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)>n^2$$

ist gleichbedeutend mit dem bekannten Satze, dass das arithmetische Mittel grösser ist, als das harmonische.

Eine zweite Folgerung aus 1) lässt sich daran knüpfen, dass, wenn $f(k)=\frac{A^{(k+\delta)}}{A^{(k)}}$ mit k wächst, die Ableitung $f'(k)$ positiv sein muss. Dies liefert den Satz:

3) Der Quotient $\dfrac{a_1^k\, ln\, a_1+\cdots+a_n^k\, ln\, a_n}{a_1^k+\cdots+a_n^k}$ wächst mit k,

wovon übrigens im Weiteren kein Gebrauch gemacht wird.

2. Ist q eine positive ganze Zahl, so ist nach 1)

$$\frac{A^{(q+1)}}{A^{(q)}}>\frac{A^{(q)}}{A^{(q-1)}},\quad \frac{A^{(q+1)}}{A^{(q)}}>\frac{A^{(q-1)}}{A^{(q-2)}},\quad \ldots,\quad \frac{A^{(q+1)}}{A^{(q)}}>\frac{A^{(2)}}{A^{(1)}},\quad \frac{A^{(q+1)}}{A^{(q)}}>\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}},$$

also durch Multiplication dieser q Ungleichungen:

$$\left[\frac{A^{(q+1)}}{A^{(q)}}\right]^q>\frac{A^{(q}}{n}.$$

Multipliciren wir beiderseits mit $\left[\frac{A^{(q)}}{n}\right]^q$ und potenziren wir mit $\frac{1}{q(q+1)}$, so ergiebt sich

4) $$\left[\frac{A^{(q)}}{n}\right]^{\frac{1}{q}}<\left[\frac{A^{(q+1)}}{n}\right]^{\frac{1}{q+1}}\qquad (q=1,2,3,\ldots),$$

ein Satz, den bereits Herr Schlömilch gegeben hat.* Seine Herleitung ist eine ähnliche und stützt sich auf die Formel

$$\frac{A^{(q)}}{A^{(q-1)}}<\frac{A^{(q+1)}}{A^{(q)}},$$

die ein Sonderfall von 1) ist.

Ist auch p eine ganze Zahl und grösser als q, so folgt aus 4) offenbar

5) $$\left[\frac{A^{(p)}}{n}\right]^{\frac{1}{p}}>\left[\frac{A^{(q)}}{n}\right]^{\frac{1}{q}}$$

und, wenn wir $a^{\frac{1}{p}}$ statt a setzen, was erlaubt ist, wenn wir unter $a^{\frac{1}{p}}$ den reellen positiven Werth der Wurzel verstehen,

6) $$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{\frac{q}{p}}>\frac{A^{\left(\frac{q}{p}\right)}}{n}\qquad \left(0<\frac{q}{p}<1\right).$$

Setzen wir dagegen in 5) $a^{\frac{1}{q}}$ statt a, so kommt

7) $$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{\frac{p}{q}}<\frac{A^{\left(\frac{p}{q}\right)}}{n}\qquad \left(\frac{p}{q}>1\right)$$

und insbesondere für $q=1$

* „Ueber Mittelgrössen verschiedener Ordnungen“, Zeitschr. f. Math. u. Phys. III (1858), S. 301 flgg.

$$7a)\qquad \left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^p < \frac{A^{(p)}}{n} \qquad (p=2,3,4,\ldots).$$

Auf der linken Seite der Formeln 6), 7) und 7a) ist überall das arithmetische Mittel der n Zahlen a zu einer gewissen Potenz erhoben; auf der rechten Seite dagegen wird das arithmetische Mittel genommen, nachdem die Zahlen a zu jener Potenz erhoben sind. Man sieht, dass die erste Operation ein grösseres Resultat ergiebt als die zweite, wenn der Exponent ein positiver echter Bruch ist, aber ein kleineres, wenn der Exponent die Einheit übersteigt.

Für $p=2$ findet sich Formel 7a) schon bei Cauchy*, für beliebige ganzzahlige Exponenten und deren reciproke Werthe sind die Formeln 6) und 7) ferner in der angeführten Arbeit von Schlömilch enthalten, da sie sich ohne Weiteres aus dem Satze ergeben:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} < \cdots < \left[\frac{A^{(1/3)}}{n}\right]^3 < \left[\frac{A^{(1/2)}}{n}\right]^2 < \frac{A^{(1)}}{n} < \left[\frac{A^{(2)}}{n}\right]^{1/2} < \left[\frac{A^{(3)}}{n}\right]^{1/3} < \cdots < a_\nu,$$

wo a_ν die grösste der Zahlen a bezeichnet.

Die Formeln 6) und 7) gelten für jeden positiven rationalen Werthe des Exponenten. Wir wollen nun den Sachverhalt noch für negative und für irrationale Exponenten feststellen.

3. Da nach 1) oder 2) $\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}}$ grösser ist als jeder der Quotienten $\frac{A^{(0)}}{A^{(-1)}}, \frac{A^{(-1)}}{A^{(-2)}}, \ldots, \frac{A^{(-p+1)}}{A^{(-p)}}$, so folgt durch Multiplication $\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^p > \frac{n}{A^{(-p)}}$ oder

$$8)\qquad \left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{-p} < \frac{A^{(-p)}}{n},$$

so dass also 7a) auch für negative ganzzahlige p gilt. Setzen wir ferner in 7a) $a^{\frac{1}{p}}$ statt a und potenziren wir mit $-\frac{t}{p}$, wo t eine beliebige positive ganze Zahl ist, gleichgiltig, ob grösser oder kleiner als p, so kommt

$$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{-\frac{t}{p}} < \left[\frac{A^{\left(\frac{1}{p}\right)}}{n}\right]^{-t},$$

und wenn wir hier auf die rechte Seite Formel 8) anwenden, in der wir $a^{\frac{1}{p}}$ statt a gesetzt denken, folgt

$$9)\qquad \left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{-\frac{t}{p}} < \frac{A^{\left(-\frac{t}{p}\right)}}{n}.$$

Ist der Exponent negativ, so macht es also keinen Unterschied, ob er grösser oder kleiner als -1 ist; es gilt dann stets Formel 7).

4. Dass die gefundenen Formeln auch noch für irrationale Exponenten Giltigkeit behalten, zeigt folgende Betrachtung.

* Algebr. Analysis, Note 2. Lehrsatz 15.

Jede irrationale Zahl z kann mit beliebigem Grade der Genauigkeit durch eine rationale ersetzt werden. Sei also $z = p + \delta$, wo p rational und δ positiv, aber beliebig klein ist, so ist zu zeigen, dass

$$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{p+\delta} < \frac{A^{(p+\delta)}}{n},$$

wenn wir zunächst echt gebrochene positive p ausschliessen. Nach dem für rationale p bewiesenen Satze muss nun $\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^p$ um eine ganz bestimmte endliche Grösse kleiner sein als $\frac{A^{(p)}}{n}$, so dass sich zwischen beide noch eine dritte Grösse G einschalten lässt, die sich von beiden Grenzen um Endliches unterscheidet. Wir haben nun zu zeigen, dass durch passende Wahl von δ

$$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{p+\delta} < G \quad \text{und} \quad \frac{A^{(p+\delta)}}{n} > G$$

gemacht werden kann.

Da $G > \left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^p$ vorausgesetzt ist, so lässt es sich auf die Form $\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{p+h}$ gebracht denken, wo h eine positive endliche Grösse sein wird. Man braucht dann nur δ kleiner als h anzunehmen, um der ersten der beiden obigen Bedingungen zu genügen.

Andererseits ist $G < \frac{A^{(p)}}{n}$, kann also gleich $\vartheta \cdot \frac{A^{(p)}}{n}$ gesetzt werden, wo ϑ ein positiver echter Bruch ist. Beachten wir nun, dass

$$\frac{A^{(p+\delta)}}{n} = \frac{a_1^p\, a_1^\delta + \cdots + a_n^p\, a_n^\delta}{n} = \frac{A^{(p)}}{n} \cdot M$$

ist, wo M einen Mittelwerth der Grössen $a_1^\delta, a_2^\delta, \ldots, a_n^\delta$ bedeutet, so kommt es zur Erfüllung der zweiten Bedingung darauf an, δ so zu wählen, dass $M > \vartheta$ wird. Da nun durch Verkleinerung von δ jede der Grössen a^δ der 1 beliebig nahe gebracht werden kann, so lässt sich auch jeder Mittelwerth derselben der 1 beliebig weit nähern, so dass jeder feste echte Bruch ϑ überschritten wird.

Für jede der beiden Bedingungen ergiebt sich so ein gewisser Werth von δ. Der kleinere derselben wird dann beide Bedingungen gleichzeitig befriedigen.

Stellt man eine ähnliche Betrachtung für den Fall an, dass p ein positiver echter Bruch ist, dass also Formel 6) gilt, so erhält man die Bedingungen

$$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{p+\delta} > G \quad \text{und} \quad G > \frac{A^{(p+\delta)}}{n},$$

deren erste verlangt, dass

$$\left[\frac{A^{(1)}}{n}\right]^{\delta} > \vartheta,$$

während die zweite auf

$$M < \frac{1}{\vartheta'}$$

hinauskommt, wo ϑ und ϑ' feste echte Brüche sind, M denselben Mittelwerth wie vorher bedeutet. Beiden Forderungen lässt sich aber durch Verkleinerung von δ genügen.

5. Als Gesammtergebniss können wir mithin den Satz aufstellen:

Ist p irgend eine, rationale oder irrationale, reelle Zahl, so ist die p^{te} Potenz des arithmetischen Mittels von n positiven Zahlen grösser als das arithmetische Mittel aus den p^{ten} Potenzen der n Zahlen, falls p zwischen 0 und 1 liegt; aber kleiner als dasselbe für jedes andere, positive oder negative p.

In Zeichen:

$$10)\quad \begin{aligned} \left[\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right]^p &> \frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n} \qquad (0<p<1),\\ \left[\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right]^p &< \frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n} \;\cdot \qquad (p<0,\ p>1). \end{aligned}$$

Da jetzt p nicht mehr auf rationale Werthe beschränkt ist, können wir im ersten Theile von 10) $p=\frac{k}{k+\delta}$ setzen, wo k und δ ganz beliebige positive Grössen sind; schreiben wir dann noch $a^{k+\delta}$ für a und potenziren wir mit $\frac{1}{k}$, so erhalten wir

$$\left[\frac{A^{(k+\delta)}}{n}\right]^{\frac{1}{k+\delta}} > \left[\frac{A^{(k)}}{n}\right]^{\frac{1}{k}}$$

als Verallgemeinerung von 5), wo p und q ganze Zahlen bedeuteten. Setzen wir aber in dieselbe Formel $p=\frac{-(k-\delta)}{-k}$, schreiben a^{-k} für a und potenziren mit $-\frac{1}{k-\delta}$, so kommt

$$\left[\frac{A^{(-k)}}{n}\right]^{\frac{1}{-k}} < \left[\frac{A^{(-k+\delta)}}{n}\right]^{\frac{1}{-k+\delta}}.$$

Wir erhalten demnach den

Zusatz 1. Für positive und negative k steigt die Function

$$\left[\frac{a_1^k+\cdots+a_n^k}{n}\right]^{\frac{1}{k}}$$

mit wachsendem k.

Ebenso ergiebt der zweite Theil von 10) den

Zusatz 2. Für positive und negative k fällt die Function

$$\left[\frac{a_1^{\frac{1}{k}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{k}}}{n}\right]^k$$

mit wachsendem k.

Da das arithmetische Mittel das geometrische stets übertrifft, so bleibt $\left[\frac{A^{\left(\frac{1}{k}\right)}}{n}\right]^k$ für jedes k grösser als $\left[\sqrt[n]{a_1^{\frac{1}{k}}\,a_2^{\frac{1}{k}}\ldots a_n^{\frac{1}{k}}}\right]^k$, d. h. als das geometrische Mittel der n Zahlen a, nähert sich aber, wie Herr Schlömilch a. a. O. gezeigt hat, diesem Grenzwerthe für $k=\infty$. Die Grenze der Function $\left[\frac{A^{(k)}}{n}\right]^{\frac{1}{k}}$ für unendlich wachsendes k ist dagegen nach Schlömilch die grösste der Zahlen a. (Vergl. die am Ende des Abschnitts 2 angeführte Reihe von Ungleichungen.)

Nachwort. Herr Geh. Rath Schlömilch macht mich darauf aufmerksam, dass sich bereits im Jahre 1840 Herr Bienaymé mit dem Ausdruck

$$\left(\frac{c_1 a_1^m + c_2 a_2^m + \cdots + c_n a_n^m}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

beschäftigt hat. In der That hat derselbe in der Sitzung der Société philomatique de Paris vom 13. Juni 1840 den Satz ausgesprochen, dass die obige Function gleichzeitig mit m wächst und abnimmt.* Doch konnte ich nicht ermitteln, ob Bienaymé eine Herleitung seines Satzes jemals veröffentlicht hat.

Berlin, Juli 1887. HEINRICH SIMON.

II. Ueber die Differentialgleichung

$$1)\qquad \frac{dx}{x^2-1}=\frac{n\,dy}{y^2-1}.$$

Um die Integration der letzten Gleichung ohne Herbeiziehung von Transcendenten zu vollziehen, substituire man

$$2)\qquad x=\frac{ct^n+1}{ct^n-1},\quad y=\frac{t+1}{t-1},\quad c=const.;$$

alsdann geht sowohl das Differential in x, als auch das in y über in ein und dasselbe Differential, nämlich

$$-\frac{n}{2}\,\frac{dt}{t}.$$

Die Gleichungen 2) liefern mithin das vollständige Integral der Gleichung 1) in Parameterdarstellung; sie ergeben nach Elimination von t

$$3)\qquad (x+1)(y-1)^n-c(x-1)(y+1)^n=0.$$

Wählt man $c=1$, wodurch übrigens die folgenden Betrachtungen nicht specieller werden, so erhält man

* S. L'Institut, Journal général des sociétés et travaux scientifiques. I. Section, Tome VIII, Paris 1840, S. 216. Auch: Société phil. de Paris, Extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1840, Paris 1841, S. 67.

4) $$y^n - n_1 x y^{n-1} + n_2 y^{n-2} - n_3 x y^{n-3} + \dots = 0, \quad n_k = \binom{n}{k},$$
und diese Gleichung ist dadurch ausgezeichnet, dass sie in der einfachsten Weise **algebraisch aufgelöst** werden kann. Es folgt nämlich aus 2)
$$t = \sqrt[n]{\frac{x+1}{x-1}},$$
mithin
5) $$y = \frac{\sqrt[n]{x+1} + \sqrt[n]{x-1}}{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x-1}}.$$
Sind x und y rein imaginär,
$$x = x_1\sqrt{-1}, \quad y = y_1\sqrt{-1},$$
so behält die Gleichung 4), auch wenn sie in x_1 und y_1 geschrieben wird, durchweg reelle Coefficienten; ihre Lösung 5) aber führt auf einen *casus irreducibilis*.

Letzterer erledigt sich, wenn man auf die Differentialgleichung 1) zurückgeht, welche jetzt lautet:
1a) $$\frac{dx_1}{x_1^2+1} = \frac{n\,dy_1}{y_1^2+1}.$$
Sie giebt integrirt
$$c_1 + arctg\, x_1 = n\, arctg\, y_1, \quad c_1 = const.,$$
und setzt man
$$arctg\, x_1 = \varphi,$$
so ist
5a) $$x_1 = tg\,\varphi, \quad y_1 = tg\,\frac{c_1+\varphi}{n}$$
die gewünschte Lösung.

Die Constante c_1 hat, falls n ungerade ist, die Werthe
$$c_1 = m\pi, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$
Ist n eine gerade Zahl, so tritt von Anfang an eine wesentliche Vereinfachung insofern ein, als dann die in Rede stehende Gleichung eine reciproke ist.

Anwendungen.

I. Auflösung der cubischen Gleichung
6) $$z^3 - Az^2 + Bz - C = 0.$$
Die allgemeine cubische Gleichung 6) lässt sich durch eine lineare Substitution
$$z = \alpha y + \beta$$
auf die Form
$$y^3 - 3xy^2 + 3y - x = 0$$
bringen und zwar ist
$$A - 3\beta = 3\alpha x, \quad 3\beta^2 - 2A\beta + B = 3\alpha^2, \quad \beta^3 - A\beta^2 + B\beta - C = -\alpha^3 x.$$
Hieraus findet man leicht
7) $$\beta = \tfrac{1}{2}\,\frac{AB-9C}{A^2-3B}, \quad \alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}(3\beta^2 - 2A\beta + B)}, \quad x = \frac{A-3\beta}{3\alpha},$$
welche Werthe nun nur in
8) $$z = \alpha y + \beta, \quad y = \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}$$
einzusetzen sind.

Die Grösse α kann rein imaginär ausfallen und mit ihr x. Dann liegt eben der *casus irreducibilis* vor, welcher in der schon angedeuteten Weise mittels der Tangentenfunction erledigt werden kann.

Nach Matthiessen's Angabe hat zuerst Stoll die Auflösung der cubischen Gleichung mittels der Formel für $tg\,3\varphi$ bewerkstelligt.

Uns kam es an dieser Stelle darauf an, zu zeigen, wie man auf dem Wege der Integration algebraische Gleichungen zu lösen vermag.

II. Auswerthung des Integrales

9) $$J=\int\frac{dy}{(y+1)\sqrt[n]{Y}},$$

wo

10) $$Y=y^n-n_1xy^{n-1}+n_2y^{n-2}-n_3xy^{n-3}+\cdots,\quad x=\text{const. Zahl}.$$

In den einfachen algebraischen Eigenschaften, welche der Ausdruck 10) besitzt, liegt es begründet, dass sich gewisse Integrale, welche diesen Ausdruck irrational enthalten, sehr einfach durch Logarithmen und Kreisbögen auswerthen lassen. — Um nur einen Fall zu erwähnen, sei das Integral 9) vorgelegt.

Beachtet man, dass

$$2Y=(x+1)(y-1)^n-(x-1)(y+1)^n,$$

so lässt sich das Integral J folgendermassen schreiben:

$$J=\int\frac{\sqrt[n]{2}\,dy}{(y^2-1)\sqrt[n]{(x+1)-(x-1)\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^n}},$$

und setzt man dem Früheren gemäss

$$y=\frac{t+1}{t-1},\quad \frac{y+1}{y-1}=t,\quad \frac{dy}{y^2-1}=-\tfrac{1}{2}\frac{dt}{t},$$

so entsteht

$$J=-\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt[n]{(x+1)-(x-1)t^n}}.$$

Dieses Integral ist aber von sehr einfacher Natur, denn für

$$(x+1)-(x-1)t^n=v^n$$

geht es in das rationale Integral

11) $$J=\frac{\sqrt[n]{2}}{2}\int\frac{v^{n-2}\,dv}{(x+1)-v^n}$$

über, und nun hat die weitere Rechnung keine Schwierigkeit mehr.

Nach diesen Angaben kann auch leicht das folgende Integral:

12) $$J_1=\int\frac{dz}{(z+\gamma)\sqrt[3]{z^3-Az^2+Bz-C}},$$

in welchem A, B, C beliebige vorgeschriebene Constanten bedeuten, γ aber in bestimmter Weise von jenen abhängt, mittels Elementar-Transcendenten gelöst werden. Denn substituirt man hier

* Vergl. dessen Grundzüge der Algebra etc., § 348.

$$z = \alpha y + \beta,$$

so kann man über α und β so verfügen, dass das Integral übergeht in

$$J_1 = \int \frac{dy}{(\alpha y + \beta + \gamma)\sqrt[3]{y^3 - 3xy^2 + 3y - x}}.$$

Wenn nun

$$\alpha = \beta + \gamma, \text{ also } \alpha y + \beta + \gamma = \alpha(y+1),$$

so liegt ein specieller Fall des Integrales Nr. 9 vor, und hiermit sind alle weiteren Schritte der Rechnung vorgeschrieben.

Die Bedingung $\alpha = \beta + \gamma$ lautet in den ursprünglichen Coefficienten des Integrales 12), unter Benutzung der Ausdrücke unter Nr. 7:

$$13)\qquad (A^2 - 3B)\gamma^2 + (AB - 9C)\gamma + (B^2 - 3AC) = 0.$$

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass ein merkwürdiges, zuerst von Legendre behandeltes Integral, nämlich das folgende:

$$J_2 = \int \frac{w\,dw}{(1 - w^3)\sqrt{4w^3 - 1}},$$

in zwei Integrale der Form 9) zerlegt und so gelöst werden kann.

Schafft man in J_2 die Quadratwurzel durch die Substitution

$$\frac{1}{\sqrt{4w^3 - 1}} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

fort, so entsteht

$$J_2 = \frac{2\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} \int \frac{y\,dy}{(1 - y^2)\sqrt[3]{y^3 + 3y}},$$

und das ist zerlegbar in

$$J_2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} \left[\int \frac{dy}{(1-y)\sqrt[3]{y^3 + 3y}} - \int \frac{dy}{(1+y)\sqrt[3]{y^3 + 3y}} \right].$$

Bezeichnet man das zweite dieser Integrale, welches ein sehr einfacher Specialfall von 9) ist, mit $\varphi(y)$, so kommt dem ersten das Symbol $\varphi(-y)$ zu; man hat also

$$J_2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\sqrt{3}} [\varphi(-y) - \varphi(y)].$$

Indem man nun $\varphi(y)$ nach Vorschrift der Note II ermittelt, gelangt man nach einigen kleinen Zwischenrechnungen zu folgendem Resultat: Es ist

$$14)\qquad \int \frac{w\,dw}{(1 - w^3)\sqrt{4w^3 - 1}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{1 - u^3} + const.,$$

wobei

$$u_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4w^3 - 1}}{2w\sqrt{3}}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{4w^3 - 1}}{2w\sqrt{3}}.$$

* Vergl. Legendre's Traité des fonctions elliptiques, Chap. XXVI, No. 140.

WOLDEMAR HEYMANN.

V.

Verschiedene Darstellungen der Resultante zweier binären Formen.

Von

Leopold Schendel.

(Schluss.)

---

5. Die algebraisch-symmetrische Determinante

$$\left((r; n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\right)^{n_1} \overline{\varepsilon_1^{n_1-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}^{\,2},$$

welche die Resultante $(a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_1}{2}} (a_1^{n_1}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_1-n_2}$ darstellt, ist die Resultante der n_1 Formen, welche, durch die Grösse $p_1^{n_1-1}$ linear verbunden, in der Form

$$(r; n_1)\, a_1^{n_1}\, a_2^{n_2}\, \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\;\; p^{n_1-1}\, p_1^{n_1-1}$$

enthalten sind.

Wir bezeichnen das combinatorische Product $p_1 p_2$ zum Unterschiede von dem algebraischen Producte in Rücksicht darauf, dass die algebraische multiplicative Verbindung desselben mit dem combinatorischen Producte $a_1 a_2$ die Determinante $a_1 a_2 | p_1 p_2$ erzeugt, auch durch $| p_1 p_2$ oder $p_1 p_2 |$ und bemerken, dass die Grösse

$$(r; n)\,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\;\; p_1^{n-1} p_2^{n-1}$$

durch Multiplication mit der Grösse $p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1 \varepsilon_2$ in das combinatorische Product $p_1^n p_2^n$ übergeht. Sie ist sowohl in der Form

$$(r; n)\,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, p_1^{n-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, p_2^{n-1},$$

als auch in der Form

$$(r; n)\,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, p_2^{n-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, p_1^{n-1}$$

darstellbar. Ihre Verwandlung durch jene Multiplication in das combinatorische Product $p_1^n p_2^n$ erfolgt hier für die erste Form und ist alsdann augenscheinlich auch für die zweite Form nachgewiesen.

Die Grösse p^n ist, wenn sie mit der Grösse a^n durch algebraische Multiplication verbunden wird, in der Form

$$p^n = (\varkappa; n+1)\, p^n\, \varepsilon_1^{n+1-\varkappa}\, \varepsilon_2^{\varkappa-1} \,.\, \overline{\varepsilon_1^{n+1-\varkappa}\, \varepsilon_2^{\varkappa-1}}$$

darstellbar.

Die Grösse

$$(r; n)\,|\, \varepsilon_1^{-r}\, \varepsilon_2^{r-1}\, p_1^{n-1}\, \varepsilon_1^{r-1}\, \varepsilon_2^{-r}\, p_2^{n-1}$$

setzt sich daher aus Gliedern zusammen, die aus dem Ausdrucke

$$\overline{\varepsilon_1^{n-\varkappa_1+r}\,\varepsilon_2^{\varkappa_1-r}}\;\overline{\varepsilon_1^{n-\varkappa_2-r+1}\,\varepsilon_2^{\varkappa_2+r-1}}\,.\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-\varkappa_1}\,\varepsilon_2^{\varkappa_1-1}\,p_2^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-\varkappa_2}\,\varepsilon_2^{\varkappa_2-1}$$

für

$$r=1,\,..,\,n;\quad \varkappa_1=r,\,..,\,n;\quad \varkappa_2=1,\,..,\,n+1-r$$

hervorgehen. Von diesen Gliedern verschwinden in ihrer Summe die den Werthen

$$r=1,\,..,\,n;\quad \varkappa_1=r+1,\,..,\,n;\quad \varkappa_2=1,\,..,\,\varkappa_1-r$$

entsprechenden Glieder, denn nimmt man aus den betreffenden Zahlenreihen die Werthe

$$r=\varkappa,\quad \varkappa_1=\varkappa+\lambda,\quad \varkappa_2=\mu$$

und, was infolge der für diese Werthe geltenden Beziehungen

$$1\leqq\varkappa\leqq n,\quad 1\leqq\lambda\leqq n-\varkappa,\quad 1\leqq\mu\leqq\lambda$$

stets möglich ist, die Werthe

$$r=\lambda-\mu+1,\quad \varkappa_1=\varkappa+\lambda,\quad \varkappa_2=\mu,$$

so sind die ihnen entsprechenden Glieder entgegengesetzt gleich. Es verbleiben also die den Werthen

$$r=1,\,..,\,n;\quad \varkappa_1=r,\,..,\,n;\quad \varkappa_2=\varkappa_1+1-r,\,..,\,n+1-r$$

entsprechenden Glieder, die, wenn wir

$$\varkappa_1+1-r=\varrho,\quad \varkappa_2+r=\sigma$$

setzen, auch aus dem Ausdrucke

$$\overline{\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}\;\overline{\varepsilon_1^{n+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}}\,.\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-\varrho-r+1}\,\varepsilon_2^{\varrho+r-2}\,p_2^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-\sigma+r}\,\varepsilon_2^{\sigma-r-1}$$

für

$$r=1,\,..,\,n;\quad \varrho=1,\,..,\,n+1-r;\quad \sigma=\varrho\pm r,\,..,\,n+1$$

oder

$$\varrho=1,\,..,\,n;\quad \sigma=\varrho+1,\,..,\,n+1;\quad r=1,\,..,\,\sigma-\varrho$$

hervorgehen. Nun ist aber

$$\begin{aligned}(r;\sigma-\varrho)\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-\varrho-r+1}\,\varepsilon_2^{\varrho+r-2}\,p_2^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-\sigma+r}\,\varepsilon_2^{\sigma-r-1}\,.\,p_1\,p_2\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\\ =p_1^n\,p_2^n\,|\,\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}\,\varepsilon_1^{n+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}.\end{aligned}$$

Folglich ist die Grösse

$$(r;n)\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,p_2^{n-1}\,.\,p_1\,p_2\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$$

ein Aggregat von Gliedern, die man aus dem Ausdrucke

$$\overline{\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}\;\overline{\varepsilon_1^{n+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}}\,.\,p_1^n\,p_2^n\,|\,\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}\,\varepsilon_1^{n+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}$$

für

$$\varrho=1,\,..,\,n;\quad \sigma=\varrho+1,\,..,\,n+1$$

erhält, und somit in der That gleich dem combinatorischen Producte $p_1^n\,p_2^n$, weil das aus dem Ausdrucke

$$\overline{\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}\;\overline{\varepsilon_1^{n+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}}\,.\,p_1^n\,\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}\,p_2^n\,\varepsilon_1^{n+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}$$

für

$$\varrho=1,\,..,\,n+1;\quad \sigma=1,\,..,\,n+1$$

hervorgehende Aggregat, welches dieses Product darstellt, in jenes Aggregat übergeht, wenn man die gleichen Werthen von ϱ und σ entsprechenden Glieder als verschwindende Grössen weglässt und die wechselseitig gleichen Werthe von ϱ und σ nur einmal in Rechnung bringt.

Die Grösse
$$(r;n)\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,p_2^{n-1}$$
wird durch Addition aus dem Ausdrucke
$$\overline{\varepsilon_1^{n-x_1+r}\,\varepsilon_2^{x_1-r}}\;\overline{\varepsilon_1^{n-x_2-r+1}\,\varepsilon_2^{x_2+r-1}}\,.\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-x_1}\,\varepsilon_2^{x_1-1}\,p_2^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-x_2}\,\varepsilon_2^{x_2-1}$$
für
$$r=1,\,..,\,n;\quad x_1=r,\,..,\,n;\quad x_2=x_1+1-r,\,..,\,n+1-r$$
oder
$$x_1=1,\,..,\,n;\quad r=1,\,..,\,x_1;\quad x_2=x_1+1-r,\,..,\,n+1-r$$
und somit, wenn wir
$$\varrho=x_1+1-r$$
setzen, aus dem Ausdrucke
$$\overline{\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}\;\overline{\varepsilon_1^{n-x_1-x_2+\varrho}\,\varepsilon_2^{x_1+x_2-\varrho}}\,.\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-x_1}\,\varepsilon_2^{x_1-1}\,p_2^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-x_2}\,\varepsilon_2^{x_2-1}$$
für
$$x_1=1,\,..,\,n;\quad \varrho=1,\,..,\,x_1;\quad x_2=\varrho,\,..,\,\varrho+n-x_1$$
erhalten.

Demnach ist die Grösse
$$|p_1^n p_2^n : p_1 p_2\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2=(r;n)\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\;p_1^{n-1}\,p_2^{n-1}$$
ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke
$$\overline{\varepsilon_1^{n+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}\;\overline{\varepsilon_1^{n-x_1-x_2+\varrho}\,\varepsilon_2^{x_1+x_2-\varrho}}\,.\,p_1^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-x_1}\,\varepsilon_2^{x_1-1}\,p_2^{n-1}\,\varepsilon_1^{n-x_2}\,\varepsilon_2^{x_2-1}$$
für
$$x_1=1,\,..,\,n;\quad x_2=1,\,..,\,n$$
dadurch hervorgehen, dass man der Grösse ϱ alle diejenigen Zahlenwerthe beilegt, welche den Zahlenreihen
$$1,\,..,\,n;\quad x_1+x_2-n,\,..,\,x_1;\quad x_1+x_2-n,\,..,\,x_2$$
gemeinsam sind.

Die Determinante
$$((r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r})^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}}^{\,2}$$
ist die Resultante der n_1 in der Grösse
$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,p^{n_1}\,p_1^{n_1}:p\,p_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$
durch die Grösse p_1 verbundenen, für die Grösse p^{n_1-1} linearen Formen. Nimmt man von diesen Formen die n_2 in der Form
$$(r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\;p^{n_1-1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\,p_1^{n_1-1}$$
enthaltenen und fügt zu ihnen die n_1-n_2 in der Form $a_2^{n_2}\,a^{n_1-n_2-1}\,p^{n_1-1}$ durch die Grösse $a^{n_1-n_2-1}$ linear verbundenen Formen hinzu, so erhält man in ihrer Resultante
$$((r;n_1)\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,\varepsilon_1^{-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,\varepsilon_1^{r-1}\,\varepsilon_2^{-r}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}})^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_2-1}}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}\,..\,\varepsilon_2^{n_1-1}}$$
die Resultante $(a_1^{n_1})^{n_2}\,(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}$.

Augenscheinlich verschwindet die Grösse
$$a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}\,|\,p^{n-1}\,p_1^{n-1}$$
für eine etwaige gemeinschaftliche Verschwindungsgrösse der Formen $a_1^{n_1}\,p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}\,p^{n_2}$.

6. Durch die Gleichung

$$|p_1{}^n p_2{}^n = (r;n)\,|\,\varepsilon_1{}^{-r}\,\varepsilon_2{}^{r-1}\,\varepsilon_1{}^{r-1}\,\varepsilon_2{}^{-r}\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1}.\,p_1\,p_2\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$$

wird das combinatorische Product $p_1{}^n p_2{}^n$ als eine Grösse gekennzeichnet, die aus dem combinatorischen Producte $p_1 p_2$ durch algebraische multiplicative Verbindung mit den Grössen $p_1{}^{n-1}$ und $p_2{}^{n-1}$ hervorgeht, für die also die Gleichung

$$|p_1{}^n p_2{}^n = |p_1 p_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1}$$

oder

$$|p_1{}^n p_2{}^n = |e_1 e_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1}.\,p_1\,p_2\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$$

besteht.

Die Grösse $|e_1 e_2\; p^{n-1}$, die aus dem combinatorischen Producte $e_1 e_2$ durch algebraische Multiplication mit der Grösse p^{n-1} hervorgeht und für die offenbar die Beziehung

$$|\,e_1\,e_2 = (r;n)\,|\,\varepsilon_1{}^{-r}\,\varepsilon_2{}^{r-1}\,\varepsilon_1{}^{r-1}\,\varepsilon_2{}^{-r}$$

gilt, ist die Summe der arithmetischen Mittel der combinatorischen Producte, die man aus dem combinatorischen Producte $e_1 e_2$ für $r = 1, \ldots, n$ dadurch erhält, dass man die Factoren desselben auf alle möglichen Weisen mit den Factoren p^{n-r} und p^{r-1} der Grösse p^{n-1} durch algebraische Multiplication verbindet.

Es ist

$$|e_1 e_2\;\; p^{n-1} = \tfrac{1}{2}(r;n)(e_1\,p^{n-r}\,e_2\,p^{r-1} + e_1'\,p^{r-1}\,e_2\,p^{n-r})|$$

und darnach

$$|\,e_1\,e_2\;\; p^{n-1} = \tfrac{1}{2}(r;n)\,p^{n-r}\,p^{r-1}\,|\,e_1\,e_2|$$

oder

$$|\,e_1\,e_2\;\; p^{n-1} = (r;n)\,|\,e_1\,p^{n-r}\,e_2\,p^{r-1}$$

und demgemäss ferner

$$|e_1 e_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1} = \tfrac{1}{2}(r;n)\,p_1{}^{n-r}\,p_2{}^{r-1}\,p_1{}^{r-1}\,p_2{}^{n-r}\,|\,e_1\,e_2\,|$$

oder

$$|e_1 e_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1} = (r;n)\,|\,e_1\,p_1{}^{n-r}\,p_2{}^{r-1}\,e_2\,p_1{}^{r-1}\,p_2{}^{n-r}.$$

In der That ist hiernach

$$|p_1{}^n p_2{}^n = |p_1 p_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1},$$

da in der Grösse

$$(r;n)\,|\,p_1{}^{n-r+1}\,p_2{}^{r-1}\,p_1{}^{r-1}\,p_2{}^{n-r+1}$$

infolge des Umstandes, dass das in ihr auftretende combinatorische Product für je zwei Werthe von r, deren Summe $n+2$ ist, entgegengesetzt gleiche Werthe annimmt, die den Werthen $r = 2, \ldots, n$ entsprechenden Glieder in ihrer Summe verschwinden.

Durch algebraische Multiplication der Grösse $|\,e_1\,e_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1}$ mit dem combinatorischen Producte $a_1{}^n\,a_2{}^n$ erhält man die Grösse

$$|\,e_1\,e_2\,|\,a_1{}^n\,a_2{}^n\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1} = \tfrac{1}{2}(r;n)\,p_1{}^{n-r}\,p_2{}^{r-1}\,p_1{}^{r-1}\,p_2{}^{n-r}\,|\,e_1\,e_2\,|\,a_1{}^n\,a_2{}^n$$

oder

$$|\,a_1{}^n\,a_2{}^n\,|\,e_1\,e_2\;\; p_1{}^{n-1}\,p_2{}^{n-1} = \tfrac{1}{2}(r;n)\,p_1{}^{n-r}\,p_2{}^{r-1}\,p_1{}^{r-1}\,p_2{}^{n-r}\,|\,a_1{}^n\,a_2{}^n\,|\,e_1\,e_2,$$

die sich aus zweistufigen Determinanten zweiten Grades zusammensetzt und infolge der Vertauschbarkeit der combinatorischen Producte $a_1{}^n\,a_2{}^n$ und $e_1\,e_2$ sowohl in der Form

$$(r;n)\, a_1{}^n\, a_2{}^n \,|\, e_1 p_1{}^{n-r} p_2{}^{r-1}\, e_2 p_1{}^{r-1} p_2{}^{n-r},$$

als auch in der Form

$$(r;n)\, a_1{}^n p_1{}^{n-r} p_2{}^{r-1}\, a_2{}^n p_1{}^{r-1} p_2{}^{n-r} \,|\, e_1 e_2$$

darstellbar ist. Sie ist mit der Grösse $a_1{}^n a_2{}^n | p_1{}^n p_2{}^n$ durch die Gleichung

$$a_1{}^n\, a_2{}^n \,|\, p_1{}^n p_2{}^n = |\, a_1{}^n\, a_2{}^n \,|\, e_1 e_2\;\; p_1{}^{n-1} p_2{}^{n-1} . p_1 p_2 \,|\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2$$

verbunden und der Grösse

$$(r;n)\, a_1{}^n\, a_2{}^n \,|\, \varepsilon_1{}^{-r}\, \varepsilon_2{}^{r-1}\, \varepsilon_1{}^{r-1}\, \varepsilon_2{}^{-r}\;\; p_1{}^{n-1} p_2{}^{n-1}$$

gleich.

Die aus der Grösse

$$a_1{}^{n_1}\, a_2{}^{n_2}\;\; \varepsilon_2{}^{n_1-n_2} \,|\, p^{n_1} p_1{}^{n_1}$$

durch Division mit der Grösse $pp_1 | \varepsilon_1 \varepsilon_2$ hervorgehende Form ist sowohl in der Form

$$(r;n_1)\, a_1{}^{n_1}\, a_2{}^{n_2}\, \varepsilon_2{}^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1{}^{-r}\, \varepsilon_2{}^{r-1}\, \varepsilon_1{}^{r-1}\, \varepsilon_2{}^{-r}\, p^{n_1-1} p_1{}^{n_1-1},$$

als auch in der Form

$$|\, a_1{}^{n_1}\, a_2{}^{n_2}\, \varepsilon_2{}^{n_1-n_2} \,|\, e_1 e_2\, p^{n_1-1} p_1{}^{n_1-1}$$

und daher die Determinante

$$((r;n_1)\, a_1{}^{n_1}\, a_2{}^{n_2}\, \varepsilon_2{}^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1{}^{-r}\, \varepsilon_2{}^{r-1}\, \varepsilon_1{}^{r-1}\, \varepsilon_2{}^{-r}\, \overline{\varepsilon_2{}^{n_1-n_2}})^{n_2}\, \overline{\varepsilon_1{}^{n_2-1}} .. \overline{\varepsilon_2{}^{n_2-1}}$$
$$(a_2{}^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1{}^{n_1-n_2-1} .. \varepsilon_2{}^{n_1-n_2-1} \,|\, \overline{\varepsilon_1{}^{n_1-1}} .. \overline{\varepsilon_2{}^{n_1-1}},$$

welche die Resultante $(a_1{}^{n_1})^{n_2} (a_2{}^{n_2})^{n_1}\, e_1 e_2{}^{n_1 n_2}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}$ darstellt, auch in der Form

$$(|\, a_1{}^{n_1}\, a_2{}^{n_2}\, \varepsilon_2{}^{n_1-n_2} \,|\, e_1 e_2\;\; \overline{\varepsilon_2{}^{n_1-n_2}})^{n_2}\, \overline{\varepsilon_1{}^{n_2-1}} .. \overline{\varepsilon_2{}^{n_2-1}}$$
$$(a_2{}^{n_2})^{n_1-n_2}\, \varepsilon_1{}^{n_1-n_2-1} .. \varepsilon_2{}^{n_1-n_2-1} \,|\, \overline{\varepsilon_1{}^{n_1-1}} .. \overline{\varepsilon_2{}^{n_1-1}}$$

darstellbar.

7. Für eine etwaige gemeinschaftliche Verschwindungsgrösse der Formen $a_1{}^{n_1} p^{n_1}$ und $a_2{}^{n_2} p^{n_2}$ verschwindet auch die Grösse

$$a_1{}^{n_1}\, p^{n_1-n_2}\, a_2{}^{n_2} \,|\, p^{n_2} p_1{}^{n_2}$$

und demzufolge auch die aus ihr durch Division mit der Grösse $pp_1 | \varepsilon_1 \varepsilon_2$ hervorgehende Form

$$|\, a_1{}^{n_1}\, a_2{}^{n_2} \,|\, e_1 e_2\;\; p^{n_1-1} p_1{}^{n_2-1}.$$

Diese Form oder also die Form

$$|\, a_1{}^{n_1} p^{n_1-n_2} a_2{}^{n_2} \,|\, e_1 e_2\;\; p^{n_2-1} p_1{}^{n_2-1}$$
$$= \tfrac{1}{2}\, (r;n_2)\, p^{n_2-r} p_1{}^{r-1} p^{r-1} p_1{}^{n_2-r} \,|\, a_1{}^{n_1} p^{n_1-n_2} a_2{}^{n_2} \,|\, e_1 e_2$$

ist in der Form

$$(r;n_2)\, a_1{}^{n_1} p^{n_1-n_2} a_2{}^{n_2} \,|\, e_1 p^{n_2-r} p_1{}^{r-1}\, e_2 p^{r-1} p_1{}^{n_2-r}$$

und in der Form

$$(r;n_2)\, a_1{}^{n_1} p^{n_1-r} p_1{}^{r-1}\;\; a_2{}^{n_2} p^{r-1} p_1{}^{n_2-r} \,|\, e_1 e_2$$

darstellbar.

Sie ergiebt sich als gleich der Grösse

$$a_1{}^{n_1}\, p^{n_1-n_2}\, a_2{}^{n_2} \,|\, p^{n_2} p_1{}^{n_2} : pp_1 \,|\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2$$

durch Addition aus dem Ausdrucke

$$\binom{n_1-n_2}{\tau-1} a_1^{n_1} e_1^{n_1-n_2+1-\tau} e_2^{\tau-1} a_2^{n_2} \mid \overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\sigma} \varepsilon_2^{\sigma-1}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-x-\mu+\sigma} \varepsilon_2^{x+\mu-\sigma}}$$
$$. p^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-x} \varepsilon_2^{x-1} p_1^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\mu-\tau+1} \varepsilon_2^{\mu+\tau-2}$$

für

$$x = 1, .., n_2; \quad \mu = 1, .., n_2; \quad \tau = 1, .., n_1 - n_2 + 1$$

und diejenigen Zahlenwerthe der Grösse σ, welche einer jeden der drei Zahlenreihen

$$1, .., n_2; \quad x + \mu - n_2, .., x; \quad x + \mu - n_2, .., \mu$$

angehören, und ist also, wenn wir

$$\mu + \tau - 1 = \lambda, \quad n_2 + \tau - 1 = \nu, \quad \sigma + \tau - 1 = \varrho$$

setzen, ein Aggregat von Gliedern, die man aus dem Ausdrucke

$$\binom{n_1-n_2}{n_1-\nu}\binom{n_2}{\nu+1-\varrho}\binom{n_2}{x+\lambda-\varrho} a_1^{n_1} e_1^{n_1-\nu} e_2^{\nu-n_2} a_2^{n_2}$$
$$| e_1^{\nu+1-\varrho} e_2^{n_2-\nu+\varrho-1} e_1^{n_2-x-\lambda+\varrho} e_2^{x+\lambda-\varrho} . p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-x} \varepsilon_2^{x-1} p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}$$

für

$$x = 1, .., n_2; \quad \lambda = 1, .., n_1$$

dadurch erhält, dass man den Grössen ν und ϱ bezw. die den Zahlenreihen

$$n_2, .., n_1; \quad \lambda, .., \lambda + n_2 - 1$$

und

$$\nu - n_2 + 1, .., \nu; \quad x + \lambda - n_2, .., x + \nu - n_2; \quad x + \lambda - n_2, .., \lambda$$

gemeinsamen Zahlenwerthe beilegt.

Fügt man zu den n_2 in der Form

$$| a_1^{n_1} a_2^{n_2} | e_1 e_2 \; p^{n_1-1} p_1^{n_2-1}$$

durch die Grösse $p_1^{n_2-1}$ die $n_1 - n_2$ in der Form $a_2^{n_2} a^{n_1-n_2-1} p^{n_1-1}$ durch die Grösse $a^{n_1-n_2-1}$ linear verbundenen Formen hinzu, so erhält man in der Resultante dieser Formen

$$(|a_1^{n_1} a_2^{n_2} | e_1 e_2)^{n_2} \varepsilon_1^{\overline{n_2-1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_2-1}} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2-1} | \varepsilon_1^{\overline{n_1-1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_1-1}}$$

die Resultante der Formen $a_1^{n_1} p^{n_1}$ und $a_2^{n_2} p^{n_2}$.

In dieser Determinante ist das (x, λ)te Element für $x = 1, .., n_2$

$$| a_1^{n_1} a_2^{n_2} | e_1 e_2 \; \overline{\varepsilon_1^{n_2-x} \varepsilon_2^{x-1}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}}$$

ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$\binom{n_1-n_2}{n_1-\nu}\binom{n_2}{\nu+1-\varrho}\binom{n_2}{x+\lambda-\varrho} a_1^{n_1} e_1^{n_1-\nu} e_2^{\nu-n_2} a_2^{n_2}$$
$$| e_1^{\nu+1-\varrho} e_2^{n_2-\nu+\varrho-1} e_1^{n_2-x-\lambda+\varrho} e_2^{x+\lambda-\varrho}$$

dadurch hervorgehen, dass die Grössen ν und ϱ bezw. die den Zahlenreihen

$$n_2, .., n_1; \quad \lambda, .., \lambda + n_2 - 1$$

und

$$\nu - n_2 + 1, .., \nu; \quad x + \lambda - n_2, .., x + \nu - n_2; \quad x + \lambda - n_2, .., \lambda$$

gemeinsamen Zahlenwerthe annehmen, und ausserdem das $(n_2 + x, \lambda)$te Element für $x = 1, .., n_1 - n_2$

$$a_2^{n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-x} \varepsilon_2^{x-1} \overline{\varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}} = a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2-\lambda+x} \varepsilon_2^{\lambda-x}}.$$

Der obige Ausdruck enthält die Grösse $a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}}\,a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}}$, da der Werth $\varrho = \nu + 1$ nicht zulässig ist, nur für $\nu = n_2$, $\varrho = 1$, $\varkappa + \lambda - \varrho = n_2$, und zwar geht er für diese Werthe in sie über. In der Determinante tritt daher diese Grösse nur als $(\varkappa, n_2 + 1 - \varkappa)$tes Element für $\varkappa = 1, .., n_2$ und somit die Grösse $(a_1^{n}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1}})^{n_2}(a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{n_1}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}$ als Glied auf.

Es ist also

$$(-1)^{\binom{n_2}{2}} . (a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1}\,e_1\,e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (|a_1^{n_1} a_2^{n_2}\; e_1 e_2)^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}.$$

8. Die Grösse

$$a_1^{n_1}\,p^{n_1-n_2}\,a_2^{n_2}\,|\,p^{n_2}\,p_1^{n_2}$$

ist infolge des Umstandes, dass die Grösse $a_1^{n_1}\,p^{n_1-n_2}\,p_1^{n_2}$ sich in zwei Aggregate zerlegen lässt, von denen das eine die Grösse $pp_1\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ als Factor enthält, als Summe aus einer gleichartigen Grösse und einem mit dem Factor $a_2^{n_2}\,p^{n_2} . pp_1\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ behafteten Aggregate darstellbar.

Aus der der Gleichung

$$a^n = a^n\,\overline{\varepsilon_1^{\,n}} . \varepsilon_1^{\,n} + a^n\,\overline{\varepsilon_2}\,\varepsilon_2$$

entsprechenden Gleichung

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{r-1}} = a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}} . \varepsilon_1^{n_1+1-r} + a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,\varepsilon_2$$

erhält man nämlich durch Multiplication mit der Grösse $p^{n_1-n_2+1-r}\,p_1^{n_2}$, wenn man berücksichtigt, dass die Grösse

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,\varepsilon_2\,p^{n_1-n_2+1-r}\,p_1^{n_2}$$

der Grösse

$$\frac{(n_1 - n_2 + 1 - r)\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2} . \varepsilon_2 p + n_2\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2+1-r}\,p_1^{n_2-1} . \varepsilon_2\,p_1}{n_1 + 1 - r}$$

oder

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2} . \varepsilon_2\,p + \frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2-1}\,\varepsilon_2\,|\,pp_1$$

gleich ist, die Gleichung

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{r-1}}\,p^{n_1-n_2+1-r}\,p_1^{n_2} = a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}} . \varepsilon_1^{n_1+1-r}\,p^{n_1-n_2+1-r}\,p_1^{n_2}$$
$$+ a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2} . \varepsilon_2\,p + \frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2-1}\,e_1 . pp_1\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$$

und darnach, wenn man diese Gleichung mit $\varepsilon_2^{r-1}\,p^{r-1}$ multiplicirt, dann $r = 1, .., n_1 - n_2$ annimmt und die diesen Werthen entsprechenden Gleichungen addirt, die Gleichung

$$a_1^{n_1}\,p^{n_1-n_2}\,p_1^{n_2} = (r;\, n_1 - n_2)\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}} . \varepsilon_1^{n_1-n_2+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}\,p^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_2}\,p_1^{n_2}$$
$$+ a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\,p_1^{n_2} . \varepsilon_2^{n_1-n_2}\,p^{n_1-n_2}$$
$$+ (r;\, n_1 - n_2)\,\frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n}\,\varepsilon_2^{\,r}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2-1}\,e_1 . \varepsilon_2^{r-1}\,p^{r-1} . pp_1\,|\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2$$

oder bei Berücksichtigung der Gleichung

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}} = a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\,.\,\varepsilon_1^{n_2} + a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2$$

die Gleichung

$$a_1^{n_1}p^{n_1-n_2}p_1^{n_2} = a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,p^{n_1-n_2}\,.\,\varepsilon_1^{n_2}p_1^{n_2} + a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2\,p_1^{n_2}\,.\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}p^{n_1-n_2}$$
$$+ (r;\, n_1-n_2)\,\frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}p_1^{n_2-1}\,e_1\,.\,\varepsilon_2^{r-1}p^{r-1}\,.\,p\,p_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

und insbesondere für $p_1 = p$ die Gleichung

$$a_1^{n_1}p^{n_1} = a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,p^{n_1-n_2}\,.\,\varepsilon_1^{n_2}p^{n_2} + a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2 p^{n_2}\,.\,\varepsilon_2^{n_1-n_2}p^{n_1-n_2}.$$

Vermittelst dieser beiden letzten Gleichungen ergiebt sich alsdann aus der Gleichung

$$a_1^{n_1}p^{n_1-n_2}\,a_2^{n_2}\,|\,p^{n_2}p_1^{n_2} = a_1^{n_1}p^{n_1}\,a_2^{n_2}p_1^{n_2} - a_1^{n_1}p^{n_1-n_2}p_1^{n_2}\,a_2^{n_2}p^{n_2}$$

in der That die Gleichung

$$a_1^{n_1}p^{n_1-n_2}\,a_2^{n_2}\,|\,p^{n_2}p_1^{n_2}$$
$$= \left(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,p^{n_1-n_2}\,.\,\varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1-n_2}p^{n_1-n_2}\,.\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2\right)a_2^{n_2}\,.\,p^{n_2}p_1^{n_2}$$
$$- (r;\, n_1-n_2)\,\frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}p_1^{n_2-1}\,e_1\,.\,\varepsilon_2^{r-1}p^{r-1}\,.\,a_2^{n_2}p^{n_2}\,.\,p\,p_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

und darnach die Gleichung

$$|\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,e_1e_2\ \ p^{n_1-1}p_1^{n_2-1}$$
$$= \left(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,.\,|\,\varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1-n_2}\,.\,|\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2\right)a_2^{n_2}\,|\,e_1e_2\ \ p^{n_1-1}p_1^{n_2-1}$$
$$- (r;\, n_1-n_2)\,\frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}p_1^{n_2-1}\,e_1\,.\,\varepsilon_2^{r-1}p^{r-1}\,.\,a_2^{n_2}p^{n_2}.$$

9. Für eine etwaige gemeinschaftliche Verschwindungsgrösse der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ verschwindet auch die Form

$$\left(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,.\,|\,\varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1-n_2}\,.\,|\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2\right)a_2^{n_2}\,|\,e_1e_2\ \ p^{n_1-1}p_1^{n_2-1}.$$

Sie geht als gleich der Grösse

$$\left(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}\,p^{n_1-n_2}\,.\,\varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1-n_2}p^{n_1-n_2}\,.\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2\right)a_2^{n_2}\,|\,p^{n_2}p_1^{n_2} : p\,p_1\quad \varepsilon_1\varepsilon_2$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}} = a_1^{n_1}\,\varepsilon_1^{n_2}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\,.\,\varepsilon_1^{n_2} + a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2 ,$$

als gleich der Grösse

$$\Big((r;\, n_1-n_2)\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}}\,.\,\varepsilon_1^{n_1-n_2+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}p^{n_1-n_2}\,.\,\varepsilon_1^{n_2}$$
$$+ \varepsilon_2^{n_1-n_2}p^{n_1-n_2}\,.\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\Big)\,a_2^{n_2}\,|\,p^{n_2}p_1^{n_2} : p\,p_1\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2$$

durch Addition aus dem Ausdrucke

$$\Big((r;\, n_1-n_2)\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1+1-r}\,\varepsilon_2^{r-1}}\,.\,p^{n_1-1}\,\varepsilon_1^{n_1-\mu-r+1}\,\varepsilon_2^{\mu+r-2}\,.\,\varepsilon_1^{n_2}$$
$$+ p^{n_1-1}\,\varepsilon_1^{n_2-\mu}\,\varepsilon_2^{n_1-n_2+\mu-1}\,.\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\Big)\,a_2^{n_2}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\sigma}\,\varepsilon_2^{\sigma-1}}$$
$$\overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\mu+\sigma}\,\varepsilon_2^{\varkappa+\mu-\sigma}}\,.\,p_1^{n_2-1}\,\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}$$

für

$$\varkappa = 1, \ldots, n_2;\quad \mu = 1, \ldots, n_2$$

und diejenigen Zahlenwerthe der Grösse σ, welche einer jeden der drei Zahlenreihen

$$1, \ldots, n_2;\quad \varkappa+\mu-n_2, \ldots, \varkappa;\quad \varkappa+\mu-n_2, \ldots, \mu$$

angehören, hervor und setzt sich somit aus zwei Aggregaten von Gliedern zusammen. Von diesen Aggregaten erhält man das eine, wenn man

$$\mu + r - 1 = \lambda, \quad \sigma + r - 1 = \varrho$$

setzt, aus dem Ausdrucke

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_1^{n_1+1-r} \varepsilon_2^{r-1}} \,.\, \varepsilon_1^{n_2} a_2^{n_2} \;\overline{\varepsilon_1^{n_2-\varrho+r} \varepsilon_2^{\varrho-r}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho} \varepsilon_2^{\varkappa+\lambda-\varrho}}$$
$$.\, p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}$$

für

$$\varkappa = 1, .., n_2; \quad \lambda = 1, .., n_1; \quad r = 1, .., n_1 - n_2$$

und die den Zahlenreihen

$$r, .., r - 1 + n_2; \quad \varkappa + \lambda - n_2, \,.\,, \varkappa + r - 1; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \lambda$$

gemeinschaftlichen Werthe der Grösse ϱ und demnach, da $\varepsilon_1^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varrho+r} \varepsilon_2^{\varrho-r}}$ für $\varrho = r$ der Eins und für $\varrho > r$ der Null gleich ist und $\varepsilon_1^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho} \varepsilon_2^{\varkappa+\lambda-\varrho}}$ infolge des Umstandes, dass ϱ höchstens den Werth λ annehmen kann, für alle Werthe von ϱ verschwindet, aus dem Ausdrucke

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_1^{n_1+1-\varrho} \varepsilon_2^{\varrho-1}}\, a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho} \varepsilon_2^{\varkappa+\lambda-\varrho}} \,.\, p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}$$

oder, da

$$a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_1+1-\varrho} \varepsilon_2^{-n_1+n_2-1+\varrho}}$$

für $\varrho = r$, $r = 1, .., n_1 - n_2$ verschwindet, aus dem Ausdrucke

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1}}\, a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+1-\varrho} \varepsilon_2^{-n_1-1+\varrho}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho} \varepsilon_2^{-n_2+\varkappa+\lambda-\varrho}}$$
$$.\, p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}$$

für

$$\varkappa = 1, .., n_2; \quad \lambda = 1, .., n_1$$

und die den Zahlenreihen

$$1, .., n_1 - n_2; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \varkappa + n_1 - n_2; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \lambda$$

gemeinschaftlichen Werthe der Grösse ϱ, das andere dagegen, wenn man

$$\mu + n_1 - n_2 = \lambda, \quad \sigma + n_1 - n_2 = \varrho$$

setzt, aus dem Ausdrucke

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2}}\, a_2^{n_2} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+1-\varrho} \varepsilon_2^{-n_1+n_2-1+\varrho}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho} \varepsilon_2^{\varkappa+\lambda-\varrho}}$$
$$.\, p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}$$

und somit aus demselben zuletzt gegebenen Ausdrucke für

$$\varkappa = 1, .., n_2; \quad \lambda = 1, .., n_1$$

und die den Zahlenreihen

$$n_1 - n_2 + 1 \,.., n_1; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \varkappa + n_1 - n_2; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \lambda$$

gemeinschaftlichen Werthe der Grösse ϱ.

Die Form

$$(a_1^{n} \,\varepsilon_1^{\overline{n_2}}.\,|\,\varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1-n_2}.\,|\,a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1} \varepsilon_2})\, a_2^{n_2} \,|\, e_1 e_2 \;\; p^{n_1-1} p_1^{n_2-1}$$

ist also ein Aggregat von Gliedern, die aus dem Ausdrucke

$$a_1^{n_1} \overline{\varepsilon_2^{n_1}}\, a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+1-\varrho} \varepsilon_2^{-n_1-1+\varrho}}\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-\varkappa-\lambda+\varrho} \varepsilon_2^{-n_2+\varkappa+\lambda-\varrho}}$$
$$.\, p_1^{n_2-1} \varepsilon_1^{n_2-\varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa-1} p^{n_1-1} \varepsilon_1^{n_1-\lambda} \varepsilon_2^{\lambda-1}$$

für

$$\varkappa = 1, .., n_2; \quad \lambda = 1, .., n_1$$

dadurch hervorgehen, dass man der Grösse ϱ alle diejenigen Zahlenwerthe beilegt, welche den Zahlenreihen

$$1, .., n_1; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \varkappa + n_1 - n_2; \quad \varkappa + \lambda - n_2, .., \lambda$$

oder den Zahlenreihen

$$1, .., n_1 - n_2 + \varkappa; \quad \lambda - n_2 + \varkappa, .., \lambda$$

gemeinsam sind.

Die Resultante der in ihr und in der Form $a_2^{n_2} a^{n_1 - n_2 - 1} p^{n_1 - 1}$ durch die Grössen $p_1^{n_2 - 1}$ und $a^{n_1 - n_2 - 1}$ linear verbundenen Formen

$$((a_1^{n_1} \varepsilon_1^{\overline{n_2}}. \,|\, \varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1 - n_2}. \,|\, a_1^{n_1} \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2 + 1}} \varepsilon_2) \, a_2^{n_2} \,|\, e_1 e_2)^{n_2} \varepsilon_1^{\overline{n_2 - 1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_2 - 1}}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1 - n_2} \varepsilon_1^{n_1 - n_2 - 1} .. \varepsilon_2^{n_1 - n_2 - 1} \,|\, \varepsilon_1^{\overline{n_1 - 1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_1 - 1}}$$

stimmt daher mit der Determinante

$$((r; n_1) \, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1 - n_2} \,|\, \varepsilon_1^{-r} \varepsilon_2^{r-1} \varepsilon_1^{r-1} \varepsilon_2^{-r} \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2}})^{n_2} \varepsilon_1^{\overline{n_2 - 1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_2 - 1}}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1 - n_2} \varepsilon_1^{n_1 - n_2 - 1} .. \varepsilon_2^{n_1 - n_2 - 1} \,|\, \varepsilon_1^{\overline{n_1 - 1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_1 - 1}}$$

oder

$$(\,|\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1 - n_2} \,|\, e_1 e_1 \; \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2}})^{n_2} \varepsilon_1^{\overline{n_2 - 1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_2 - 1}} (a_2^{n_2})^{n_1 - n_2} \varepsilon_1^{n_1 - n_2 - 1}$$
$$.. \varepsilon_2^{n_1 - n_2 - 1} \,|\, \varepsilon_1^{\overline{n_1 - 1}} .. \varepsilon_2^{\overline{n_1 - 1}}$$

genau überein und stellt somit die Resultante $(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$ auch in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}}$ dar.

Die Form

$$(a_1^{n_1} \varepsilon_1^{\overline{n_2}}. \,|\, \varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1 - n_2}. \,|\, a_1^{n_1} \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2 + 1}} \varepsilon_2) \, a_2^{n_2} \,|\, e_1 e_2 \; p^{n_1 - 1} p_1^{n_2 - 1}$$

ist der Form

$$|\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1 - n_2} \,|\, e_1 e_2 \; p^{n_1 - 1} \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2}} p_1^{n_2 - 1}$$

und ferner die Form

$$(a_1^{n_1} \varepsilon_1^{\overline{n_2}}. \,|\, \varepsilon_1^{n_2} + \varepsilon_2^{n_1 - n_2}. \,|\, a_1^{n_1} \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2 + 1}} \varepsilon_2) \, a_2^{n_2} \,|\, e_1 e_2 \; \varepsilon_1^{\overline{n_2 - \varkappa}} \varepsilon_2^{\overline{\varkappa - 1}} p^{n_1 - 1}$$

sowohl der Form

$$|\, a_1^{n_1} a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1 - n_2} \,|\, e_1 e_2 \; \varepsilon_1^{\overline{n_1 - \varkappa}} \varepsilon_2^{\overline{n_1 - n_2 + \varkappa - 1}} p^{n_1 - 1},$$

als auch der Form

$$a_1^{n_2} a_2^{n_2} \,|\, \varepsilon_1^{\overline{n_2 + 1 - \varkappa}} (\varepsilon_2^{\varkappa} - \varepsilon_1^{\overline{n_2 + 1 - \varkappa}} \varepsilon_2^{\varkappa} \varepsilon_1^{n_2 + 1 - \varkappa}) \, p^{n_1 - 1}$$

gleich.

10. Die Grösse

$$(r; n_1 - n_2) \frac{n_2}{n_1 + 1 - r} a_1^{n_1} \varepsilon_2^{\overline{r}} p^{n_1 - n_2 - r} p_1^{n_2 - 1} e_1 . \varepsilon_2^{r-1} p^{r-1} . a_2^{n_2} p^{n_2}$$

geht durch Addition aus dem Ausdrucke

$$(r; n_1 - n_2) \frac{n_2}{n_1 + 1 - r} \binom{n_1 - n_2 - r}{\mu - 1} \binom{n_2 - 1}{\varkappa - 1} a_1^{n_1} \varepsilon_2^{\overline{r}} e_1^{n_1 - r - \varkappa - \mu + 2} e_2^{\varkappa + \mu - 2}$$
$$a_2^{n_2} \varepsilon_1^{\overline{n_2 + 1 - \varrho} \, \overline{\varepsilon_2^{\varrho - 1}}} . p_1^{n_2 - 1} \varepsilon_1^{n_2 - \varkappa} \varepsilon_2^{\varkappa - 1} p^{n_1 - 1} \varepsilon_1^{n_1 - r - \mu - \varrho + 2} \varepsilon_2^{r + \mu + \varrho - 3}$$

für

$$\varkappa = 1, .., n_2; \quad \mu = 1, .., n_1 - n_2 - r + 1; \quad \varrho = 1, .., n_2 + 1$$

hervor und ist also, wenn wir

$$r + \mu + \varrho - 2 = \lambda$$

setzen und bemerken, dass alsdann infolge der Werthe von μ

$$\lambda+1-n_1+n_2 \leqq \varrho \leqq \lambda+1-r$$

ist, ein Aggregat von Gliedern, die man aus dem Ausdrucke

$$(r;\,n_1-n_2)\frac{n_2}{n_1+1-r}\binom{n_1-n_2-r}{\lambda+1-\varrho-r}\binom{n_2-1}{\varkappa-1}a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,e_1^{n_1-\varkappa-\lambda+\varrho}\,e_2^{\varkappa+\lambda-\varrho-r}$$
$$a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}\,.\,p_1^{n_2-1}\,\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,p^{n_1-1}\,\varepsilon_1^{n_1-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}$$

oder bei Berücksichtigung der Gleichung

$$a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}} = a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-r}\,\varepsilon_2^{\,r}}\,.\,\varepsilon_1^{n_1-r}+\cdots+a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1}}\,.\,\varepsilon_2^{n_1-r}$$

und in Erwägung, dass

$$\binom{n_1-r}{\nu-1}\varepsilon_1^{n_1-r+1-\nu}\,\varepsilon_2^{\nu-1}\,e_1^{n_1-r+1-\mu}\,e_2^{\mu-1}$$

für $\mu=\nu$ der Eins und sonst der Null gleich ist, aus dem Ausdrucke

$$(r;\,n_1-n_2)\frac{n_2\binom{n_1-n_2-r}{\lambda+1-\varrho-r}\binom{n_2-1}{\varkappa-1}}{(n_1+1-r)\binom{n_1-r}{\varkappa+\lambda-\varrho-r}}a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-\varkappa-\lambda+\varrho}\,\varepsilon_2^{\varkappa+\lambda-\varrho}}\,a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}$$
$$.\,p_1^{n_2-1}\,\varepsilon_1^{n_2-\varkappa}\,\varepsilon_2^{\varkappa-1}\,p^{n_1-1}\,\varepsilon_1^{n_1-\lambda}\,\varepsilon_2^{\lambda-1}$$

für

$$\varkappa=1,\ldots,n_2;\quad \lambda=1,\ldots,n_1$$

und die den Zahlenreihen

$$1,\ldots,n_2+1;\quad \lambda+1-n_1+n_2,\ldots,\lambda+1-r$$

gemeinschaftlichen Zahlenwerthe der Grösse ϱ erhält.

Auf Grund der Gleichung

$$|\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,e_1 e_2\ \ p^{n_1-1}p_1^{n_2-1}$$
$$=(a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}.\,|\,\varepsilon_1^{n_2}+\varepsilon_2^{n_1-n_2}.\,|\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2)\,a_2^{n_2}\,|\,e_1 e_2\ \ p^{n_1-1}p_1^{n_2-1}$$
$$-(r;\,n_1-n_2)\frac{n_2}{n_1+1-r}\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{\,r}}\,p^{n_1-n_2-r}\,p_1^{n_2-1}\,e_1\,.\,\varepsilon_2^{r-1}\,p^{r-1}\,.\,a_2^{n_2}\,p^{n_2}$$

ergiebt sich daher aus der Determinante

$$(|\,a_1^{n_1}\,a_2^{n_2}\,|\,e_1 e_2)^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}\,(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\varepsilon_1^{n_1-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}}$$

die ihrem Werthe nach gleiche Determinante

$$((a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2}}.\,|\,\varepsilon_1^{n_2}+\varepsilon_2^{n_1-n_2}.\,|\,a_1^{n_1}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2+1}}\,\varepsilon_2)\,a_2^{n_2}\,|\,e_1 e_2)^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-n_2}\,\varepsilon_1^{n_1-n_2-1}\ldots\varepsilon_2^{n_1-n_2-1}\,|\,\overline{\ \ ^{n_1-1}}\ldots\overline{\varepsilon_2^{n_1-1}},$$

wenn man in ihr zu einem jeden $(\varkappa,\lambda)$ten Elemente für $\varkappa=1,\ldots,n_2$ ein Aggregat von Gliedern hinzufügt, die aus dem Ausdrucke

$$(r;\,n_1-n_2)\frac{n_2\binom{n_1-n_2-r}{\lambda+1-\varrho-r}\binom{n_2-1}{\varkappa-1}}{(n_1+1-r)\binom{n_1-r}{\varkappa+\lambda-\varrho-r}}a_1^{n_1}\,\overline{{}_1\varepsilon^{n_1-\varkappa-\lambda+\varrho}\,\varepsilon_2^{\varkappa+\lambda-\varrho}}$$
$$a_2^{n_2}\,\overline{\varepsilon_1^{n_2+1-\varrho}\,\varepsilon_2^{\varrho-1}}$$

dadurch hervorgehen, dass man der Grösse ϱ die den Zahlenreihen

$$1, .., n_2+1; \quad \lambda+1-n_1+n_2, .., \lambda+1-r$$

gemeinschaftlichen Zahlenwerthe beilegt.

11. Schliesslich ziehen wir in den Bereich unserer Betrachtung die Form

$$a_1^{n_1}(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, p^{n_1}\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}},$$
$$\nu = 0, .., n_1-n_2+1,$$

welche aus der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ dadurch hervorgeht, dass man aus ihr die Grössen $p^{n_1}\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}, .., p^{n_1}\varepsilon_2^{n_1}$ vermittelst der Form $a_2^{n_2}p^{n_2}$ eliminirt.

Diese Form, die für $\nu = 0$ die Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ selbst ist, setzt sich additiv aus den Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ in der Weise zusammen, dass die erstere die Grösse

$$(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}} = (a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^\nu$$

und die letztere eine Form (n_1-n_2)ten Grades für p zum Coefficienten hat, und ist bei Berücksichtigung der Gleichung

$$p^{n_1} = p^\nu \varepsilon_1^\nu . \overline{\varepsilon_1^\nu} p^{n_1-\nu} + p^{n_1}\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu} . \overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} + .. + p^{n_1}\varepsilon_2^{n_1} . \overline{\varepsilon_2^{n_1}}$$

in der Form

$$p^\nu \varepsilon_1^\nu . a_1^{n_1}(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^\nu p^{n_1-\nu}\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}}$$

darstellbar. Die Resultanten von ihr und der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ einerseits und der Form $a_2^{n_2}p^{n_2}$ andererseits sind daher mit einander durch die Gleichung

$$(a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu n_2} . (a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (\varepsilon_1^\nu . a_1^{n_1}(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \overline{\varepsilon_1^\nu}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}})^{n_2}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$

verbunden, und es gilt somit, da

$$(\varepsilon_1^\nu)^{n_2}(a_2^{n_2})^\nu e_1 e_2^{\nu n_2} = (a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^\nu$$

ist, die Gleichung

$$(a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)} . (a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (a_1^{n_1}(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \varepsilon_1^\nu \overline{\varepsilon_1^{\nu-1}}\,\overline{\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1-\nu}$$
$$e_1 e_2^{(n_1-\nu)n_2}.$$

Die Form

$$a_1^{n_1}(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \overline{\varepsilon_1^\nu} p^{n_1-\nu}\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}},$$
$$\nu = 0, .., n_1-n_2+1,$$

die man erhält, wenn man aus der Form $a_1^{n_1}p^{n_1}$ die Grössen $p^{n_1}\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}$, .., $p^{n_1}\varepsilon_2^{n_1}$ vermittelst der Form $a_2^{n_2}p^{n_2}$ eliminirt und das Eliminationsresultat durch $p^\nu\varepsilon_1^\nu$ dividirt, hat also mit der Form $a_2^{n_2}p^{n_2}$ eine Resultante, die sich von der Resultante der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ nur durch den Factor $(a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)}$ unterscheidet.

Darnach gilt für die Resultante der Formen $a_1^{n_1}p^{n_1}$ und $a_2^{n_2}p^{n_2}$ u. a. die Gleichung

$$(a_2^{n_2}\overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)} . (a_1^{n_1})^{n_2}(a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$$
$$= (a_1^{n_1}(a_2^{n_2})^\nu \varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} .. \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,|\, \overline{\varepsilon_1^\nu}\,\overline{\varepsilon_1^{\nu-1}\varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1}})^{n_2}\varepsilon_1^{n_2-1} .. \varepsilon_2^{n_2-1}$$
$$(a_2^{n_2})^{n_1-\nu}\varepsilon_1^{n_1-\nu-1} .. \varepsilon_2^{n_1-\nu-1} \,|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1+n_2-\nu-1}} .. \overline{\varepsilon_2^{n_1+n_2-\nu-1}}$$

für

$$\nu = 0, \ldots, n_1 - n_2 + 1$$

und ferner im Falle $n_1 - \nu \geqq n_2$ die Gleichung

$$\begin{gathered}
(-1)^{\binom{n_2}{2}} (a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2} \\
= \Big(\big| a_1^{n_1} (a_2^{n_2})^{\nu} \; \varepsilon_1^{\nu-1} \varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,\big|\, \overline{\varepsilon_1^{\nu}} \, \overline{\varepsilon_1^{\nu-1} \varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1}} \\
a_2^{n_2} \varepsilon_2^{n_1-n_2-\nu} \,\big|\, e_1 e_2 \, \overline{\varepsilon_2^{n_1-n_2-\nu}} \Big)^{n_2} \overline{\varepsilon_1^{n_2-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_2-1}} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2-\nu} \varepsilon_1^{n_1-n_2-\nu-1} \\
\ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2-\nu-1} \,\big|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-\nu-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1-\nu-1}}
\end{gathered}$$

für

$$\nu = 0, \ldots, n_1 - n_2$$

und im Falle $n_1 - \nu \leqq n_2$ die Gleichung

$$\begin{gathered}
(-1)^{\binom{n_1-\nu}{2}} (a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{\nu(n_2-1)} . (a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2} \\
= \Big(a_1^{n_1} (a_2^{n_2})^{\nu} \varepsilon_1^{\nu-1} \varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,\big|\, \overline{\varepsilon_1^{\nu}} \, \overline{\varepsilon_1^{\nu-1} \varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1}} \Big)^{-n_1+n_2+\nu} \\
\varepsilon_1^{-n_1+n_2+\nu-1} \ldots \varepsilon_2^{-n_1+n_2+\nu-1} \Big(\big| a_1^{n_1} (a_2^{n_2})^{\nu} \varepsilon_1^{\nu-1} \varepsilon_2^{n_1-n_2+1-\nu} \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2} \\
\big| \overline{\varepsilon_1^{\nu}} \, \overline{\varepsilon_1^{\nu-1} \varepsilon_2^{n_1+1-\nu}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1}} \quad \varepsilon_2^{-n_1+n_2+\nu} a_2^{n_2} \,\big|\, e_1 e_2 \quad \overline{\varepsilon_2^{-n_1+n_2+\nu}} \Big)^{n_1-\nu} \\
\overline{\varepsilon_1^{n_1-\nu-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1-\nu-1}} \,\big|\, \overline{\varepsilon_1^{n_2-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}
\end{gathered}$$

für

$$\nu = n_1 - n_2, \quad n_1 - n_2 + 1.$$

Insbesondere stellt sich hiernach für $\nu = n_1 - n_2$ die Resultante $(a_1^{n_1})^{n_2} (a_2^{n_2})^{n_1} e_1 e_2^{n_1 n_2}$ in der Verbindung mit dem Factor $(-1)^{\binom{n_2}{2}} (a_2^{n_2} \overline{\varepsilon_2^{n_2}})^{(n_1-n_2)(n_2-1)}$ durch die algebraisch-symmetrische Determinante

$$\begin{gathered}
\Big(\big| a_1^{n_1} (a_2^{n_2})^{n_1-n_2} \varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_2^{n_1-n_2} \,\big|\, \overline{\varepsilon_1^{n_1-n_2}} \, \overline{\varepsilon_1^{n_1-n_2-1} \varepsilon_2^{n_2+1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_1}} \;\; a_2^{n_2} \;\; e_1 e_2 \Big)^{n_1} \\
\overline{\varepsilon_1^{n_2-1}} \ldots \overline{\varepsilon_2^{n_2-1}}^{\,2}
\end{gathered}$$

dar.

Berlin, den 7. Februar 1887.

VI.

Ueber einige Sätze J. Steiner's.

Von

Dr. Stoll,

Gymnasiallehrer zu Bensheim.

In dem Folgenden habe ich versucht, die Richtigkeit einiger von J. Steiner zum grossen Theil ohne Beweis aufgestellter Sätze durch die analytische Methode nachzuweisen und ihren inneren Zusammenhang herzustellen; hier und da sind dabei auch neue, von Steiner nicht gegebene Resultate gewonnen worden.

Eine Ellipse sei gegeben; wir stellen uns die Aufgabe, eine zweite concentrische Ellipse von gleichen Axenrichtungen zu finden, die so beschaffen ist, dass sie um ein Vieleck von gegebener Seitenzahl beschrieben werden kann, das zugleich der ersten Ellipse eingeschrieben sein soll.

Die Gleichung der gegebenen Ellipse sei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, die der gesuchten $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, so ist die Gleichung einer Sehne der ersteren:

$$1)\qquad \frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1);$$

soll dieselbe die zweite Ellipse berühren, so gilt die Bedingungsgleichung:

$$2)\qquad \frac{a_1^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{b_1^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1).$$

Dieser Bedingungsgleichung kann man noch verschiedene Formen geben. Führt man nämlich die Functionen der ganzen Winkel ein und setzt zur Abkürzung $a_1=\lambda a$ und $b_1=\mu b$, so erhält man:

$$3)\quad \lambda^2+\mu^2-1=(1-\lambda^2+\mu^2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2+(1+\lambda^2-\mu^2)\sin\varphi_1\sin\varphi_2;$$

drückt man aber in 2) die Sinus und Cosinus durch die Tangenten aus und setzt der Kürze halber t_1 statt $tg\frac{1}{2}\varphi_1$ und t_2 statt $tg\frac{1}{2}\varphi_2$, so kommt:

$$b^2(a^2-a_1^2)t_1^2t_2^2+b^2(a^2-a_1^2)+2[a_1^2b^2+a^2(b^2-b_1^2)]t_1t_2=a^2b_1^2(t_1^2+t_2^2)$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$4)\qquad \begin{gathered}\frac{b^2(a^2-a_1^2)}{a^2b_1^2}=\frac{1-\lambda^2}{\mu^2}=A\ \text{ und}\\ 2\cdot\frac{a_1^2b^2+a^2(b^2-b_1^2)}{a^2b_1^2}=2\cdot\frac{1+\lambda^2-\mu^2}{\mu^2}=C\end{gathered}$$

setzt,

5) $$A t_1^2 t_2^2 + A + C t_1 t_2 = t_1^2 + t_2^2.$$

Zieht man von dem Punkte, dessen Parameter φ_2 ist, eine zweite Sehne nach dem Punkte φ_3, so dass die Bedingung

$$\lambda^2 + \mu^2 - 1 = (1 - \lambda^2 + \mu^2) \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + (1 + \lambda^2 - \mu^2) \sin\varphi_2 \sin\varphi_3$$

erfüllt ist, so berührt diese ebenfalls die zweite Ellipse, und die Grössen λ und μ sind durch diese Gleichung und die Gleichung 3) vollständig bestimmt. Durch Subtraction beider Gleichungen erhält man ausserdem noch die Bedingung:

$$(1 - \lambda^2 + \mu^2) \cos\varphi_2 (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_3) + (1 + \lambda^2 - \mu^2) \sin\varphi_2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi_3) = 0$$

oder

$$(1 - \lambda^2 + \mu^2)\, tg \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) = (1 + \lambda^2 - \mu^2)\, tg\, \varphi_2$$

oder endlich

6) $$tg \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) = \frac{C}{2(A+1)}\, tg\, \varphi_2 = c . tg\, \varphi_2,$$

wenn man nämlich $\frac{C}{2(A+1)} = c$ setzt.

Man kann nun an die gefundene Ellipse von φ_3 aus eine dritte Tangente ziehen, welche die gegebene in einem Punkte φ_4 schneidet, von φ_4 aus eine vierte etc., wobei aus den Gleichungen

$$A t_3^2 t_4^2 + A + C t_3 t_4 = t_3^2 + t_4^2, \quad A t_4^2 t_5^2 + A + C t_4 t_5 = t_4^2 + t_5^2 \text{ etc.}$$

nacheinander die Parameter φ_4, φ_5 etc. gefunden werden können. Zu diesen Gleichungen ist ausser der Gleichung 5) noch die oben nicht erwähnte

$$A t_2^2 t_3^2 + A + C t_2 t_3 = t_2^2 + t_3^2$$

hinzuzufügen. Sollen nun aber alle diese Sehnen ein geschlossenes n-Eck bilden, so muss der Endpunkt der n^{ten} Tangente, der den Parameter φ_{n+1} hat, mit dem Anfangspunkte zusammenfallen oder es muss $\varphi_{n+1} = 360^0 + \varphi_1$ sein; infolge dessen ist die Zahl obiger Gleichungen keine unbegrenzte, sondern es giebt nur n solcher Gleichungen, von denen die letzte heissen muss:

$$A t_n^2 t_1^2 + A + C t_n t_1 = t_n^2 + t_1^2.$$

Diese Bemerkungen genügen, um die Eigenschaften solcher geschlossenen Vielecke zu untersuchen.

Lassen wir den Anfangspunkt der ersten Tangente auf der Peripherie der ersten Ellipse nach einem Punkte vorrücken, dessen Parameter sich von φ_1 nur um den unendlich kleinen Bogen $d\varphi_1$ unterscheidet, so verschiebt sich ihr Endpunkt um $d\varphi_2$, der Endpunkt der zweiten Tangente um $d\varphi_3$ etc., der der n^{ten} um $d\varphi_{n+1}$, wobei alle diese Incremente dasselbe Zeichen erhalten müssen, weil mit dem Wachsthum von φ_1 alle übrigen φ ebenfalls wachsen. Durch Differentiation der Gleichung 5) erhält man nun:

$$[2t_1(A t_2^2 - 1) + C t_2](1 + t_1^2)\, d\varphi_1 + [2t_2(A t_1^2 - 1) + C t_1](1 + t_2^2)\, d\varphi_2 = 0.$$

Die Auflösung der Gleichung 5) nach t_1 oder t_2 ergiebt aber entweder

$$2t_1(At_2^2-1)+Ct_2 = \pm\sqrt{4At_2^4+(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}$$

oder

$$2t_2(At_1^2-1)+Ct_1 = \pm\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A},$$

woraus folgt:

$$\frac{\sqrt{4At_2^4\,(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}}{1+t_2^2}\,d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A}}{1+t_1^2}\,d\varphi_2.$$

Links und rechts wurde deshalb das positive Zeichen genommen, weil nach der vorausgeschickten Bemerkung die Incremente $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ dasselbe Zeichen besitzen müssen. Bezeichnet man nun die Coefficienten von $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$ kurzweg mit f_2 und f_1, so heisst jetzt die letzte Gleichung: $f_2\,d\varphi_1 = f_1\,d\varphi_2$; ebenso findet man $f_3\,d\varphi_2 = f_2\,d\varphi_3$, $f_4\,d\varphi_3 = f_3\,d\varphi_4$ etc. und endlich $f_{n+1}\,d\varphi_n = f_n\,d\varphi_{n+1}$. Durch Multiplication aller dieser Gleichungen bekommt man $f_{n+1}\,d\varphi_1 = f_1\,d\varphi_{n+1}$; weil aber, im Falle das ursprüngliche Vieleck geschlossen war, $f_{n+1} = f_1$ sein muss, so hat man auch $d\varphi_{n+1} = d\varphi_1$, d. h. der Endpunkt der letzten Tangente fällt auch nach der Verschiebung wieder mit dem Anfangspunkte der ersten zusammen oder das Vieleck ist auch jetzt wieder geschlossen. Daraus folgt der Satz:

A. Dreht man ein n-Eck, das einer Ellipse eingeschrieben und einer andern concentrischen Ellipse mit gleichen Axenrichtungen umgeschrieben ist, so, dass seine n Eckpunkte immer auf der Peripherie der ersten Ellipse bleiben, seine $n-1$ ersten Seiten aber die zweite Ellipse berühren, so berührt auch seine n^{te} Seite fortwährend dieselbe Ellipse.

Denkt man sich ferner eine Schaar sich einschliessender concentrischer Ellipsen, deren Axenrichtungen dieselben sind, und legt von einem Punkte φ_1 der ersten an die zweite eine Tangente, so wird der Parameter ihres Endpunktes φ_2 durch die Gleichung $At_1^2t_2^2+A+Ct_1t_2 = t_1^2+t_2^2$ bestimmt, der Parameter des Endpunktes der von φ_2 an die dritte gelegten Tangente durch die ähnlich gebildete Gleichung $A't_2^2t_3^2+A'+C'\,t_2t_3 = t_2^2+t_3^2$ etc. und man hat ausserdem noch die Differentialgleichungen:

$$\frac{\sqrt{4At_2^4+(C^2-4A^2-4)t_2^2+4A}}{1+t_2^2}\,d\varphi_1 = \frac{\sqrt{4At_1^4+(C^2-4A^2-4)t_1^2+4A}}{1+t_1^2}\,d\varphi_2,$$

$$\frac{\sqrt{4A't_3^4+(C'^2-4A'^2-4)t_3^2+4A'}}{1+t_3^2}\,d\varphi_2 = \frac{\sqrt{4A't_2^4+(C'^2-4A'^2-4)t_2^2+4A'}}{1+t_2^2}\,d\varphi_3$$

etc.

Nimmt man an, alle Ellipsen seien ähnlich und ähnlichliegend, so ist $\lambda=\mu$, $\lambda'=\mu'$ und man hat $A=\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2}$, $A'=\frac{1-\lambda'^2}{\lambda'^2}$ etc.; $C=\frac{2}{\lambda^2}$, $C'=\frac{2}{\lambda'^2}$ etc.; also auch $C^2-4A^2-4 = \frac{4}{\lambda^4}-\frac{4(1-\lambda^2)^2}{\lambda^4}-4 = 8\cdot\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} = 8A$ und ebenso $C'^2-4A'^2-4 = 8A'$. Daher gehen obige Differentialgleichungen über in $d\varphi_1 = d\varphi_2 = d\varphi_3 = \text{etc.} = d\varphi_{n+1}$. Daraus folgt aber, dass, wenn der Endpunkt der Tangente an die letzte Ellipse mit dem Anfangspunkt der ersten zusammenfiel, dies auch dann noch der Fall sein wird, wenn man das Vieleck so verschiebt, dass seine Ecken sich fortwährend auf der ersten Ellipse fortbewegen, seine Seiten aber der Reihe nach die zweite, dritte etc., n^{te} Ellipse berühren. Man hat daher den Satz:

B. Wenn eine Schaar ähnlicher und ähnlichliegender Ellipsen gegeben ist und man von irgend einem Punkte der ersten Ellipse an eine beliebige Ellipse der Schaar eine Tangente legt, von ihrem Endpunkte an eine zweite Ellipse der Schaar eine zweite Tangente und so fort, so wird die Verbindungslinie des Endpunktes der letzten Tangente mit dem Anfangspunkte der ersten immer dieselbe Ellipse der Schaar berühren, wenn man auch das dadurch entstandene Vieleck sich so drehen lässt, dass seine Eckpunkte auf der Peripherie der ersten Ellipse bleiben und die $n-1$ ersten Seiten derselben fortwährend je dieselben Ellipsen der Schaar berühren.

Kehren wir jetzt zu unserem ursprünglichen System von zwei Ellipsen zurück und denken uns ein geschlossenes Vieleck von gerader Seitenzahl, also von $2n$ Seiten, welches der ersten ein- und der zweiten umgeschrieben ist, so gelten dafür folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A t_1^2 t_2^2 + A + C t_1 t_2 &= t_1^2 + t_2^2,\\
A t_2^2 t_3^2 + A + C t_2 t_3 &= t_2^2 + t_3^2,\\
&\;\;\vdots\\
A t_{2n}^2 t_1^2 + A + C t_{2n} t_1 &= t_{2n}^2 + t_1^2.
\end{aligned}$$

Die Elimination von C aus der ersten und $(n+1)^{\text{ten}}$ derselben, aus der zweiten und $(n+2)^{\text{ten}}$ etc. liefert die n neuen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A(1-t_1 t_2 t_{n+1} t_{n+2})(t_{n+1} t_{n+2} - t_1 t_2) &= (t_1 t_{n+1} - t_2 t_{n+2})(t_1 t_{n+2} - t_2 t_{n+1}),\\
A(1-t_2 t_3 t_{n+2} t_{n+3})(t_{n+2} t_{n+3} - t_2 t_3) &= (t_2 t_{n+2} - t_3 t_{n+3})(t_2 t_{n+3} - t_3 t_{n+2}),\\
&\;\;\vdots\\
A(1-t_n t_{n+1} t_{2n} t_1)(t_{2n} t_1 - t_n t_{n+1}) &= (t_n t_{2n} - t_{n+1} t_1)(t_n t_1 - t_{n+1} t_{2n}).
\end{aligned}$$

Diesen n Gleichungen kann in verschiedener Weise zugleich Genüge geleistet werden. Nimmt man nämlich erstens an, es beständen die Relationen

$$t_1 = \pm t_{n+1}, \quad t_2 = \pm t_{n+2}, \quad t_3 = \pm t_{n+3}, \quad \ldots, \quad t_n = \pm t_{2n},$$

wo die positiven Zeichen den positiven und die negativen Zeichen den negativen entsprechen, so werden die zweiten Factoren der linken und der rechten Seite jeder der obigen Gleichungen gleich Null; aber für das positive Zeichen würde man haben $\varphi_1 = 360^0 + \varphi_{n+1}$, $\varphi_2 = 360^0 + \varphi_{n+2}$ etc., d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten zusammenfallen; bei der Wahl des negativen Zeichens aber müsste $\varphi_1 = 360^0 - \varphi_{n+1}$,

$\varphi_2 = 360^0 - \varphi_{n+2}$ etc. sein, d. h. die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks müssten symmetrisch gegen die Richtung der grossen Axe liegen, was beides unmöglich ist. Es bleibt daher nur möglich, anzunehmen, dass

$$t_1 t_{n+1} = t_2 t_{n+2} = t_3 t_{n+3} = \cdots = t_n t_{2n} = \lambda$$

sei, wo λ eine Constante bedeutet; die genannten Gleichungen gehen nämlich dann über in:

$$A(1-\lambda^2)(\lambda^2 - t_1^2 t_2^2) = 0, \quad A(1-\lambda^2)(\lambda^2 - t_2^2 t_3^2) = 0 \text{ etc.},$$

woraus unmittelbar folgt, dass $\lambda = \pm 1$ sein muss. Nähme man das positive Zeichen, so müsste $\varphi_{n+1} = 180^0 - \varphi_1$, $\varphi_{n+2} = 180^0 - \varphi_2$ sein, was bedingen würde, dass die gegenüberliegenden Ecken des Vielecks symmetrisch zur Richtung der kleinen Axe lägen, — eine Lage, die unmöglich ist; man hat daher das negative Zeichen zu wählen, so dass:

$$7) \qquad t_1 t_{n+1} = t_2 t_{n+2} = t_3 t_{n+3} = \cdots = t_n t_{2n} = -1$$

ist. Aus diesem Resultate folgt aber der Satz:

C. **In jedem geschlossenen Vieleck von gerader Seitenzahl, das einer Ellipse eingeschrieben und einer andern concentrischen Ellipse von gleichen Axenrichtungen umgeschrieben ist, liegen die gegenüberliegenden Ecken auf je einem Durchmesser, oder, was dasselbe ist, je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.**

Für zwei ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen ist dieser Satz unmittelbar einleuchtend; er gilt aber auch, wie man sieht, wenn die Ellipsen ungleiche Axenverhältnisse haben.

Wenn in eine gegebene Ellipse von den Halbaxen a und b ein geschlossenes Vieleck von bestimmter Seitenzahl eingeschrieben werden soll, dessen Seiten eine andere concentrische Ellipse von denselben Axenrichtungen, deren Halbaxen a_1 und b_1 sind, berühren, so muss zwischen den Grössen a, b und a_1, b_1 oder, was dasselbe ist, zwischen A und C eine gewisse Relation bestehen, die, wie aus Satz A. erhellt, unabhängig ist von den Werthen der Parameter der Eckpunkte des Vielecks. Nun unterscheidet sich unsere Gleichung 5) und die ähnlich gebildeten nur dadurch von der Gleichung 5) in meiner Abhandlung Ueber sphärische Vielecke, die einem Kreise eingeschrieben und einem andern Kreise umgeschrieben sind (Zeitschrift f. Mathematik u. Physik XXIX, 2), dass hier $A = B$ ist; also bleiben auch alle Schlüsse in Bezug auf die erwähnten Relationen für die verschiedenen Vielecke dieselben, und man wird auch hier dieselben Relationen erhalten, wie dort, wenn man nur $A = B$ setzt. Demgemäss ist die Relation für das Dreieck:

$$A^2 - 1 = C,$$

für das Fünfeck:

$$(A^2-1)[(A^2-1)^2 + C(A^2-1) - C^2] = A^2 C^3,$$

für das Viereck:

$$A^2 = 1,$$

für das Sechseck:

$$C^2 A^2 = (A^2 - 1)^2,$$

für das Achteck:

$$(A^2 - 1)^4 = C^4 A^2,$$

für das Zehneck:

$$C^6 A^2 (A^2 - 1)^2 + 2 C^4 A^2 (A^2 - 1)[(A^2 - 1)^2 - C^2 A^2] = [(A^2 - 1)^2 - A^2 C^2]^3,$$

für das Zwölfeck:

$$(A^2 - 1)^4 - A^2 C^4 = A C^2 [C^2 (A^2 + 1) - 2 (A^2 - 1)^2].$$

Einige dieser Relationen wollen wir jetzt einer näheren Discussion unterziehen. Setzt man zuerst in die Relation für das Dreieck $A^2 - 1 = C$ die Werthe von $A = \frac{1 - \lambda^2}{\mu^2}$ und $C = 2 \frac{\lambda^2 - \mu^2 + 1}{\mu^2}$ ein, so kommt:

$$(1 - \lambda^2)^2 - \mu^4 = 2 \mu^2 (\lambda^2 - \mu^2 + 1)^2 \quad \text{oder} \quad \lambda^4 - 2(1 + \mu^2)\lambda^2 + (1 - \mu^2)^2 = 0;$$

dies giebt $\lambda^2 = 1 + \mu^2 \pm 2\mu$. Nimmt man das positive Zeichen, so ist $\lambda = \pm (1 + \mu)$, wählt man aber das negative, so ist $\lambda = \pm (1 - \mu)$; nun ist aber weder $\lambda = 1 + \mu$, noch $\lambda = -(1 + \mu)$, noch $\lambda = -(1 - \mu)$ möglich, weil λ und μ ihrer Natur nach positive echte Brüche sind; es bleibt daher als Relation für das Dreieck übrig:

8) $$\lambda + \mu = 1.$$

Für das Viereck hat man $A = \pm 1$, d. h. $1 - \lambda^2 = \pm \mu^2$, wo aus demselben Grunde das negative Vorzeichen nicht genommen werden darf, so dass die Relation heisst:

9) $$\lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

Das Sechseck hat die Relation

$$A^2 - 1 = \pm A C \quad \text{oder} \quad (1 - \lambda^2)^2 - \mu^4 = \pm 2(1 - \lambda^2)(\lambda^2 + 1 - \mu^2),$$

also entweder

$$\mu^4 - 2(1 - \lambda^2)\mu^2 + 2(1 - \lambda^4) - (1 - \lambda^2)^2 = 0$$

oder

$$\mu^4 + 2(1 - \lambda^2)\mu^2 - 2(1 - \lambda^4) - (1 - \lambda^2)^2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\mu^2 = (1 - \lambda^2) \pm \sqrt{2(1 - \lambda^2)^2 - 2(1 - \lambda^4)} = 1 - \lambda^2 \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 1},$$

was complexe Werthe giebt; aus der zweiten Gleichung aber findet man

$$\mu^2 = -(1 - \lambda^2) \pm \sqrt{2(1 - \lambda^2)^2 + 2(1 - \lambda^4)} = -(1 - \lambda^2) \pm 2\sqrt{1 - \lambda^2};$$

hier ist selbstverständlich nur das positive Zeichen zulässig und man hat deshalb als Relation für das Sechseck: $\mu^2 - \lambda^2 + 1 = 2\sqrt{1 - \lambda^2}$ oder

10) $$\sqrt{1 - \lambda^2} + \sqrt{1 - \mu^2} = 1,$$

wo bei beiden Wurzeln das positive Zeichen zu nehmen ist.

Beim Achteck gilt die Relation

$$(A^2 - 1)^2 = \pm A C^2 \quad \text{oder} \quad [(1 - \lambda^2)^2 - \mu^4]^2 = \pm 4\mu^2(1 - \lambda^2)[\lambda^2 + 1 - \mu^2]^2;$$

das negative Zeichen rechts ist unbrauchbar, weil $1 - \lambda^2$ positiv ist und sonst nur Quadrate vorkommen. Um aber bei der Wahl des positiven Zeichens der Relation eine mehr symmetrische Gestalt zu geben, gehe man von der Identität aus:

$$[\lambda^2+\mu^2-1]^4-[(1-\lambda^2)^2-\mu^4]^2=-4\mu^2(1-\lambda^2)[\lambda^2+\mu^2-1]^2;$$

diese giebt dann, verbunden mit der obigen Relation:

$$11)\qquad (\lambda^2+\mu^2-1)^4=16\lambda^2\mu^2(1-\lambda^2)(1-\mu^2).$$

Wir wollen uns jetzt auf einer gegebenen Ellipse zwei feste Punkte von den Parametern φ_1 und φ_n denken und dazwischen $n-2$ bewegliche Punkte $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$; in innigem Zusammenhang mit den bisherigen Auseinandersetzungen steht dann, wie wir sehen werden, die Frage, in welcher Weise die Sehnen $\varphi_1\varphi_2, \varphi_2\varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}\varphi_n$ gezogen werden müssen, damit ihre Summe ein **Maximum** sei. Die Entfernung des Punktes φ_2 von φ_1 wird ausgedrückt durch

$$\sqrt{a^2(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)^2+b^2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)^2}$$
$$=2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\sqrt{a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)},$$

und es soll daher die Summe

$$u=2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)W_{21}+2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2)W_{32}+\cdots$$
$$+2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})W_{n,n-1}$$

ein Maximum werden, wobei wir der Abkürzung halber

$$\sqrt{a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_k+\varphi_{k-1})+b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_k+\varphi_{k-1})}=W_{k,k-1}$$

gesetzt haben. Die partielle Differentiation nach $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ ergiebt $n-2$ Bedingungsgleichungen, die alle ähnlich gebaut sind und von denen die erste heisst:

$$W_{21}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{(a^2-b^2)\sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\sin(\varphi_2+\varphi_1)}{2W_{21}}$$
$$-W_{32}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2)+\frac{(a^2-b^2)\sin\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2)\sin(\varphi_3+\varphi_2)}{2W_{32}}=0.$$

Nach vorgenommener Reduction erhält dieselbe die Gestalt

$$\frac{a^2\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\sin\varphi_2+b^2\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\cos\varphi_2}{W_{21}}$$
$$=\frac{a^2\sin\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)\sin\varphi_2+b^2\cos\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)\cos\varphi_2}{W_{32}}$$

oder

$$\frac{a^2\,tg\,\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\,tg\,\varphi_2+b^2}{\sqrt{a^2\,tg^2\,\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2}}=\frac{a^2\,tg^2\,\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)\,tg\,\varphi_2+b^2}{\sqrt{a^2\,tg^2\,\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)+b^2}}.$$

Nun sind die Gleichungen der Sehnen 12 und 23 bezüglich

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

und

$$\frac{x}{b}\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)+\frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)=\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2),$$

also, wenn man die Winkel, welche diese Linien mit der Abscissenaxe bilden, kurzweg mit $(12, a)$ und $(23, a)$ bezeichnet:

$$tg(12, a) = -\frac{b}{a} cotg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) \text{ und } tg(23, a) = -\frac{b}{a} cotg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2);$$

ferner ist die Gleichung der Normale in φ_2:

$$y - b \sin\varphi_2 = \frac{a}{b} tg\,\varphi_2 (x - a\cos\varphi_2), \text{ daher } tg(n, a) = \frac{a}{b} tg\,\varphi_2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Bedingungsgleichung nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\frac{1 - tg(n, a)\, cotg(12, a)}{\sqrt{1 + cotg^2(12, a)}} = \frac{1 - tg(n, a)\, cotg(23, a)}{\sqrt{1 + cotg^2(23, a)}},$$

was mit $\sin[(12, a) - (n, a)] = \sin[(23, a) - (n, a)]$ identisch ist. Daraus schliesst man:

$$(12, a) - (n, a) = 180^0 + (n, a) - (23, a),$$

d. h. die Normale in φ_2 hälftet den Winkel zwischen 12 und 23 u. s. w. Die aufeinander folgenden Sehnen 12, 23, ..., $(n-1, n)$ bilden also eine gebrochene Linie, die mit dem Wege eines Lichtstrahls identisch ist, der von φ_1 ausgeht und, nachdem er an $n-2$ Punkten reflectirt worden ist, nach φ_n gelangt.

Wir wollen nun annehmen, der Strahl 12 sei gegeben und werde vermöge des Lichtreflexionsgesetzes nach φ_3 reflectirt, so berühren die zwei Strahlen 12 und 23 irgend eine mit der gegebenen Ellipse concentrische Ellipse von gleichen Axenrichtungen, die dadurch vollständig bestimmt ist. Um zu finden, in welcher Beziehung ihre Axen zu denen der ursprünglichen Ellipse stehen, mache man dieselben Substitutionen, wie oben, in die beiden Bedingungsgleichungen der Berührung [vergl. Gl. 2)]:

$$\frac{a_1^2}{a^2} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{b_1^2}{b^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

und

$$\frac{a_1^2}{a^2} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2) + \frac{b_1^2}{b^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2) = \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_2),$$

nachdem man sie, wie folgt, umgeformt hat:

$$\left[\frac{a^2 - a_1^2}{a^2} + \frac{b^2 - b_1^2}{b^2} tg^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)\right](1 + tg^2\varphi_2) = [tg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) - tg\,\varphi_2]^2,$$

$$\left[\frac{a^2 - a_1^2}{a^2} + \frac{b^2 - b_1^2}{b^2} tg^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2)\right](1 + tg^2\varphi_2) = [tg\, \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_2) - tg\,\varphi_2]^2.$$

Man erhält so:

$$[(a^2 - a_1^2) + (b^2 - b_1^2)\, cotg^2(12, a)][a^2 + b^2 tg^2(n, a)] = b^2[cotg(12, a) + tg(n, a)]^2$$

und

$$[(a^2 - a_1^2) + (b^2 - b_1^2)\, cotg^2(23, a)][a^2 + b^2 tg^2(n, a)] = b^2[cotg(23, a) + tg(n, a)]^2.$$

Die Ausdrücke in den Klammern rechts sind aber bezüglich gleich $\frac{\cos[(12, a) - (n, a)]}{\sin(12, a) \cos(n, a)}$ und $\frac{\cos[(23, a) - (n, a)]}{\sin[(23, a) \cos(n, a)]}$, und weil $(12, a) - (n, a) = 180^0 - [(23, a) - (n, a)]$ ist, so muss $\cos^2[(12, a) - (n, a)] = \cos^2[(23, a) - (n, a)]$ sein; man erhält daher durch Division obiger Gleichungen:

$$\begin{aligned}&(a^2-a_1^2)\sin^2(12,a)+(b^2-b_1^2)\cos^2(12,a)\\&=(a^2-a_1^2)\sin^2(23,a)+(b^2-b_1^2)\cos^2(23,a)\end{aligned}$$

oder

$$[(a^2-a_1^2)-(b^2-b_1^2)][\sin^2(12,a)-\sin^2(23,a)]=0.$$

Da der zweite Factor auf der linken Seite nicht Null sein kann, so muss

$$a^2-a_1^2=b^2-b_1^2$$

sein, d. h. die Sehnen 22) und 23) berühren eine der gegebenen confocale Ellipse; dieselbe Ellipse muss aber auch, wie aus der Symmetrie der zu verwendenden Gleichungen erhellt, von allen folgenden Sehnen 34, 35 etc. berührt werden, sobald ihre Richtungen durch das Lichtreflexionsgesetz bestimmt werden. Infolge dessen gilt der Satz:

D. Wenn man in eine Ellipse eine Reihe aufeinander folgender Sehnen so einschreibt, dass der Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden durch die Normale in ihrem gemeinschaftlichen Punkte gehälftet wird, so ist die Summe aller dieser Sehnen grösser als die Summe irgendwelcher ebenso zahlreicher Sehnen, welche man vom Anfangspunkt der ersten bis zum Endpunkt der letzten ziehen kann, und alle diese Sehnen berühren eine der gegebenen confocale Ellipse.

Umgekehrt ziehe man von einem Punkte 1 der gegebenen Ellipse eine Tangente an die ihr confocale mit den Axen $\sqrt{a^2-\varrho^2}$ und $\sqrt{b^2-\varrho^2}$ und von ihrem Endpunkte 2 eine zweite Tangente 23, so gelten die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{a^2-\varrho^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{b^2-\varrho^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

und

$$\frac{a^2-\varrho^2}{a^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)+\frac{b^2-\varrho^2}{b^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)=\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2),$$

welche man in der nämlichen Weise, wie oben geschehen, umformen kann in:

$$\varrho^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}tg^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\right](1+tg^2\varphi_2)=[tg\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)-tg\,\varphi_2]^2$$

und

$$\varrho^2\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}tg^2\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)\right](1+tg^2\varphi_2)=[tg\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)-tg\,\varphi_2]^2.$$

Dann ergiebt aber die Elimination von ϱ^2 die neue Bedingungsgleichung:

$$\frac{b^2+a^2\,tg^2\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{b^2+a^2\,tg^2\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)}=\frac{[tg\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)-tg\,\varphi_2]^2}{[tg\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)-tg\,\varphi_2]^2}$$

oder, wenn man die erwähnten Substitutionen auch hier vornimmt:

$$\frac{1+cotg^2(12,a)}{1+cotg^2(23,a)}=\frac{[cotg(12,a)+tg(n,a)]^2}{[cotg(23,a)+tg(n,a)]^2},$$

d. h.

$$\cos[(12,a)-(n,a)]=\pm\cos[(23,a)-(n,a)].$$

Für das positive Zeichen hat man $(12, a) - (n, a) = 360^0 - (23, a) + (n, a)$, was hier keinen Sinn hat; das negative Zeichen aber giebt wieder wie oben: $(12, a) - (n, a) = 180^0 - (23, a) + (n, a)$. Daher hat men folgenden Satz:

E. Wenn man von einem Punkte einer Ellipse aus eine Reihe von Sehnen zieht, welche eine der gegebenen confocale Ellipse berühren, so werden die Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden Sehnen durch die Normale in ihrem gemeinschaftlichen Punkte gehälftet und die Summe aller dieser Sehnen ist ein Maximum, wenn man den Anfangspunkt der ersten und den Endpunkt der letzten als fest ansieht.

Zieht man von einem gegebenen Punkte 1 der Ellipse die erste Sehne 12 nach einem gegebenen Punkte 2, so wird im Allgemeinen der Endpunkt der n^{ten} Sehne nicht mit dem Anfangspunkte der ersten zusammenfallen; damit dies geschieht, müssen für jedes n-Eck die oben angegebenen Relationen erfüllt sein, zu denen noch die Relation $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$ hinzukommt, wodurch die confocale Ellipse vollständig bestimmt wird.

So hat man z. B. für das Dreieck die beiden Relationen $\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1$ und $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$ zu combiniren, woraus man

$$a_1 = a \cdot \frac{-b^2 + \sqrt{a^4 + b^4 - a^2 b^2}}{a^2 - b^2} \quad \text{und} \quad b_1 = b \cdot \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + b^4 - a^2 b^2}}{a^2 - b^2}$$

erhält. Durch Elimination der Wurzelgrösse entsteht die merkwürdige Relation:

12) $$(a_1 + b_1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Für das Viereck erhält man aus $\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{b_1^2}{a^2} = 1$ und $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$:

$$a_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

woraus sich die auch von Steiner angegebene Relation ergiebt:

13) $$a_1 : b_1 = a^2 : b^2.$$

Das Sechseck erfordert die Combination von $\frac{\sqrt{a^2 - a_1^2}}{a} + \frac{\sqrt{b^2 - b_1^2}}{b} = 1$ mit $a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2$; dies giebt

$$a_1^2 = a^3 \cdot \frac{(a + 2b)}{(a + b)^2} \quad \text{und} \quad b_1^2 = b^3 \cdot \frac{(2a + b)}{(a + b)^2},$$

woraus folgende Relation entspringt:

14) $$\frac{a_1^2}{a^3} + \frac{b_1^2}{b^3} = \frac{3}{a + b}.$$

Der oben ganz allgemein bewiesene Satz A. gilt natürlich auch jetzt noch, wo die berührte Ellipse der gegebenen confocal ist, und da dann bei jeder Lage, welche das n-Eck infolge seiner Verschiebung annimmt, sein Umfang ein Maximum, das totale Differential des letzteren daher gleich Null ist, so könnte man schon daraus schliessen, dass derselbe constant bleibt; wir ziehen es aber vor, einen directen Beweis dieser Eigenschaft zu geben. Die Länge der Sehne 12 oder s_{12} ist gleich

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1) \sqrt{a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}.$$

Wenn man nun aber wiederum $\sqrt{a^2-\varrho^2}$ und $\sqrt{b^2-\varrho^2}$ als Axen der confocalen Ellipse annimmt, so folgt aus der Bedingungsgleichung 2), nämlich:

$$\frac{a^2-\varrho^2}{a^2} \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\frac{b^2-\varrho^2}{b^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)=\cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1),$$

dass

$$\varrho^2\left[a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\right]=a^2 b^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

ist. Dadurch wird

$$s_{12}=\frac{2ab}{\varrho} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1),$$

also der Umfang:

$$15)\quad u=\frac{2ab}{\varrho}\Big\{\sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_n)+\sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)+\sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_2)+\cdots + \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_n-\varphi_{n-1})\Big\}.$$

Andererseits hat man aber auch

$$s_{12}=\frac{2ab}{\varrho} \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{2\varrho}{ab}\left[a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\right]$$
$$=\frac{2\varrho}{ab}\left[(a^2-b^2) \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+b^2\right],$$

folglich der Umfang:

$$16)\quad u=\frac{2\varrho(a^2-b^2)}{ab}\Big\{\sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_n)+\sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)+\sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_2)+\cdots + \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_n+\varphi_{n-1})\Big\}+\frac{2\varrho bn}{a}.$$

Da bei einer Verschiebung des Anfangspunktes, dessen Parameter φ_1 ist, auch alle übrigen φ sich ändern, so ist der totale Differentialquotient des Umfanges nach φ_1 infolge der Formel 15):

$$\frac{du}{d\varphi_1}=\frac{ab}{\varrho}\left\{\left[\sin(\varphi_1-\varphi_n)-\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right]+\left[\sin(\varphi_2-\varphi_1)-\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right]\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \left[\sin(\varphi_3-\varphi_2)-\sin(\varphi_4-\varphi_3)\right]\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}+\text{etc.}\right\}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{du}{d\varphi_1}=\frac{ab}{\varrho}\cdot K.$$

Berechnet man denselben Differentialquotienten aus Formel 16), so findet man das Resultat:

$$\frac{du}{d\varphi_1}=\frac{\varrho(a^2-b^2)}{ab}\left\{\left[\sin(\varphi_1+\varphi_n)+\sin(\varphi_2+\varphi_1)\right]+\left[\sin(\varphi_2+\varphi_1)+\sin(\varphi_3+\varphi_2)\right]\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \left[\sin(\varphi_3+\varphi_2)+\sin(\varphi_4+\varphi_3)\right]\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}+\text{etc.}\right\}$$

oder abgekürzt:

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{\varrho\,(a^2-b^2)}{ab}\cdot K'.$$

Nach Gl. 6) hat man ferner

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_1) = c.tg\,\varphi_2 \text{ etc., also } \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_1+2\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_3+\varphi_1-2\varphi_2)} = \frac{1+c}{1-c};$$

durch Multiplication des Zählers und Nenners der linken Seite mit $2\cos\frac{1}{2}(\varphi_3-\varphi_1)$ erhält diese die Form:

$$\frac{\sin(\varphi_2+\varphi_1)+\sin(\varphi_3+\varphi_2)}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)-\sin(\varphi_3-\varphi_2)}$$

so dass

$$\sin(\varphi_2+\varphi_1)+\sin(\varphi_3+\varphi_2) = \frac{1+c}{1-c}\left[\sin(\varphi_2-\varphi_1)-\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right],$$

also auch

$$K' = \frac{1+c}{1-c}\cdot K$$

wird. Da nun aber auch die beiden Werthe des Differentialquotienten $\frac{du}{d\varphi_1}$ einander gleich sein müssen, so erhält man durch Subtraction:

$$0 = \left[\frac{ab}{\varrho} - \frac{\varrho\,(a^2-b^2)(1+c)}{ab(1-c)}\right]\cdot K.$$

Nach Gl. 6) ist

$$c = \frac{C}{2(A+1)}, \text{ also } \frac{1+c}{1-c} = \frac{2(A+1)+C}{2(A+1)-C},$$

nach Gl. 4) aber

$$A = \frac{\varrho^2 b^2}{a^2(b^2-\varrho^2)} \text{ und } C = 2\cdot\frac{\varrho^2(a^2-b^2)+a^2b^2}{a^2(b^2-\varrho^2)};$$

daraus findet man weiter:

$$\frac{1+c}{1-c} = -\frac{a^2b^2}{\varrho^2(a^2-b^2)},$$

wodurch die letzte Gleichung des vorigen Absatzes übergeht in:

$$0 = \frac{2ab}{\varrho}\cdot K.$$

Dieses Product kann nur Null sein, wenn der erste Factor $\frac{2ab}{\varrho}$ oder der zweite Factor K gleich Null ist; zum Nullwerden des ersten Factors gehört $\varrho=\infty$, was unmöglich ist; folglich ist $K=0$ und daher auch $K'=0$. Dann folgt aber aus beiden Formen des Differentialquotienten, dass $\frac{du}{d\varphi_1}=0$ ist oder dass der Umfang bei jeder Verschiebung des Vielecks constant bleibt.

Legt man umgekehrt an die innere Ellipse Tangenten in Punkten, deren Parameter ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 etc. so gewählt sind, dass ein geschlossenes Vieleck entsteht, dessen Ecken auf einer confocalen Ellipse liegen, so ist der Umfang dieses Vielecks ebenfalls constant, wie man auch das Vieleck verschieben mag. Man kann nun aber diesen Umfang auch durch die Axen der inneren Ellipse und die Parameter ϑ ausdrücken; das Differential dieser Function muss dann, weil sie constant ist, gleich Null sein, was in Bezug auf alle Vielecke von gleicher Seitenzahl, welche der inneren Ellipse umgeschrieben sind, einem **Minimum** entspricht, weil man, wenn man sich für einen Augenblick die äussere Ellipse ganz wegdenkt, die ϑ so wählen kann, dass der Umfang ins Unendliche wächst, während er immer grösser sein muss als der Umfang der inneren Ellipse. Alle diese Resultate sind in folgendem Satze enthalten:

F. Ein geschlossenes Vieleck, das einer Ellipse eingeschrieben und zugleich einer confocalen Ellipse umgeschrieben ist, besitzt fortwährend denselben Umfang, auch wenn man dasselbe so verschiebt, dass seine Ecken immer auf der ersten Ellipse liegen und seine Seiten immer die confocale Ellipse berühren, und dabei hat dasselbe unter allen Vielecken, die man der ersten Ellipse einschreiben kann, den **grössten**, und unter allen Vielecken, die man der zweiten Ellipse umschreiben kann, den **kleinsten** Umfang.

Unsere seitherigen Untersuchungen geben uns ferner die Mittel an die Hand, den Umfang eines derartigen Vielecks zu berechnen, wobei wir uns auf die Betrachtung des Dreiecks, Sechsecks und Vierecks beschränken wollen. Da nämlich der Umfang sich nicht ändert, wenn man φ_1 willkürlich annimmt, so kann man $\varphi_1 = 0$ setzen und daraus für jedes Vieleck nach den Gleichungen 5) die Werthe der folgenden Parameter berechnen. Diese hat man dann in Formel 15), welche den Umfang als Function dieser Parameter ausdrückt, einzuführen; die dort vorkommende Grösse ϱ ist gleich $\sqrt{a^2 - a_1^2} = \sqrt{b^2 - b_1^2}$ und kann aus den für jedes einzelne Vieleck gefundenen Werthen von a_1 und b_1, in a und b ausgedrückt, berechnet werden.

So hat man beim Dreieck für $\varphi_1 = 0$ noch

$$\varphi_3 = 360^0 - \varphi_2, \text{ also } u = \frac{2ab}{\varrho}[2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin^2 \varphi_2] = \frac{2ab}{\varrho}[2 - \cos\varphi_2 - \cos^2\varphi_2];$$

aus Gleichung 5) folgt aber

$$t_2^2 = A, \text{ also } \cos\varphi_2 = \frac{1-A}{1+A},$$

wodurch

$$u = \frac{4abA(3+A)}{\varrho(1+A)^2}$$

erhalten wird. Ferner ist

$$A = \frac{\varrho^2 b^2}{a^2(b^2-\varrho^2)} \text{ und } \varrho^2 = a^2 - a_1^2 = \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}[2\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2} - (a^2+b^2)],$$

wodurch man in den Stand gesetzt ist, alle zur Berechnung von u nöthigen Grössen zu finden; die ausgeführte Rechnung liefert ein complicirtes, wenig übersichtliches Resultat.

Besser fährt man in dieser Beziehung mit dem Sechseck. Für $\varphi_1 = 0$ ist hier $\varphi_3 = 180^0 - \varphi_2$, $\varphi_4 = 180^0$, $\varphi_6 = 180^0 - \varphi_5$, wozu noch die aus dem Satze C. folgenden Relationen $\varphi_5 = 360^0 - \varphi_3$, $\varphi_6 = 360^0 - \varphi_2$ kommen, so dass also für $\varphi_1 = 0$, $\varphi_3 = 180^0 - \varphi_2$, $\varphi_4 = 180^0$, $\varphi_5 = 180^0 + \varphi_2$, $\varphi_6 = 360^0 - \varphi_2$ ist. Damit wird

$$u = \frac{2ab}{\varrho}\left[\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 + \sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \cos^2\varphi_2\right]$$
$$= \frac{4ab}{\varrho}\left[2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi_2 + \cos^2\varphi_2\right] = \frac{4ab}{\varrho}\left[1 - \cos\varphi_2 + \cos^2\varphi_2\right],$$

und weil auch hier wiederum $\cos\varphi_2 = \dfrac{1-A}{1+A}$ ist, so erhält man

$$u = \frac{4ab}{\varrho}\cdot\frac{1+3A^2}{(1+A)^2}.$$

Nun ist

$$A = \frac{\varrho^2 b^2}{a^2(b^2-\varrho^2)} \quad \text{und} \quad \varrho^2 = a^2 - a^2\frac{(a+b)^2 - b^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2},$$

woraus

$$A = \frac{b}{2a+b}$$

folgt. Dies giebt für das in eine Ellipse eingeschriebene Sechseck grössten Umfangs den merkwürdig einfachen Ausdruck:

$$u = 4\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = 4\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}.$$

Es gelingt nicht, u durch a_1 und b_1 in einfacher Weise auszudrücken, d. h. den Umfang des einer Ellipse eingeschriebenen Sechsecks kleinsten Umfangs zu finden; vielmehr würde dazu die Lösung einer Gleichung des vierten Grades erforderlich sein.

Dagegen lässt sich beim Viereck u sowohl durch a und b, als auch durch a_1 und b_1 darstellen. Für $\varphi_1 = 0$ ist nämlich $\varphi_2 = 90^0$, $\varphi_3 = 180^0$ und $\varphi_4 = 270^0$. Daher hat man

$$u = \frac{2ab}{\varrho}\left[\sin^2 45 + \sin^2 45 + \sin^2 45 + \sin^2 45\right] = \frac{4ab}{\varrho}$$

und, weil hier $\varrho^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ ist,

$$u = 4\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt zunächst $u = 4\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 2\varrho^2}$; dann aber folgt aus $\varrho^2(a^2+b^2) = a^2b^2$, wenn man a und b durch a_1 und b_1 ausdrückt, $\varrho^2 = a_1 b_1$, also ist

$$u = 4(a_1 + b_1).$$

Aus der Gleichung $\varrho^2 = a_1 b_1$ findet man auch noch $a^2 = a_1(a_1+b_1)$ und $b^2 = b_1(a_1+b_1)$, wodurch man aus den Axen einer Ellipse, welcher ein Viereck kleinsten Umfangs umgeschrieben ist, die Axen derjenigen Ellipse finden kann, auf welcher die Ecken dieses Vierecks liegen und für welche dasselbe ein Viereck grössten Umfangs ist. Dass Vierecke kleinsten und grössten Umfangs Parallelogramme sein müssen, schliesst man leicht aus Satz C.

Ueber das Viereck hat Steiner (Gesammelte Werke II, 411 flgg.) noch eine Reihe schöner Sätze aufgestellt, deren Beweis aus den von uns entwickelten Formeln sich leicht herleiten lässt.

In eine Ellipse mit den Halbaxen a und b sei ein Viereck grössten Umfangs eingeschrieben; die Gleichungen der in seinen Eckpunkten, welche die Parameter φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 haben, gezogenen Tangenten sind, wenn man berücksichtigt, dass $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$, $\varphi_4 = 180^0 + \varphi_2$ ist:

$$\begin{aligned} bx \cos\varphi_1 + ay \sin\varphi_1 &= ab, \\ bx \cos\varphi_2 + ay \sin\varphi_2 &= ab, \\ bx \cos\varphi_1 + ay \sin\varphi_1 &= -ab, \\ bx \cos\varphi_2 + ay \sin\varphi_2 &= -ab. \end{aligned}$$

Weil $a_1^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2}$ und $b_1^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$ ist, so erhält man $\lambda^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ und $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$; setzt man diese Werthe in Gl. 3) ein, so geht dieselbe nach leichter Rechnung über in:

$$a^2 \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + b^2 = 0,$$

woraus in Verbindung mit den oben gegebenen Gleichungen der Tangenten unmittelbar hervorgeht, dass jede derselben auf der folgenden senkrecht steht.

Umgekehrt: Beschreibt man um die Ellipse mit den Halbaxen a und b ein Rechteck, so ist $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$ und $\varphi_4 = 180^0 + \varphi_2$ und ausserdem ist $a^2 \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + b^2 = 0$; die beiden nach Gl. 3) gebildeten Gleichungen aber heissen hier:

$$\lambda^2 + \mu^2 - 1 = (1 - \lambda^2 + \mu^2)\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + (1 + \lambda^2 - \mu^2)\sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$
$$-(\lambda^2 + \mu^2 - 1) = (1 - \lambda^2 + \mu^2)\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + (1 + \lambda^2 - \mu^2)\sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$

woraus

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1 \text{ und } (1 - \lambda^2 + \mu^2) + (1 + \lambda^2 - \mu^2)\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = 0$$

oder

$$\frac{1 - \lambda^2 + \mu^2}{1 + \lambda^2 - \mu^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

folgt; dies giebt aber

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} \text{ und } \mu^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2} \text{ oder } a_1^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2} \text{ und } b_1^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2},$$

was nur dann stattfinden kann, wenn das Viereck der Berührungspunkte ein Viereck grössten Umfangs ist. Man hat daher den Satz:

G. **Die Tangenten in den Eckpunkten eines Vierecks von grösstem Umfang bilden ein Rechteck; und umgekehrt: beschreibt man um irgend eine Ellipse ein Rechteck, so sind die Berührungspunkte die Eckpunkte eines derselben eingeschriebenen Vierecks von grösstem Umfang.**

Wenn man ferner die Gleichung der Verbindungslinie von φ_1 und φ_2, nämlich:

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)} + \frac{y}{b} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)} = 1$$

mit der Gleichung der Tangente an die innere Ellipse in dem Punkte x_{12} und y_{12}, nämlich:

$$\frac{x x_{12}}{a^2-\varrho^2}+\frac{y y_{12}}{b^2-\varrho^2}=1$$

vergleicht, so findet man für die Coordinaten des Berührungspunktes:

$$x_{12}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)},\quad y_{12}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

Ist das der äusseren Ellipse eingeschriebene Viereck ein Parallelogramm, so ist $\varphi_3=180^0+\varphi_1$ und $\varphi_4=180^0+\varphi_2$, und man erhält deshalb als Coordinaten der übrigen Berührungspunkte:

$$x_{23}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)},\qquad y_{23}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$-x_{34}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)},\qquad -y_{34}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$-x_{41}=\frac{a^2-\varrho^2}{a}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)},\qquad -y_{41}=\frac{b^2-\varrho^2}{b}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Man sieht sofort, dass die Verbindungslinien gegenüberliegender Berührungspunkte durch den Mittelpunkt gehen, was übrigens für jedes Vieleck von gerader Seitenzahl gilt.

Wenn man ferner der Kürze halber $\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)=s$ und $\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)=d$ setzt, so erhält man aus diesen Coordinaten die Gleichungen der Normalen in den Berührungspunkten:

$$y=\frac{a}{b}x\ tg s-\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\sin s}{\cos d},$$

$$y=-\frac{a}{b}x\ cotg s+\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\cos s}{\sin d},$$

$$y=\frac{a}{b}x\ tg s+\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\sin s}{\cos d},$$

$$y=-\frac{a}{b}x\ cotg s+\frac{a^2-b^2}{b}\cdot\frac{\cos s}{\sin d}.$$

Die Diagonalen des von diesen vier Normalen gebildeten Vierecks besitzen die Gleichungen:

$$y=\frac{a}{b}x\,tg\varphi_1 \text{ und } y=\frac{a}{b}x\,tg\varphi_2;$$

denn multiplicirt man die erste Normalengleichung mit $\frac{\cos s}{\sin d}$ und die vierte mit $\frac{\sin s}{\cos d}$ und subtrahirt, so kommt $y=\frac{a}{b}x\,tg(s+d)=\frac{a}{b}x\,tg\varphi_1$; dasselbe Resultat aber erhält man, wenn man die zweite Normalengleichung mit $\frac{\sin s}{\cos d}$ und die dritte mit $\frac{\cos s}{\sin d}$ multiplicirt und dann subtrahirt. Behandelt man in ähnlicher Weise die erste und zweite und die dritte und vierte Normalengleichung, so erscheint die oben angegebene Gleichung der zweiten Diagonale. Aus der Form der Diagonalengleichungen erkennt man, dass die Diagonalen sich im Mittelpunkte schneiden, und aus ihrer Zusammenstellung mit der oben hergeleiteten, für das Viereck geltenden Relation $a^2 \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 + b^2 = 0$, dass die beiden Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

H. **Wenn man daher um eine Ellipse ein Parallelogramm kleinsten Umfangs beschreibt, so bilden die Normalen in den Berührungspunkten eine Raute.**

Aber auch der umgekehrte Satz ist giltig. Die Gleichungen der Normalen in den Eckpunkten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 eines der Ellipse mit den Halbmessern a_1, b_1 eingeschriebenen Parallelogramms sind nämlich:

$$\begin{aligned}
a_1 x \, tg\,\varphi_1 - b_1 y &= (a_1^2 - b_1^2) \sin\varphi_1, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_2 - b_1 y &= (a_1^2 - b_1^2) \sin\varphi_2, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_1 - b_1 y &= -(a_1^2 - b_1^2) \sin\varphi_1, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_2 - b_1 y &= -(a_1^2 - b_1^2) \sin\varphi_2,
\end{aligned}$$

also die Gleichungen der Diagonalen des durch sie gebildeten Vierecks:

$$\begin{aligned}
a_1 x \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - b_1 y \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= 0, \\
a_1 x \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 \sin\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + b_1 y \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Sollen dieselben aufeinander senkrecht stehen, so muss $a_1^2 \, tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2 - b_1^2 = 0$ sein. Aus dieser Relation und den Gleichungen der zwei Tangenten in φ_1 und φ_2 müssen φ_1 und φ_2 eliminirt werden, um den Ort des Schnittpunktes dieser letzteren zu erhalten. Erhebt man demgemäss die Gleichungen der Tangenten:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} tg\,\varphi_1 = \sqrt{1 + tg^2\varphi_1}, \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} tg\,\varphi_2 = \sqrt{1 + tg^2\varphi_2}$$

ins Quadrat und subtrahirt, so kommt nach Weghebung des Factors $tg\,\varphi_1 - tg\,\varphi_2$:

$$\frac{2xy}{a_1 b_1} + \frac{y^2}{b_1^2}(tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2) = tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2;$$

durch Addition der Quadrate aber erhält man:

$$\frac{2x^2}{a_1^2} + \frac{2xy}{a_1 b_1}(tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2) + \frac{y^2}{b_1^2}(tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2) = 2 + (tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2).$$

Multiplicirt man die erste der zwei letzten Gleichungen mit $tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2$ und zieht sie von der letzten ab, so bleibt:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2}(tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2)^2 + \frac{y^2}{b_1^2}(tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2) \\
= 2 + (tg^2\varphi_1 + tg^2\varphi_2) - (tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2)^2
\end{aligned}$$

oder reducirt:

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2} - 1\right) = \left(\frac{y^2}{b_1^2} - 1\right) tg\,\varphi_1 \, tg\,\varphi_2.$$

Dies giebt mit der Relation $a_1^2 \, tg^2\varphi_1 \, tg^2\varphi_2 = b_1^2$ als Gleichung des Ortes:

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2}-1\right)^2=\frac{b_1^2}{a_1^2}\left(\frac{y^2}{b_1^2}-1\right)^2.$$

Zieht man die Wurzel und nimmt das positive Zeichen, so ist

$$\frac{x^2}{a_1^2-a_1 b_1}+\frac{y^2}{b_1^2-a_1 b_1}=1,$$

was eine confocale Hyperbel bedeutet; diese ist aber als Ort unmöglich, weil sich die Tangenten in φ_1 und φ_2 immer ausserhalb der Ellipse schneiden. Bei der Wahl des negativen Zeichens wird aber die Gleichung des Ortes:

$$\frac{x^2}{a_1^2+a_1 b_1}+\frac{y^2}{b_1^2+a_1 b_1}=1,$$

welche genau der erwarteten confocalen Ellipse entspricht. Man kann folglich den Satz aufstellen:

J. Wenn man in eine Ellipse ein Parallelogramm so einschreibt, dass die Normalen in seinen Ecken eine Raute bilden, so erzeugen die Tangenten in seinen Ecken ein Parallelogramm kleinsten Umfangs.

Der Flächeninhalt eines Vielecks kleinsten und grössten Umfangs lässt sich, wenn man die Parameter seiner Ecken, wie gewöhnlich, durch φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 etc., und die Winkel, welche die Radienvectoren ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 etc. nach den Ecken mit der Abscissenaxe bilden, durch ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 etc. bezeichnet, so dass $tg\,\vartheta_1=\frac{b}{a}\,tg\,\varphi_1$ etc., ausdrücken durch:

$$2F=\varrho_1\varrho_2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)+\varrho_2\varrho_3\sin(\vartheta_3-\vartheta_1)+\text{etc.}$$

Es ist nun

$$\varrho_1\varrho_2=\sqrt{(a^2\cos^2\varphi_1+b^2\sin^2\varphi_1)(a^2\cos^2\varphi_2+b^2\sin^2\varphi_2)}$$
$$=a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}tg^2\varphi_1\right)\left(1+\frac{b^2}{a^2}tg^2\varphi_2\right)}$$

oder

$$\varrho_1\varrho_2=a^2\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\vartheta_1}\,\frac{\cos\varphi_2}{\cos\vartheta_2},$$

also

$$\varrho_1\varrho_2\sin(\vartheta_2-\vartheta_1)=a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2(tg\,\vartheta_2-tg\,\vartheta_1)$$
$$=a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\frac{b}{a}(tg\,\varphi_2-tg\,\varphi_1)=ab\sin(\varphi_2-\varphi_1);$$

folglich:

17) $$2F=ab\,[\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\sin(\varphi_3-\varphi_2)+\sin(\varphi_4-\varphi_3)+\cdots].$$

Für das Viereck erhält man hieraus:

$$F_4=2ab\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

Wir wollen nun mit Hinzunahme der für das Viereck geltenden Relation $a^2\,tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2+b^2=0$ untersuchen, wann $\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ ein Maximum oder Minimum ist. Durch partielle Differentiation erhält man nach der Factorenmethode die beiden Bedingungsgleichungen:

$$-\cos(\varphi_2-\varphi_1)+q\cdot\frac{tg\,\varphi_2}{\cos^2\varphi_1}=0 \text{ und } \cos(\varphi_2-\varphi_1)+q\cdot\frac{tg\,\varphi_1}{\cos^2\varphi_2}=0,$$

d. h.

$$\sin 2\varphi_1+\sin 2\varphi_2=0 \text{ oder } \sin(\varphi_2+\varphi_1)\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0.$$

Nimmt man zuerst $\varphi_1+\varphi_2=180^0$, so sind die Seiten des Parallelogramms den Halbaxen der Ellipse parallel. Dann folgt aber noch $tg\,\varphi_1=\frac{b}{a}$ und $tg\,\varphi_2=-\frac{b}{a}$, woraus wir schliessen, dass $tg(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{-2ab}{a^2-b^2}$ und $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, also $F_4=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}=4a_1b_1$ ist, und dies ist das Minimum von F_4. Setzt man dagegen $\varphi_2-\varphi_1=90^0$, so muss $\varphi_1=0$ und $\varphi_2=90^0$ sein, oder das Parallelogramm wird durch die Verbindungslinien der Endpunkte der Axen gebildet; dann ist aber $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=1$ und $F_4=2ab=2(a_1+b_1)\sqrt{a_1b_1}$ und dies ist das Maximum von F_4.

Andererseits ist der Flächeninhalt des um die äussere Ellipse durch die Punkte φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 beschriebenen Rechtecks

$$R=2\varrho_1\sin(\varepsilon_1-\vartheta_1).2\varrho_2\sin(\varepsilon_2-\vartheta_2),$$

wo ε_1 und ε_2 die Winkel bezeichnen, welche die Normalen in φ_1 und φ_2 mit der Abscissenaxe machen. Weil nun $\varrho_1\varrho_2=a^2\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}$ ist, so hat man:

$$R=4a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon_2\,(tg\,\varepsilon_1-tg\,\vartheta_1)(tg\,\varepsilon_2-tg\,\vartheta_2),$$

und weil $\varepsilon_2=90^0+\varepsilon_1$, also $\sin(\varepsilon_2-\varepsilon_1)=1$, folglich $tg\,\varepsilon_2-tg\,\varepsilon_1=\frac{1}{\cos\varepsilon_1\cdot\cos\varepsilon_2}$ ist, so erhält man jetzt:

$$R=4a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,\frac{(tg\,\varepsilon_1-tg\,\vartheta_1)(tg\,\varepsilon_2-tg\,\vartheta_2)}{tg\,\varepsilon_2-tg\,\varepsilon_1}.$$

Nun ist aber

$$tg\,\varepsilon_1=-\frac{b}{a}\cot g\,\varphi_1,\quad tg\,\varepsilon_2=-\frac{b}{a}\cot g\,\varphi_2,\quad tg\,\vartheta_1=\frac{b}{a}tg\,\varphi_1,\quad tg\,\vartheta_2=\frac{b}{a}tg\,\varphi_2,$$

daher bekommt man endlich

$$R=4a^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{(\cot g\,\varphi_1+tg\,\varphi_1)(\cot g\,\varphi_2+tg\,\varphi_2)}{\cot g\,\varphi_1-\cot g\,\varphi_2}=\frac{4ab}{\sin(\varphi_2-\varphi_1)};$$

durch Multiplication mit der oben erhaltenen Gleichung $F_4=2ab\sin(\varphi_2-\varphi_1)$ entspringt:

$$R.F_4=8a^2b^2,$$

wie Steiner a. a. O. S. 413 behauptet. Dem Minimum des Parallelogramms entspricht demgemäss das Maximum des Rechtecks und umgekehrt.

Steiner giebt a. a. O. S. 413 noch einen Satz über das Parallelogramm und Rechteck, den wir hier etwas verkürzt folgen lassen, um ihn dann analytisch zu verificiren.

K. Die vier Ecken jedes der genannten Rechtecke liegen mit den beiden Brennpunkten der Ellipse in einer gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}$, welche mit der Ellipse concentrisch ist; und ebenso liegen die Ecken des Parallelogramms mit den Brennpunkten der Ellipse in einer andern gleichseitigen Hyperbel $\mathfrak{H}'$, welche mit $\mathfrak{H}$ die Strecke zwischen den beiden Brennpunkten als Durchmesser gemein hat. Die Hauptaxen dieser beiden zusammengehörigen gleichseitigen Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ bilden einen constanten Winkel von 45^0 und zudem ist die Summe der Biquadrate dieser Axen constant und zwar dem Biquadrate jenes gemeinschaftlichen Durchmessers gleich. Die auf diese Weise bestimmten zwei Schaaren gleichseitiger Hyperbeln sind im Ganzen nur eine und dieselbe Schaar und als solche einfach dadurch bestimmt, dass sie die Strecke zwischen den Brennpunkten als Durchmesser gemein haben. Ihre Tangenten in den Scheiteln ihrer Hauptaxen berühren sämmtlich diejenige unter ihnen, welche die grösste Axe, nämlich eben jenen gemeinschaftlichen Durchmesser zur Hauptaxe hat. Daher liegen die Hauptscheitel aller dieser Hyperbeln in einer Lemniskate, welche concentrisch ist mit der Ellipse und die Strecke zwischen den Brennpunkten zur Hauptaxe hat.

Um dies zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass die Gleichung einer Schaar durch die Brennpunkte gehender gleichseitiger Hyperbeln die Form haben muss:

$$x^2 - y^2 + 2Bxy = a^2 - b^2.$$

Damit eine Hyperbel der Schaar vollständig bestimmt sei, muss noch einer ihrer Punkte gegeben sein, wozu wir den Schnittpunkt der in φ_1 und φ_2 gelegten Tangenten nehmen, welcher die Coordinaten

$$x = a \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad \text{und} \quad y = b \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

hat. Die Substitution dieser Werthe ergiebt:

$$a^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1) - b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1) + 2abB\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_2+\varphi_1)$$
$$= (a^2-b^2)\cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)$$

oder nach Verwandlung der Functionen der halben Winkel in solche der ganzen:

$$a^2[\cos(\varphi_2+\varphi_1) - \cos(\varphi_2-\varphi_1)] + b^2[\cos(\varphi_2+\varphi_1) + \cos(\varphi_2-\varphi_1)]$$
$$= -2abB\sin(\varphi_2+\varphi_1),$$

was nach leichter Reduction übergeht in

$$b^2 - a^2 tg\varphi_1\, tg\varphi_2 = -abB\,(tg\varphi_1 + tg\varphi_2).$$

Die nämliche Endgleichung hätte man aber auch erhalten, wenn man den Schnittpunkt der in φ_2 und φ_3 gelegten Tangenten auf die Hyperbel hätte fallen lassen, weil ja $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$ ist; und ebenso verhält es sich mit den beiden anderen Schnittpunkten. Daher ist

$$B = -\frac{b^2 - a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2}{a\,b\,(tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2)}.$$

Um diesen Ausdruck nur von dem Parameter φ_1 abhängig zu machen, multiplicire man auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $tg\,\varphi_1$ und wende die Relation $a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 + b^2 = 0$ an, wodurch

$$B = -\frac{2\,a\,b\; tg\,\varphi_1}{a^2\, tg^2\,\varphi_1 - b^2}$$

sich ergiebt und man in den Stand gesetzt wird, zu jedem φ_1 die zugehörige, durch die Brennpunkte und die Ecken des Rechtecks gehende Hyperbel $\mathfrak{H}$ zu construiren.

Substituiren wir in ähnlicher Weise in die Gleichung

$$x^2 - y^2 + 2B'xy = a^2 - b^2$$

die Coordinaten von φ_1, nämlich $x = a\,cos\,\varphi_1$ und $y = b\,sin\,\varphi_1$, so erhält man

$$B' = \frac{a^2\, tg^2\,\varphi_1 - b^2}{2\,a\,b\; tg\,\varphi_1};$$

die Substitution von $x = a\,cos\,\varphi_2$ und $y = b\,sin\,\varphi_2$ hätte das Resultat $\frac{a^2\, tg^2\,\varphi_2 - b^2}{2\,a\,b\; tg\,\varphi_2}$ geliefert, das mit jenem eben erhaltenen identisch ist, weil die Relation $a^2\, tg\,\varphi_1\, tg\,\varphi_2 + b^2$ sich auch schreiben lässt:

$$\frac{a^2\, tg^2\,\varphi_1 - b^2}{tg\,\varphi_1} = \frac{a^2\, tg^2\,\varphi_2 - b^2}{tg\,\varphi_2};$$

wegen $\varphi_3 = 180^0 + \varphi_1$ und $\varphi_4 = 180^0 + \varphi_2$ verhält es sich ebenso mit den übrigen zwei Eckpunkten des Parallelogramms.

Für ein gegebenes φ_1 findet man also eine zweite Hyperbel $\mathfrak{H}'$ aus der Schaar der durch die Brennpunkte gehenden Hyperbeln, welche durch die Eckpunkte des Parallelogramms grössten Umfangs geht. Da beide Hyperbeln $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ derselben Schaar durch die Brennpunkte gehender Hyperbeln angehören und denselben Mittelpunkt wie die gegebene Ellipse haben, so ist ihnen auch derjenige Durchmesser gemeinschaftlich, der durch die Brennpunkte begrenzt wird.

Die Länge A der Halbaxe der Hyperbel $\mathfrak{H}$ findet man nach den gewöhnlichen Regeln durch die Gleichung

$$A^4 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{1 + B^2};$$

ebenso ist für die Länge A' der Halbaxe der Hyperbel $\mathfrak{H}'$:

$$A'^4 = \frac{(a^2-b^2)^2}{1+B'^2}.$$

Weil aber, wie man leicht findet, $BB'+1=0$ ist, so geht diese Gleichung über in:

$$A'^4 = \frac{(a^2-b^2)^2 B^2}{1+B^2},$$

woraus sofort die von Steiner angegebene Relation $A^4 + A'^4 = (a^2-b^2)^2$ folgt.

Ferner ist die Gleichung der Hauptaxe der Hyperbel $\mathfrak{H}$:

$$By = (-1+\sqrt{1+B^2})\,x,$$

folglich die der Hyperbel $\mathfrak{H}'$:

$$y = (B-\sqrt{1+B^2})\,x;$$

die Tangente des Winkels beider Axen ist also gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{-1+\sqrt{1+B^2}-B(B-\sqrt{1+B^2})}{B+(-1+\sqrt{1+B^2})(B-\sqrt{1+B^2})},$$

dessen Werth sich bei der Entwickelung gleich 1 ergiebt; daher machen die Hauptaxen von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ den constanten Winkel 45°.

Die Gleichung einer Tangente an eine Hyperbel der Schaar im Punkte x_1, y_1 hat die Form:

$$x(x_1+By_1)+y(Bx_1-y_1) = a^2-b^2;$$

damit dieselbe Scheiteltangente sei, müssen die Coordinaten x_1 und y_1 erstens der Gleichung der Curve genügen, was man in folgender Weise ausdrücken kann:

$$x_1(x_1+By_1)+y_1(Bx_1-y_1) = a^2-b^2,$$

und zweitens der Gleichung der Hauptaxe, welche in rationalisirter Gestalt heisst:

$$x_1(Bx_1-y_1)-y_1(x_1+By_1) = 0.$$

Um diese Gleichungen zur Rechnung bequemer zu machen, setzen wir

$$Bx_1-y_1 = p \quad \text{und} \quad x_1+By_1 = q,$$

woraus wir durch Elimination von B die neue Relation

$$qx_1-py_1 = x_1^2+y_1^2$$

erhalten, während die erhaltenen drei Gleichungen übergehen in:

$$qx+py = a^2-b^2, \quad qx_1+py_1 = a^2-b^2, \quad px_1-qy_1 = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergeben sich die Werthe:

$$x_1 = \frac{q}{p^2+q^2}\,(a^2-b^2) \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{p^2}{p^2+q^2}\,(a^2-b^2),$$

durch deren Substitution obige Relation sich in

$$q^2-p^2 = a^2-b^2$$

verwandelt. Sucht man daher die Enveloppe der geraden Linie $qx+py = a^2-b^2$, zwischen deren Coefficienten die Relation $q^2-p^2=a^2-b^2$ besteht, so findet man dafür die Gleichung:

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2,$$

wodurch die letzte der Behauptungen Steiner's in ihrem ersten Theile erwiesen ist. Um auch die Richtigkeit des zweiten darzuthun, hat man aus der Gleichung der Curve

$$x^2 - y^2 + 2Bxy = a^2 - b^2$$

und der rationalisirten Gleichung der Hauptaxe

$$B(x^2 - y^2) = 2xy$$

den Parameter B zu eliminiren, wovon das Resultat ist:

$$(x^2+y^2)^2 = (a^2-b^2)(x^2-y^2),$$

d. h. die Gleichung einer Lemniskate, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt. Die von Steiner a. a. O. formulirten Umkehrungen ergeben sich aus dem Mitgetheilten von selbst.

Bensheim, 2. September 1887.

VII.

Zusammenhang zwischen particulären und allgemeinen Integralen gewisser Differentialgleichungen.

Von

Dr. Bochow

in Burg bei Magdeburg.

I.

Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

1) $$y' + f_1(x)y = f_2(x)$$

lässt sich nach einer Methode entwickeln, die auch auf Gleichungen höherer Ordnung anwendbar ist: ich multiplicire sie mit einer noch unbekannten Function w,

2) $$wy' + wf_1(x)y = wf_2(x),$$

und denke sie mir in dieser Form identisch mit dem entwickelten Differentialquotienten des Productes (yw), mit

3) $$wy' + w'y = \frac{d(wy)}{dx},$$

so erhalte ich durch gliedweise Gleichsetzung zur Bestimmung der zwei unbekannten Functiohen y und w die zwei Gleichungen

4a) $$w' = w f_1(x),$$

4b) $$\frac{d(wy)}{dx} = w f_2(x),$$

deren erste (a beliebige Constante) liefert

$$w = a e^{\int f_1(x)\,dx},$$

mithin

$$\frac{d(y e^{\int f_1(x)\,dx})}{dx} = e^{\int f_1(x)\,dx} f_2(x),$$

5a) $$y = e^{-\int f_1(x)\,dx}\left[\int f_2(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx}\,dx + c\right]$$

als allgemeine Lösung von

5b) $$y' + 2f_1(x)y = f_2(x).$$

II.

Zunächst die einfachere lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

6) $$y'' + 2f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$$

behandeln wir ganz ähnlich.

1. Ich gebe durch identische Umgestaltung mittels zweier neuen unbekannten Functionen w und u der Gleichung Nr. 6) die folgende Form:

$$7)\qquad wy''+2wf_1(x)y'+[wf_2(x)+u]y=uy,$$

so dass ich sie als identisch ansehen kann mit der folgenden Entwickelung des zweiten Differentialquotienten des Productes (wy), mit

$$8)\qquad wy''+2w'y'+w''y=\frac{d^2(wy)}{dx^2};$$

so liefert gliedweise Gleichsetzung zur Bestimmung der drei unbekannten Functionen w, u, y die drei Gleichungen

$$9a)\qquad w'=wf_1(x),$$

$$9b)\qquad w''=wf_2(x)+u,$$

$$9c)\qquad \frac{d^2(wy)}{dx^2}=uy,$$

deren erste (c bel. Const.) giebt

$$10a)\qquad w=ce^{\int f_1(x)\,dx};$$

nochmalige Differentiation von 9a) liefert in Verbindung mit 9b)

$$u=w[f'_1(x)+f_1(x)^2-f_2(x)],$$

mithin

$$\frac{d^2(wy)}{dx^2}=(wy)[f'_1(x)+f_1(x)^2-f_2(x)];$$

setzen wir also

$$wy=z,$$

$$10b)\qquad y=\frac{z}{c}e^{-\int f_1(x)\,dx},$$

so ist z zu bestimmen aus

$$10c)\qquad \frac{d^2z}{dx^2}=z[f'_1(x)+f_1(x)^2-f_2(x)].$$

Nun substituiren wir

$$\frac{dz}{dx}=zv,$$

also

$$z=ae^{\int v\,dx}\quad (a \text{ bel. Const.}),$$

$$11a)\qquad y=\frac{a}{c}e^{\int v\,dx-\int f_1(x)\,dx},$$

$$11b)\qquad v=f_1(x)+\frac{d\log y}{dx},$$

dann wird

$$\frac{d^2z}{dx^2}=zv'+z'v=zv'+zv^2,$$

also v ist zu bestimmen aus

$$11)\qquad v'+v^2=f'_1(x)+f_1(x)^2-f_2(x).$$

2. Bezeichnen wir in 11a) noch $a:c$ durch eine Constante c, so können wir sagen:

Die Lösungen y und v der Gleichungen

$$12a)\qquad y''+2f_1(x)y'+f_2(x)y=0,$$

resp.

12b) $$v' + v^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x)$$

hängen zusammen durch die Beziehungen

12c) $$y = c e^{\int v\,dx - \int f_1(x)\,dx},$$

12d) $$v = f_1(x) + \frac{d \log y}{dx} = f_1(x) + \frac{y'}{y}.$$

3. Nun ist Nr. 12a) in einem Falle lösbar, wenn nämlich $f_2(x) = 0$; dann wird nach Nr. 5 (a und b bel. Const.)

$$y = a \int e^{-2\int f_1(x)\,dx}\,dx + b,$$

mithin

$$v = f_1(x) + \frac{a e^{-2\int f_1(x)\,dx}}{a \int e^{-2\int f_1(x)\,dx}\,dx + b}$$

die allgemeine Lösung von

13a) $$v' + v^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2$$

oder, wenn wir in dem Ausdruck für v statt $(b:a)$ eine Constante c schreiben, so lautet von Nr. 13a) die allgemeine Lösung

13b) $$v = f_1(x) + \frac{e^{-2\int f_1(x)\,dx}}{\int e^{-2\int f_1(x)\,dx}\,dx + c}.$$

4. Haben wir nun eine beliebige Gleichung der Form

$$v' + v^2 = \varphi(x),$$

und gelingt es uns, eine particuläre Lösung $v_1 = f_1(x)$ derselben aufzustellen, so ist auch

$$v' + v^2 = v'_1 + v_1^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2;$$

von dieser Gleichung aber giebt Nr. 13b) die allgemeine Lösung. Mithin:

Ist

14a) $$v = v_1$$

eine particuläre Lösung von

14b) $$v' + v^2 = \varphi(x),$$

so lautet die allgemeine Lösung

14c) $$v = v_1 + \frac{e^{-2\int v_1\,dx}}{\int e^{-2\int v_1\,dx}\,dx + c} = v_1 + \frac{d}{dx} \log\left[\int e^{-2\int v_1\,dx}\,dx + c\right].$$

5. Wir kehren nun zu den Gleichungen 12) zurück: y_1 resp. v_1 seien particuläre Lösungen von 12a) resp. 12b), und zwar solche, die durch die Gleichungen 12c) resp. 12d) zusammenhängen; so können wir, da wir die allgemeine Lösung von 12b) nach Nr. 14) durch v_1, dieses aber nach 12d) durch y_1, ebenso aber auch mittels 12c) y durch v auszudrücken im Stande sind, y sowohl wie v ausdrücken durch y_1 und v_1, die allgemeinen Lösungen von 12a) und 12b) ausdrücken durch irgendwelche particuläre Lösungen einer von beiden.

Nr. 14c) in Nr. 12c) einsetzend erhalten wir

$$y = c_1 e^{\int v_1\,dx - \int f_1(x)\,dx} \left\{ \int e^{-2\int v_1\,dx}\,dx + c_2 \right\}.$$

Beachten wir, dass

so kommt
$$y_1 = a e^{\int v_1 dx - \int f_1(x) dx}, \text{ also } e^{\int v_1 dx} = b y_1 e^{\int f_1(x) dx},$$
$$y = b c_1 y_1 \left\{ \int \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{b^2 y_1^2} dx + c_2 \right\},$$
oder, wenn wir anstatt $bc_1 : b^2$ und $bc_1 c_2$ zwei Constanten A und B setzen,
$$y = y_1 \left\{ A \int \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{y_1^2} dx + B \right\}.$$
Setzen wir dagegen in 14c) $v_1 = f_1(x) + \frac{d \log y_1}{dx}$, so wird
$$v = f_1(x) + \frac{y'_1}{y_1} + \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{y_1^2 \left\{ \int \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c \right\}}.$$

Zusammenfassend können wir sagen:

Sind y_1 und v_1 beliebige particuläre Lösungen von

15a) $$y'' + 2 f_1(x) y' + f_2(x) y = 0$$
resp.
15b) $$v' + v^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x),$$
so lauten die allgemeinen Integrale:

1. y durch y_1 resp. v durch v_1 ausgedrückt

15c) $$y = y_1 \left\{ A \int \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{y_1^2} dx + B \right\},$$

15d) $$v = v_1 + \frac{e^{-2\int v_1 dx}}{\int e^{-2\int v_1 dx} dx + c};$$

2. y durch v_1 und v durch y_1 ausgedrückt

15e) $$y = e^{\int v_1 dx - \int f_1(x) dx} \left\{ A \int e^{-2\int v_1 dx} dx + B \right\},$$

15f) $$v = f_1(x) + \frac{y'_1}{y_1} + \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{y_1^2 \left\{ \int \frac{e^{-2\int f_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c \right\}}.$$

Für den Specialfall $f_1(x) = 0$, $-f_2(x) = \varphi(x)$ gesetzt, erhalten wir:

Sind y_1 resp. v_1 particuläre Lösungen von

16a) $$y'' = y\, \varphi(x),$$
resp.
16b) $$v' + v^2 = \varphi(x),$$
so lauten die allgemeinen Integrale:

16c) $$y = y_1 \left\{ A \int \frac{dx}{y_1^2} + B \right\},$$

16d) $$v = v_1 + \frac{e^{-2\int v_1 dx}}{\int e^{-2\int v_1 dx} dx + c},$$

16e) $$y = e^{\int v_1 dx} \left\{ A \int e^{-2\int v_1 dx} dx + B \right\},$$

16f) $$v = \frac{y'_1}{y_1} + \frac{1}{y_1^2 \left\{ \int \frac{dx}{y_1^2} + c \right\}}.$$

III.

Einfachere Ausdrücke ergiebt die Zurückführung der allgemeinen Lösung auf zwei particuläre Lösungen: Sind y_1 und y_2 solche von Nr. 15a), so lautet die allgemeine Lösung offenbar

17a) $$y = Ay_1 + By_2,$$

A und B beliebige Constanten. Wenn nun y_1 und y_2 particuläre Lösungen von Nr. 15a) sind, so müssen nach Nr. 12d) auch die Ausdrücke

18a) $$v_1 = f_1(x) + \frac{y'_1}{y_1} \text{ und } v_2 = f_1(x) + \frac{y'_2}{y_2}$$

particuläre Lösungen von 15b) sein; und sind v_1 und v_2 solche von 15b), so müssen nach Nr. 12c) auch die Ausdrücke

18b) $$y_1 = c\,e^{\int v_1\,dx - \int f_1(x)\,dx} \text{ und } y_2 = c\,e^{\int v_2\,dx - \int f_1(x)\,dx}$$

particuläre Lösungen von 15a) sein.

Verbindung von 17a) und 18b) liefert

$$y = e^{-\int f_1(x)\,dx}\left\{A e^{\int v_1\,dx} + B e^{\int v_2\,dx}\right\}.$$

Nr. 17a) in 12d) eingeführt giebt

$$v = f_1(x) + \frac{d}{dx} log(Ay_1 + By_2),$$

$$v = f_1(x) + \frac{y'_1 + cy'_2}{y_1 + cy_2},$$

und wenn wir 17b) in 12d) einführen,

$$v = f_1(x) + \frac{d}{dx} log\left(A e^{\int v_1\,dx - \int f_1(x)\,dx} + B e^{\int v_2\,dx - \int f_1(x)\,dx}\right)$$

$$= f_1(x) + \frac{(v_1 - f_1(x))A e^{\int v_1\,dx - \int f_1(x)\,dx} + (v_2 - f_1(x))B e^{\int v_2\,dx - \int f_1(x)\,dx}}{A e^{\int v_1\,dx - \int f_1(x)\,dx} + B e^{\int v_2\,dx - \int f_2(x)\,dx}},$$

$$v = \frac{v_1 e^{\int v_1\,dx} + c\,v_2\,e^{\int v_2\,dx}}{e^{\int v_1\,dx} + c\,e^{\int v_2\,dx}}.$$

Wir können also sagen:

Sind y_1 und y_2 resp. v_1 und v_2 je zwei beliebige particuläre Lösungen von

17a) $$y'' + 2f_1(x)\,y' + f_2(x)\,y = 0$$

resp.

17b) $$v' + v^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x),$$

so lauten die allgemeinen Lösungen:

1. y durch y_1 und y_2, v durch v_1 und v_2 ausgedrückt:

17c) $$y = Ay_1 + By_2,$$

17d) $$v = \frac{v_1 e^{\int v_1\,dx} + c v_2\,e^{\int v_2\,dx}}{e^{\int v_1\,dx} + c\,e^{\int v_2\,dx}};$$

2. y durch v_1 und v_2, v durch y_1 und y_2 ausgedrückt:

17e) $$y = e^{-\int f_1(x)\,dx}\{A e^{\int v_1 dx} + B e^{\int v_2 dx}\},$$

17f) $$v = f_1(x) + \frac{y'_1 + c y'_2}{y_1 + c y_2}.$$

Die Specialisirung $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = -\varphi(x)$ giebt

18a) $$y'' = y\,\varphi(x),$$

18b) $$v' + v^2 = \varphi(x),$$

18c) $$y = A y_1 + B y_2 = A e^{\int v_1 dx} + B e^{\int v_2 dx},$$

18d) $$v = \frac{v_1 e^{\int v_1 dx} + c v_2 e^{\int v_2 dx}}{e^{\int v_1 dx} + c e^{\int v_2 dx}} = \frac{y'_1 + c y'_2}{y_1 + c y_2}.$$

IV.

Der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

19) $$y'' + 2 f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$$

geben wir durch identische Umgestaltung mittels zweier Unbekannten w und u die Form

20) $$w y'' + 2 w f_1(x) y' + y[w f_2(x) + u] = w f_3(x) + u y,$$

so dass wir sie als identisch ansehen können mit

21) $$u y'' + 2 w' y' + w'' y = \frac{d^2(wy)}{dx}.$$

Gliedweise Gleichsetzung giebt zur Bestimmung der drei unbekannten Functionen w, u und y die drei Gleichungen

$$w' = w f_1(x), \quad w'' = w f_2(x) + u, \quad \frac{d^2(wy)}{dx^2} = w f_3(x) + u y,$$

deren erste beiden wieder liefern

22) $$v = a e^{\int f_1(x)\,dx},$$
$$u = w[f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x)],$$

mithin

23) $$\frac{d^2(wy)}{dx^2} = (yw)[f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x)] + w f_3(x)$$

oder, $yw = z$,

24) $$y = \frac{1}{a} z e^{-\int f_1(x)\,dx}$$

gesetzt,

25) $$\frac{d^2 z}{dx^2} = z[f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x)] + a e^{\int f_1(x)\,dx} f_3(x).$$

Nun führen wir zwei neue Unbekannte v und t ein, indem wir setzen

26a) $$\frac{dz}{dx} = z v + t,$$

also

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = z v' + z' v + t' = z v' + z v^2 + t v + t',$$

$$z(v' + v^2) + t' + v t = z[f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x)] + a e^{\int f_1(x)\,dx} f_3(x),$$

und setzen hierin die z enthaltenden, wie die von z freien Theile einander gleich:

26b) $$t' + vt = a f_3(x) e^{\int f_1(x)\,dx},$$

26c) $$v' + v^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x).$$

Nach Nr. 5) folgt aus 26b)

$$t = e^{-\int v\,dx}\left[a\int f_3(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx + \int v\,dx}\, dx + c\right],$$

aus 26a)

$$z = e^{\int v\,dx}\left[\int t e^{-\int v\,dx}\, dx + b\right],$$

mithin

$$z = e^{\int v\,dx}\left\{\int e^{-2\int v\,dx}\left[\int a f_3(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx + \int v\,dx}\, dx + c\right] dx + b\right\}.$$

Setzen wir dies in Nr. 24) ein, statt $c:a$ und $b:a$ zwei Constanten A und B schreibend, so kommt von

27a) $$y'' + 2 f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$$

als allgemeine Lösung

$$y = e^{\int v\,dx - \int f_1(x)\,dx}\left\{\int e^{-2\int v\,dx}\left[\int f_3(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx + \int v\,dx}\, dx + A\right] dx + B\right\},$$

falls v eine Lösung — man überzeugt sich leicht, dass es eine particuläre sein darf — von

27c) $$v' + v^2 = f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x)$$

darstellt. Es zeigt sich also, dass man die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung Nr. 27a) mit der rechten Seite $f_3(x)$ zu lösen im Stande ist, sobald die Differentialgleichung erster Ordnung Nr. 27c) die f_3 nicht enthält, wenn auch nur particulär, lösbar ist. Substituiren wir noch $v = f_1(x) + \frac{d \log \eta}{dx}$, so wird die allgemeine Lösung von

28a) $$y'' + 2 f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$$

28b) $$y = \eta\left\{\int \frac{e^{-2\int f_1(x)\,dx}}{\eta^2}\left[\int \eta f_3(x)\, e^{2\int f_1(x)\,dx}\, dx + A\right] dx + B\right\},$$

und η bedeutet eine beliebige Lösung der einfacheren Differentialgleichung zweiter Ordnung

28c) $$\eta'' + 2 f_1(x) \eta' + f_2(x) \eta = 0,$$

deren Coefficienten dieselben sind, deren rechte Seite aber gleich Null ist; es ist daher die allgemeine stets auf diese specielle zurückführbar.

V. Einige einfache Beispiele.

1.

Von $v' + v^2 = 0$ ist eine particuläre Lösung $v_1 = 0$, mithin nach Nr. 16) die allgemeine, $e^{-\int v\,dx} = a$ gesetzt,

29) $$v = \frac{a}{ax + c} = \frac{1}{x + c}.$$

Nach Nr. 27) lautet, so oft $f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x) = 0$, d. h. $f_2(x) = f'_1(x) + f_1(x)^2$, von

30a) $$y'' + 2f_1(x)y' + [f'_1(x) + f_1(x)^2]y = f_3(x)$$
die allgemeine Lösung, $e^{\int v\,dx} = e^{\int 0\,dx} = a$ gesetzt,
$$y = ae^{-\int f_1(x)\,dx}\left\{\int \frac{1}{a^2}\left[\int f_3(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx}\, a\,dx + A\right]dx + B\right\},$$
30b) $$y = e^{-\int f_1(x)\,dx}\left\{\int\int f_3(x)\, e^{\int f_1(x)\,dx}\,dx\,dx + C_1 x + C_2\right\}.$$
Also z. B. für $f_1(x) = a$ ist von
31a) $$y'' + 2ay' + a^2 y = f_3(x)$$
die allgemeine Lösung
31b) $$y = e^{-ax}\left\{\int\int f_3(x)\, e^{ax}\,dx\,dx + Ax + B\right\},$$
$f_3(x) = e^{bx}$,
32) $$\left|\begin{array}{c} y'' + 2ay' + a^2 y = e^{bx}, \\ y = \dfrac{e^{bx}}{(a+b)^2} + Axe^{-ax} + Be^{-ax} \end{array}\right|,$$
$f_3(x) = b$,
33) $$\left|\begin{array}{c} y'' + 2ay' + a^2 y = b, \\ y = \dfrac{b}{a^2} + Axe^{-ax} + Be^{-ax} \end{array}\right|.$$
In Nr. 30) $f_1(x) = ctg\,x$ setzend, erhalten wir
34) $$\left|\begin{array}{c} y'' + 2\,ctg\,x\,y' - y = f_3(x), \\ y = \dfrac{1}{sin\,x}\left\{\int\int f_3(x)\, sin\,x\,dx\,dx + Ax + B\right\} \end{array}\right|,$$
also für $f_3(x) = b$
35) $$\left|\begin{array}{c} y'' + 2\,ctg\,x\,y' - y = b, \\ y = -b + A\dfrac{x}{sin\,x} + \dfrac{B}{sin\,x} \end{array}\right|.$$

2.

Von $v' + v^2 = a^2$ sind zwei particuläre Lösungen
$$v_1 = +\sqrt{a} \quad \text{und} \quad v_2 = -\sqrt{a},$$
mithin nach Nr. 18) die allgemeine
36) $$v = \frac{+\sqrt{a}\, e^{+\int \sqrt{a}\,dx} - c\sqrt{a}\, e^{-\int\sqrt{a}\,dx}}{e^{\int\sqrt{a}\,dx} + ce^{-\int\sqrt{a}\,dx}} = \sqrt{a}\,\frac{e^{+\sqrt{a}x} + ce^{-\sqrt{a}x}}{e^{+\sqrt{a}x} - ce^{-\sqrt{a}x}}.$$
Nach Nr. 27) lautet also, wenn $f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x) = a$, d. h. $f_2(x) = f'_1(x) + f_1(x)^2 - a$, von
37a) $$y'' + 2f_1(x)y' + [f'_1(x) + f_1(x)^2 - a]y = f_3(x)$$
die allgemeine Lösung, $v = \sqrt{a}$ gesetzt,
37b) $$y = e^{-\int f_1(x)\,dx}\left\{e^{\sqrt{a}x}\int e^{-2\sqrt{a}x}\int f_3(x)\, e^{\sqrt{a}x}\, e^{\int f_1(x)\,dx}\,dx\,dx + C_1 e^{+\sqrt{a}x} + C_2 e^{-\sqrt{a}x}\right\}.$$
Z. B. für $f_1(x) = \varepsilon$, $f'_1(x) + f_1(x)^2 - a = \varkappa^2$, also $a = \varepsilon^2 - \varkappa^2$,

$$38)\quad \left|\begin{array}{c} y'' + 2\varepsilon y' + \varkappa^2 y = f_3(x), \\ y = e^{-\varepsilon x}\Big\{ e^{\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x}\int e^{-2\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x}\int f_3(x)\, e^{\varepsilon x+\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x}\, dx^2 + C_1 e^{+\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x} \\ + C_2 e^{-\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x}\Big\} \end{array}\right|;$$

$f_3(x) = 0$ ergiebt hieraus

$$39)\quad \left\{\begin{array}{l} y = e^{-\varepsilon x}\left(A e^{+\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x} + B e^{-\sqrt{\varepsilon^2-\varkappa^2}x}\right) \\ \text{als Lösung von} \\ \qquad y'' + 2\varepsilon y' + \varkappa^2 y = 0, \end{array}\right.$$

der Differentialgleichung des in widerstehendem Mittel schwingenden Pendels — durch welche Gleichung Verfasser auf die vorliegenden Untersuchungen geführt wurde.

$f_1(x) = \frac{1}{x}$ giebt aus Nr. 37)

$$40)\quad \left|\begin{array}{c} y'' + \frac{2y'}{x} - ay = f_3(x), \\ y = \frac{1}{x}\Big\{ e^{\sqrt{a}x}\int e^{-2\sqrt{a}x}\int f_3(x)\, x e^{\sqrt{a}x}\, dx\, dx + C_1 e^{+\sqrt{a}x} + C_2 e^{-\sqrt{a}x}\Big\} \end{array}\right|;$$

$f_3(x) = \frac{1}{x}$,

$$41)\quad \left|\begin{array}{c} y'' + \frac{2y'}{x} - ay = \frac{1}{x}, \\ y = \frac{A e^{+\sqrt{a}x} + B e^{-\sqrt{a}x}}{x} - \frac{1}{ax} \end{array}\right|.$$

3.

Von $v' + v^2 = a : x^2$ ist eine Lösung $v = b : x$, falls $b^2 - b = a$, d. h. $b = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a+1})$; vorausgesetzt, dass nicht $a = -\frac{1}{4}$, giebt dies die zwei particuläre Lösungen

$$v_1 = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}\cdot\frac{1}{x}, \quad v_2 = \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}\cdot\frac{1}{x},$$

mithin nach Nr. 18) die allgemeine Lösung

$$v = \frac{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2x}\, x^{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}} + c\,\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2x}\, x^{\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}}}{x^{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}} + c\, x^{\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}}}$$

oder nach einiger Umformung

$$42)\quad v = \frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{4a+1}}{2x}\,\frac{x^{\sqrt{4a+1}} - c}{x^{\sqrt{4a+1}} + c}.$$

Ist aber $a = -\frac{1}{4}$, so erhalten wir nur die eine particuläre Lösung $v_1 = \frac{1}{2x}$ und müssen Nr. 15) anwenden:

$$42\text{a})\quad v = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x(\log x + c)}.$$

Nach Nr. 27) ist, falls $f'_1(x) + f_1(x)^2 - f_2(x) = \frac{a}{x^2}$, also $f_2(x) = f'_1(x) + f_1(x)^2 - \frac{a}{x^2}$, von

43a) $y'' + 2f_1(x)y' + \left[f'_1(x) + f_1(x)^2 - \frac{a}{x^2}\right]y = f_3(x), \quad (a \gtrless -\tfrac{1}{4})$,

da wir $(a \gtrless -\tfrac{1}{4})$

$$v = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2} \cdot \frac{1}{x}, \text{ also } e^{\int v\,dx} = x^{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}}$$

setzen können, die allgemeine Lösung

43b) $$y = e^{\int f_1(x)\,dx} \left\{ \begin{array}{l} x^{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}} \int x^{-1-\sqrt{4a+1}} \int f_3(x)\, x^{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}} e^{\int f_1(x)\,dx}\, dx^2 \\ \qquad + C_1 x^{\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}} + C_2 x^{\frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}} \end{array} \right\}.$$

Dagegen für $a = -\tfrac{1}{4}$ erhalten wir

44) $$\left| \begin{array}{c} y'' + 2f_2(x)y' + \left[f'_1(x) + f_1(x)^2 + \frac{1}{4x^2}\right]y = f_3(x), \\ y = \sqrt{x}\, e^{-\int f_1(x)\,dx} \left\{ \int \frac{1}{x} \int f_3(x) \sqrt{x}\, e^{\int f_1(x)\,dx}\, dx^2 + A \log x + B \right\} \end{array} \right|.$$

Z. B. $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 0$ ergiebt:

45) $$a \gtrless -\tfrac{1}{4}, \quad \left| \begin{array}{c} y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{a}{x^2} y = 0, \\ y = A x^{\frac{-1+\sqrt{4a+1}}{2}} + B x^{\frac{-1-\sqrt{4a+1}}{2}} \end{array} \right|,$$

46) $$\left| \begin{array}{c} y'' + \frac{2y'}{x} + \frac{y}{4x^2} = 0, \\ y = \frac{1}{\sqrt{x}} (A \log x + B) \end{array} \right|.$$

Kleinere Mittheilungen.

III. Ueber eine Aufgabe aus der projectiven Geometrie des Raumes.
IV. Construction der Raumcurven dritter Ordnung aus imaginären Punkten.

(Hierzu Taf. I Fig. 1.)

I.

Die Aufgabe, die reellen Schnittpunkte der beiden Paare imaginärer Gegenseiten eines durch die Doppelpunkte zweier elliptischen Punktinvolutionen gebildeten Vierecks zu construiren, welche für die Theorie der Kegelschnittbüschel von Bedeutung ist,* hat als räumliches Analogon die folgende: die reellen Schnittlinien der vier Paare imaginärer Gegenflächen eines vollständigen Sechsecks zu construiren, welches durch die Doppelpunkte dreier auf windschiefen Geraden gelegenen elliptischen Punktinvolutionen gebildet wird, oder mit anderen Worten: die Axen der Ebenenbüschel erster Ordnung zu finden, die mit drei elliptischen Punktinvolutionen im Raume gleichzeitig perspectiv liegen.

Die Lösung dieser Aufgabe soll im Folgenden mitgetheilt und in der zweiten Mittheilung auf die Construction der Raumcurven dritter Ordnung angewendet werden.

1. Es seien drei windschiefe Gerade a_1, a_2, a_3 als Träger elliptischer Punktinvolutionen gegeben; dieselben sollen projectiv aufeinander bezogen werden derart, dass die imaginären Doppelpunkte einander entsprechen. Ist aus der vierfachen Möglichkeit, diese letzteren einander zuzuordnen, ein bestimmter Fall ausgewählt, so genügt es, wie aus den Elementen der projectiven Geometrie bekannt ist, drei Punkte A_1, A_2, A_3 willkürlich auf den drei Geraden a_1, a_2, a_3 bezw. als entsprechende anzunehmen, um diese selbst in projective Beziehung zu setzen. Ferner ist nach dem Begriffe der projectiven Verwandtschaft klar, dass auch die den ebengenannten auf a_1, a_2, a_3 bezw. conjugirten Punkte A'_1, A'_2, A'_3 einander entsprechen, so dass also die Gesammtheit der Ebenen, welche je drei entsprechende Punkte enthalten, eine elliptische Ebeneninvolution bildet, deren imaginäre Doppelebenen je drei der imaginären Doppelpunkte enthalten.

---

* Schroeter, Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften. 2. Aufl. S. 261.

Um beliebig viele Ebenen eines so bestimmten Ebenenbüschels zu construiren, d. h. zu einem beliebigen Punkte der Geraden a_1 z. B. die entsprechenden Punkte auf a_2 und a_3 zu finden, beachte man, dass immer zwei Punktreihen von einem Punkte der Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte, also auch etwa a_1 und a_2, von einem Punkte der Verbindungslinie $A_1 A_2$ aus durch perspective Strahlbüschel erster Ordnung projicirt werden, deren Perspectivitätsaxen sich als Lösungen der eingangserwähnten Aufgabe aus der Geometrie der Ebene ergeben.

Wir machen nun zunächst die Voraussetzung, dass die drei Punkte A_1, A_2, A_3 nicht in gerader Linie gelegen sind; dann erhalten wir bei gegebener Zuordnung der imaginären Doppelpunkte als geometrischen Ort der Verbindungsebene entsprechender Punkte ein Ebenenbüschel dritter Ordnung, dessen Elemente involutorisch gepaart sind und folglich als Ort der Schnittlinie conjugirter Ebenen ein Hyperboloid $\eta^{(2)}$ erzeugen.* Auf einer beliebigen Ebene ξ dieses Ebenenbüschels bestimmt es selbst eine Tangenteninvolution eines Kegelschnitts $k^{(2)}$, das Hyperboloid $\eta^{(2)}$ aber zwei Gerade, auf deren einer p sich die Paare conjugirter Tangenten von k^2 schneiden. Der Pol P der Involutionsaxe p in Bezug auf k^2 ist daher als Schnittpunkt der imaginären Doppelstrahlen der Tangenteninvolution und also auch als ein Punkt der Schnittlinie der imaginären Doppelebenen des involutorischen Ebenenbüschels dritter Ordnung anzusehen. Lassen wir jetzt die Ebene ξ dieses Büschel durchlaufen, so beschreibt der Pol P der jedesmaligen Involutionsaxe p in Bezug auf den zugehörigen Kegelschnitt $k^{(2)}$ eine gerade Linie s,** welche sonach als die reelle Schnittlinie der beiden imaginären Doppelebenen aufzufassen ist.

2. Wir wollen ferner annehmen, dass die auf a_1, a_2, a_3 einander entsprechenden Punkte A_1, A_2, A_3 in der geraden Linie a gelegen seien. Unter dieser Voraussetzung zerfällt das wie oben erzeugte Ebenenbüschel dritter Ordnung in ein solches erster Ordnung mit der Axe a und in ein weiteres zweiter Ordnung, die Gesammtheit der Tangentialebenen eines Kegels $\varkappa^{(2)}$. Das Büschel zweiter Ordnung allein kommt in Betracht, da die Ebenen desselben allein sämmtliche Tripel entsprechender Punkte aus a_1, a_2 und a_3 herausschneiden. Da die Elemente dieses Büschels involutorisch gepaart sind, so erzeugen sie als Ort der Schnittlinie conjugirter Elemente eine Ebene σ, in deren Polare s bezüglich des Kegels $\varkappa^{(2)}$ sich die imaginären Doppelebenen schneiden.

Zur Construction von s genügt es, ausser der Ebene, welche die zu A_1, A_2, A_3 bezw. conjugirten Punkte A'_1, A'_2, A'_3 enthält, ein zweites

* Reye, Die Geometrie der Lage. 1880. II. Abth. S. 98. — Schroeter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung. § 31 S. 285.

** Schroeter, a. a. O. S. 267 (Umkehrung und dualistisches Gegenstück).

Paar conjugirter Ebenen zu ermitteln und die Diagonalebenen des so entstandenen Vierflachs in der gesuchten Geraden zum Durchschnitt zu bringen

3. Bei willkürlicher Wahl der Geraden a in voriger Nummer wird es im Allgemeinen nicht zum zweiten Male vorkommen, dass drei entsprechende Punkte auf a_1, a_2 und a_3 in gerader Linie liegen. Da die Gerade a bei gegebener Zuordnung der imaginären Doppelpunkte die projective Beziehung zwischen je zwei der gegebenen drei Geraden eindeutig bestimmt, so erzeugen letztere drei Hyperboloide, von denen immer eines durch die anderen beiden bestimmt ist. Es mögen die Geraden a_1 und a_2 das Hyperboloid η_{12}, a_2 und a_3 das Hyperboloid η_{23}, a_3 und a_1 das Hyperboloid η_{31} als Ort der Verbindungslinie entsprechender Punkte erzeugen; es möge ferner η_{12} die Gerade a_3 ausser in A_3 noch in A''_3, endlich die Fläche η_{23} die Gerade a_1 ausser in A_1 noch in A'''_1 treffen. Lassen wir jetzt a an den drei Geraden a_1, a_2, a_3 hingleiten, so beschreiben η_{12} und η_{23} Büschel von Hyperboloiden, deren Grundcurven windschiefe Vierecke sind. Für η_{12} nämlich bleiben die Geraden a_1, a_2 und die imaginären Verbindungslinien der Doppelpunkte auf denselben fest; für η_{23} aber die Geraden a_2, a_3 und in gleicher Weise die Verbindungslinien der imaginären Doppelpunktpaare. Daher beschreiben denn auch die Punkte A_3 und A''_3 auf a_3, A_1 und A'''_1 auf a_1 Involutionen, und legen wir durch jedes A''_3 eine Gerade a'', welche a_1 und a_2 schneidet, sowie durch jedes A'''_1 eine solche a''', welche a_2 und a_3 schneidet, so beschreiben sowohl a und a'', als auch a und a''' Involutionen, denen das durch a_1, a_2, a_3 bestimmte Hyperboloid zum gemeinsamen Träger dient. Beide Involutionen haben ein Paar conjugirter (reeller oder imaginärer) Elemente e und e' gemeinsam und es ergiebt sich daraus, dass die Möglichkeit, die projective Beziehung der ursprünglich gegebenen drei Geraden (bei gegebener Zuordnung der imaginären Doppelpunkte) so zu wählen, dass zweimal drei entsprechende Punkte in gerader Linie liegen, eine einfache ist.

Hat man in dieser Weise das Geradenpaar ee' bestimmt, so zerfällt das ursprüngliche Ebenenbüschel dritter Ordnung in drei Büschel erster Ordnung mit den Axen e, e' und s. Letzteres allein kommt in Frage, da es das einzige ist, dessen Ebenen sämmtliche Tripel entsprechender Punkte aus den drei Geraden ausschneiden. Die Axe s ist daher als Schnittlinie der imaginären Doppelebenen anzusehen.

Sind die beiden Geraden a, a' reell, so bestimmt irgend eine Verbindungsebene entsprechender Punkte auf ihnen Punkte der Geraden s, diese also selbst; sind dagegen a und a' conjugirt imaginär oder identisch, so ist die Construction eines Paares conjugirter Ebenen erforderlich.

Es sei bemerkt, dass mit der Lösung unserer Aufgabe zugleich diejenige ihrer dualistischen Umkehrung gefunden ist: die reellen Verbindungslinien der vier Paare imaginärer Gegenecken eines vollständigen Sechsflachs zu construiren, welches durch die Doppelebenen dreier elliptischen Ebeneninvolutionen mit windschiefen Axen gebildet wird.

II.

Aus der Geometrie der Raumcurven dritter Ordnung sind folgende beiden Sätze bekannt:

Verbindet man sechs Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung mit einem willkürlichen siebenten derselben zu einem Sechskant, so liegen, wie auch die Reihenfolge der Kanten gewählt werden mag, die drei Schnittlinien der Paare von Gegenflächen in einer Ebene, welche um eine feste Sehne der Raumcurve sich dreht, sobald der siebente Punkt die Raumcurve durchläuft.*

Ferner:

Verbindet man sechs Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung zu einem Sechseck und ermittelt den siebenten und achten Schnittpunkt der drei Paare von Gegenflächen des entstandenen Sechsflachs, so ist die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte eine Sehne der Raumcurve.**

Es scheint unbemerkt geblieben zu sein, dass die Sehnen, von welchen in beiden Sätzen die Rede ist, dieselben sind, so dass beide Sätze zu folgendem vereinigt werden können:

Verbindet man sechs Punkte, von denen keine vier in einer Ebene liegen, zu einem räumlichen Sechseck und ermittelt den siebenten und achten Schnittpunkt der drei Paare von Gegenflächen des entstandenen Sechsflachs, so trifft eine willkürlich durch die Verbindungslinie beider Schnittpunkte gelegte Ebene das räumliche Sechseck in einem ebenen derart, dass die Verbindungslinien der Gegenecken sich in einem Punkte der durch die gegebenen sechs Punkte bestimmten Raumcurve dritter Ordnung schneiden. (Fig. 1.)

Die gegebenen sechs Punkte mögen

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6$$

heissen und in dieser Reihenfolge miteinander verbunden sein. Die Kanten des räumlichen Sechsecks sind dann:

$$|A_1A_2|,\ |A_2A_3|,\ |A_3A_4|,\ |A_4A_5|,\ |A_5A_6|,\ |A_6A_1|$$

und die Flächen

$$[A_1A_2A_3],\ [A_2A_3A_4],\ [A_3A_4A_5],\ [A_4A_5A_6],\ [A_5A_6A_1],\ [A_6A_1A_2].$$

Die Schnittlinien der Paare von Gegenflächen heissen daher:

$$|[A_1A_2A_3][A_4A_5A_6]|,\quad |[A_2A_3A_4][A_5A_6A_1]|,\quad |[A_3A_4A_5][A_6A_1A_2]|$$

und der siebente und achte Schnittpunkt:

$$A_7 = ([A_1A_2A_3][A_3A_4A_5][A_5A_6A_1]),\quad A_8 = ([A_2A_3A_4][A_4A_5A_6][A_6A_1A_2]).$$

---

* Vergl. Cremona, Sur les lignes gauches de troisième ordre et classe. Crelle's Journal, Bd. 58 S. 144.

** Vergl. Schroeter, Theorie der Oberfl. II. Ordn. und der Raumcurven III. Ordn. S. 706. — Reye, Die Geometrie der Lage, 1880, II. Abth. S. 151.

Legen wir jetzt durch die Verbindungslinie $|A_7 A_8|$ und die beiden Gegenkanten $|A_1 A_2|$, $|A_4 A_5|$ ein Hyperboloid η_1, so enthält dasselbe sämmtliche acht Punkte

$$A_i \quad (i = 1, \ldots, 8),$$

denn die genannten drei Geraden werden von $|A_3 A_7|$ und $|A_6 A_8|$ gleichzeitig geschnitten; letztere sind also Erzeugende des Hyperboloids.

Legen wir fernerhin durch $|A_7 A_8|$ und die beiden Gegenkanten $|A_2 A_3|$ und $|A_5 A_6|$ ein zweites Hyperboloid η_2, so enthält dasselbe ebenfalls sämmtliche acht Punkte A_i, weil die drei das Hyperboloid bestimmenden Geraden gleichzeitig durch $|A_1 A_7|$ und $|A_4 A_8|$ geschnitten werden.

Die acht Punkte A_i liegen mithin auf der Schnittcurve der beiden Hyperboloide, welche in diesem Falle in die Gerade $|A_7 A_8|$ und eine Raumcurve dritter Ordnung $r^{(3)}$ zerfällt. Da nun auf $|A_7 A_8|$ nur die beiden Punkte A_7 und A_8 gelegen sind, so muss $r^{(3)}$ die übrigen, ursprünglich allein gegebenen sechs Punkte enthalten, d. h. die durch dieselben bestimmte Raumcurve dritter Ordnung sein.

Construiren wir endlich ein drittes Hyperboloid η_3 aus

$$|A_7 A_8|, \quad |A_3 A_4|, \quad |A_6 A_1|,$$

so gehört dasselbe offenbar dem Büschel (η_1, η_2) an. Legt man daher durch $|A_7 A_8|$, welches eine Sehne der $r^{(3)}$ ist, eine willkürliche Ebene ξ, welche die Kanten des räumlichen Sechsecks

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$$

in den Punkten

$$X_{12}, X_{23}, X_{34}, X_{45}, X_{56}, X_{61}$$

treffen möge, derart, dass

$$X_{ik} \text{ auf } |A_i A_k|$$

gelegen ist, so stellen die Verbindungslinien

$$|X_{12} X_{45}|, \quad |X_{23} X_{56}|, \quad |X_{34} X_{61}|$$

diejenigen Geraden dar, in denen die drei Hyperboloide η_1, η_2, η_3, abgesehen von $|A_7 A_8|$, von ξ noch geschnitten werden; sie müssen sich folglich in dem Punkte X der Raumcurve $r^{(3)}$ schneiden, welcher auf ξ noch zu ermitteln übrig blieb.

Diese Construction der Raumcurve dritter Ordnung aus sechs Punkten scheint mir alle anderen an Einfachheit und Durchsichtigkeit zu übertreffen. Sie hat aber weiterhin den Vorzug, noch völlig ausführbar zu sein für den Fall, dass die gegebenen sechs Punkte sämmtlich imaginär sind. Mit diesem Falle wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Es seien auf drei reellen windschiefen Geraden elliptische Punktinvolutionen mit den Paaren conjugirt imaginärer Doppelpunkte

$$A_1 A_4, \quad A_2 A_5, \quad A_3 A_6$$

gegeben. Betrachten wir das imaginäre Sechseck:

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6,$$

so sind, wie ich in Nr. I gezeigt habe, die Schnittlinien der Paare von Gegenflächen

$$|[A_1 A_2 A_3][A_4 A_5 A_6]|, \quad |[A_2 A_3 A_4][A_5 A_6 A_1]|, \quad |[A_3 A_4 A_5][A_6 A_1 A_2]|$$

reell und constructiv bestimmbar. Nach der dualistischen Umkehrung dieser Construction kann man dann die reelle Verbindungslinie $|A_7 A_8|$ der beiden imaginären Schnittpunkte

$$A_7 = ([A_1 A_2 A_3][A_3 A_4 A_5][A_5 A_6 A_1]), \quad A_8 = ([A_2 A_3 A_4][A_4 A_5 A_6][A_6 A_1 A_2])$$

ermitteln.

Nun erübrigt es noch, durch $|A_7 A_8|$ und zwei Paare imaginärer Gegenkanten Hyperboloide zu legen; der Durchschnitt beider wird, abgesehen von $|A_7 A_8|$, eine Raumcurve dritter Ordnung sein, welche, wie oben, die sechs, hier imaginären Punkte enthält.

Es sei zunächst das durch

$$|A_7 A_8|, \quad |A_1 A_2|, \quad |A_4 A_5|$$

bestimmte Hyperboloid η_1 zu construiren. Von einem beliebigen Punkte P der Geraden $|A_7 A_8|$ aus werden die elliptischen Punktinvolutionen auf $|A_1 A_4|$ und $|A_2 A_5|$ durch ebene elliptische Strahleninvolutionen projicirt, oder das imaginäre Viereck $A_1 A_2 A_4 A_5$ mit zwei reellen Gegenseiten wird durch ein imaginäres Vierkant

$$|PA_1|, \quad |PA_2|, \quad |PA_4|, \quad |PA_5|$$

mit zwei reellen Gegenflächen $[PA_1 A_4]$, $[PA_2 A_5]$ projicirt. Es ist bekannt,* dass durch zwei elliptische Involutionen eine dritte, immer hyperbolische bestimmt ist, deren Doppelelemente leicht zu finden sind.

Für unsern Fall sind die Doppelelemente der resultirenden hyperbolischen Involution als die Schnittpunkte der beiden Paare imaginärer Gegenseiten des Vierecks $A_1 A_2 A_4 A_5$, bezw. als Schnittlinien der beiden Paare imaginärer Gegenflächen des Vierkants $|PA_1||PA_2||PA_4||PA_5|$ zu betrachten; eine der letzteren beiden schneidet also sowohl $|A_1 A_2|$, als auch $|A_4 A_5|$ und ist also eine Erzeugende des Hyperboloids η_1. Durch Veränderung des Punktes P auf $|A_7 A_8|$ lassen sich beliebig viel Erzeugende der einen und sodann der andern Schaar von Geraden des Hyperboloids η_1 ermitteln.

Wir führen hierauf die analoge Construction des durch

$$|A_7 A_8|, \quad |A_2 A_3|, \quad |A_5 A_6|$$

bestimmten Hyperboloids η_2 aus, und indem wir auf einer willkürlich durch $|A_7 A_8|$ gelegten Ebene ξ die veränderlichen Schnittlinien x_1 und x_2 ermitteln, in denen ξ von η_1 und η_2 bezw. noch getroffen wird, erhalten wir im Schnittpunkte

$$X = (x_1, x_2)$$

einen Punkt der gesuchten Raumcurve $r^{(3)}$.

* Schroeter, Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf proj. Eigenschaften. 1876. 3. Abschn. § 42.

Eisenach. Dr. Hossfeld, Gymnasiallehrer.

V. Bemerkungen zu der Grübler'schen Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen eines ebenen Systems.

Herr Grübler hat im XXIX. Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 212 und 382, Untersuchungen über die Krümmungsradien, sowie die Lage der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen für die Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene angestellt. Die Resultate derselben, welche auch in dem Lehrbuch der Kinematik von Burmester, S. 106—112 Aufnahme gefunden haben, sind jedoch, wie im Folgenden nachgewiesen werden soll, nur unter gewissen Beschränkungen giltig.

Grübler geht vom allgemeinsten Falle aus, er nimmt an, die Bewegung sei dadurch gegeben, dass zwei Curven (c_1) und (c_2)* des bewegten Systems auf zwei Curven (e_1) und (e_2) des ruhenden gleiten. Hierbei werden zwei beliebige andere Curven (γ_1) und (γ_2) des ersten Systems im Allgemeinen wieder zwei Curven (ε_1) und (ε_2) des zweiten umhüllen. — Denken wir uns (c_1) und (c_2) aus dem bewegten System herausgenommen, so werden (γ_1) und (γ_2) auf (ε_1) und (ε_2) gleitend ebenfalls die vorgeschriebene Bewegung hervorbringen, also müssten die Grübler'schen Formeln und Constructionen zu denselben Krümmungsmittelpunkten der Polbahnen führen, gleichgiltig, ob man sie auf die gegebenen oder die abgeleiteten Curven anwendet. Dies ist aber nicht der Fall. Denn denken wir uns z. B. im ruhenden System zwei gerade Linien (g_1) und (g_2), so lassen sich im bewegten System stets** zwei Curven (l_1) und (l_2) finden, welche diese Geraden umhüllen. Es müssten also, wie sich aus den Grübler'schen Formeln ergiebt,*** bei jeder beliebigen Bewegung eines starren Systems in seiner Ebene, zwischen den Krümmungsradien ϱ_p und ϱ_π der ruhenden und bewegten Polbahn und dem Wendekreisdurchmesser W die Relationen

$$\varrho_p = W, \quad \varrho_\pi = \frac{W}{2}$$

bestehen, was bekanntlich nicht der Fall ist.

Um nun den Bereich der Giltigkeit der Grübler'schen Resultate festzustellen, erwägen wir zunächst, auf welchem Wege er den Krümmungsmittelpunkt der ruhenden Polbahn bestimmt. Es werden zwei aufeinanderfolgende Lagen des bewegten Systems betrachtet, für beide die Momentancentra M und M' und die Normalen der ruhenden Polbahn in diesen Punkten construirt. — Sind nun (c_1) und (c_2) die ersten Lagen der einhüllenden Curven und berühren sie (e_1) und (e_2) in B_1 resp. B_2, so schnei-

* Ich richte mich nachstehend, soweit nicht neue Benennungen erforderlich sind, nach der Grübler'schen Bezeichnungsweise und verweise auf die zu seiner Arbeit gehörige Fig. 1, Taf. VII.

** Grübler hält irrthümlich eine Bewegung, bei welcher zwei Geraden des einen Systems von zwei Curven des andern umhüllt werden, für einen Specialfall. (S. 219.)

*** und wie er selbst für diesen Fall (S. 219) abgeleitet hat.

den sich die bezüglichen gemeinsamen Normalen der Curvenpaare im Momentancentrum M. Will man auch die Normale der Polbahn in M haben, so müssen auf diesen Normalen die zu den Punkten B_1 und B_2 gehörigen Krümmungsmittelpunkte C_1, C_2, K_1, K_2 der vier Curven bekannt sein. Berühren die zweiten Lagen (c'_1) und (c'_2) der einhüllenden Curven ihre Hüllbahnen in B'_1, B'_2 und will man für das zugehörige Momentancentrum M' die Normale, so müssen die zu den Punkten B'_1 und B'_2 beider Curvenpaare gehörigen Krümmungsmittelpunkte $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$ in Betracht gezogen werden. Dieselben werden im Allgemeinen von den neuen Lagen C'_1, C'_2 der Punkte C_1, C_2 und von den Punkten K_1, K_2 verschieden sein.

Während somit in Wahrheit

$$d\varrho_1 = dr_1 - dR_1$$

eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung ist, also den Grössen gleicher Ordnung gegenüber nicht vernachlässigt werden darf,* setzt sie Grübler (S. 214 Z. 1 v. o.) unzulässiger Weise $= 0$. Seine Resultate gelten also auch nur bei Zugrundelegung von Systempunkten C_1 und C_2, für welche thatsächlich im betrachteten Moment $d\varrho = 0$ ist, d. h. für Punkte, welche gerade Bahnen mit stationärer Krümmung durchlaufen. Solcher Punkte giebt es bei einer beliebigen Bewegung in jedem Moment unendlich viel;** ihr Ort ist eine bestimmte Curve dritter Ordnung. Gelingt es also, bei irgend einer Bewegung in jedem Moment zwei solcher Punkte aufzufinden — eine Aufgabe, die, soviel mir bekannt, bisher nicht gelöst ist —, oder sind sie, wie bei dem Kurbelviereck und seinen Specialfällen, direct gegeben, so gelten für sie die Grübler'schen Resultate. Für beliebige beschreibende Punkte und ihre zugehörigen Krümmungsmittelpunkte gelten sie nicht. Bei einer allgemeinen Lösung der Aufgabe werden jedenfalls die Krümmungsmittelpunkte der Evoluten der gegebenen Curven $(c_1)(c_2)$, $(e_1)(e_2)$ eine Rolle spielen.***

---

* Damit fällt auch der Burmester'sche Satz (Lehrbuch der Kinematik, Bd. I S. 80): „Die Bewegung des ebenen Systems S aus einer Lage in zwei unendlich nahe folgende Lagen ist bestimmt durch die Bewegung der als Systemstrecke betrachteten Koppel FL des durch die vier Krümmungsmittelpunkte $FL\Phi A$ gebildeten Gelenkvierecks.“ Die Polbahnen des gegebenen und des substituirten Systems werden sich wohl im Momentancentrum berühren, aber dort im Allgemeinen nicht die gleiche Krümmung besitzen.

** Vergl. Schoenflies, Geometrie der Bewegung, S. 89. Die grundlegenden Betrachtungen für discrete Lagen des bewegten Systems hat Burmester zuerst angestellt (Civilingenieur 1877, 227, 319).

*** Aronhold schliesst seine Abhandlung über die „Grundzüge der kinematischen Geometrie“ mit den Worten: „Wir werden in der Folge die Krümmungsradien der Evoluten der Rouletten und Hüllbahnen als Grundelemente zur weiteren Behandlung der Polbahnen benutzen.“ Eine Fortsetzung der Arbeit ist leider nicht erschienen.

Charlottenburg, 25. November 1887. Dr. Felix Buka.

VI. Ueber eine Proportion aus der elementaren Geometrie.

Eine Ebene schneide die drei Axen eines rechtwinkligen Raumcoordinatensystems in den Punkten X, Y, Z, die von dem Coordinatenanfangspunkte O die Entfernungen x, y, z haben. Die Winkel des ebenen Dreiecks XYZ heissen der Reihe nach ξ, η, ζ. Zwischen diesen Winkeln und jenen Abständen findet nun ein äusserst einfacher, in der praktischen Krystallkunde sehr wohl verwerthbarer Zusammenhang statt, der noch nicht bemerkt worden zu sein scheint. Durch dreimalige Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes erhält man:

$$XY^2 = x^2 + y^2, \quad YZ^2 = y^2 + z^2, \quad ZX^2 = z^2 + x^2.$$

Durch Halbirung der Summe der drei Gleichungen zeigt sich

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{XY^2 + YZ^2 + ZX^2}{2}$$

und zieht man nun die drei vorigen Gleichungen ab, so entsteht

1) $$x^2 = \frac{XY^2 + XZ^2 - YZ^2}{2}, \quad y^2 = \frac{YX^2 + YZ^2 - XZ^2}{2},$$
$$z^2 = \frac{ZX^2 + ZY^2 - XY^2}{2}.$$

Im Dreiecke XYZ verhält sich $XY:YZ:ZX = \sin\zeta : \sin\xi : \sin\eta$, und nennen wir den Proportionalitätsfactor k, so ist

$$XY = k.\sin\zeta, \quad XZ = k.\sin\eta, \quad YZ = k.\sin\xi.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen 1) bringt dieselben in die Form:

2) $$\frac{2x^2}{k^2} = \sin\eta^2 + \sin\zeta^2 - \sin\xi^2, \quad \frac{2y^2}{k^2} = \sin\xi^2 + \sin\zeta^2 - \sin\eta^2,$$
$$\frac{2z^2}{k^2} = \sin\xi^2 + \sin\eta^2 - \sin\zeta^2.$$

Nun ist $\xi + \eta + \zeta = 180^0$, $\zeta = 180^0 - (\xi + \eta)$, $\sin\zeta = \sin(\xi + \eta) = \sin\xi.\cos\eta + \cos\xi.\sin\eta$. Folglich

$$\sin\xi^2 + \sin\eta^2 - \sin\zeta^2 = \sin\xi^2 + \sin\eta^2 - (\sin\xi.\cos\eta + \cos\xi.\sin\eta)^2$$
$$= 2\sin\xi.\sin\eta[\sin\xi.\sin\eta - \cos\xi.\cos\eta] = -2\sin\xi.\sin\eta.\cos(\xi+\eta)$$
$$= -\sin\xi.\sin\eta.\cos(180^0 - \zeta) = 2\sin\xi.\sin\eta.\sin\zeta.\operatorname{cotg}\zeta.$$

Aehnlich verändern sich die beiden anderen Ausdrücke, welche in 2) die rechten Gleichungsseiten bilden, und es entstehen neue Gleichungen:

3) $$\frac{x^2}{k^2 \sin\xi \sin\eta \sin\zeta} = \operatorname{cotg}\xi, \quad \frac{y^2}{k^2 \sin\xi \sin\eta \sin\zeta} = \operatorname{cotg}\eta,$$
$$\frac{z^2}{k^2 \sin\xi \sin\eta \sin\zeta} = \operatorname{cotg} z.$$

Daraus folgt aber der Zusammenhang:

$$x : y : z = \sqrt{\operatorname{cotg}\xi} : \sqrt{\operatorname{cotg}\eta} : \sqrt{\operatorname{cotg}\zeta}.$$

M. Cantor.

VII. Vier Aufgaben über drei- und vierpunktige Berührung von Kegelschnitten.

Aufgabe I. Gegeben seien zwei Punkte A_1, A_2, ein Kegelschnitt K^2 und auf ihm ein Punkt S. Gesucht werden die Kegelschnitte, welche durch A_1A_2S gehen und K^2 osculiren.

Ehe wir diese Aufgabe lösen, schicken wir eine andere voraus. Wir ziehen durch S eine beliebige Gerade s_1, welche K^2 ein zweites Mal in einem Punkte A treffe, und fragen nach den Kegelschnitten, welche durch AA_1A_2S gehen und K^2 berühren.

Da bemerken wir, dass jeder Kegelschnitt K_x^2, welcher durch AA_1A_2S geht, mit K^2 zwei weitere Punkte X_1, X_2 gemein hat. Zu ihrer Construction benutzen wir die Involution J_g, welche die Gerade A_1A_2 — sagen wir g — aus K^2 und K_x^2 schneidet. A_1A_2 ist ein Paar dieser Involution. Ein zweites sind die Schnittpunkte E_1, E_2 von g mit K^2. Diese Paare bestimmen die Involution J_g. In ihr zeichnen wir zu dem Schnittpunkte P_1 von g mit s_1 den entsprechenden Punkt P_2. Durch P_2 geht die Verbindungslinie der Punkte X_1, X_2. Nun schneidet g alle Kegelschnitte K_x^2 und den Kegelschnitt K^2 in den Paaren A_1A_2, E_1E_2 derselben Involution J_g. Also gehen die Verbindungslinien der Punktepaare X_1X_2 durch denselben Punkt P_2. Daraus folgt, dass diese Punktepaare eine Involution J_k bilden, deren Pol P_2 ist.

Fällt X_1 mit X_2 zusammen, so berührt in diesem Punkte ein Kegelschnitt K_x^2 den Kegelschnitt K^2. Dies wird zweimal geschehen in den Doppelpunkten B_{12}, C_{12} der Involution J_k. Es sind dies die Schnittpunkte der Polare p_2 von P_2 in Bezug auf K^2 mit K^2. Somit giebt es zwei Kegelschnitte, welche durch AA_1A_2S gehen und K^2 berühren.

Jetzt wenden wir uns wieder zu der Aufgabe I.

Wir drehen s_1 um S. Dann bewegt sich A auf K^2, P_1 und dementsprechend P_2 auf g. p_2 als Polare der Punkte P_2 von g dreht sich um den Pol G von g in Bezug auf K^2. Es wird somit jedem Punkte A ein Punktepaar $B_{12}C_{12}$ zugeordnet. Fällt A mit einem der ihm entsprechenden Punkte B_{12}, C_{12} zusammen, so hat in ihm ein Kegelschnitt K_x^2 mit K^2 drei Punkte gemein, d. h. er osculirt K^2. Wir suchen diese zusammenfallenden Punkte. Da sehen wir, dass jeder Lage von s_1 eine Lage von p_2 eindeutig zugeordnet ist. Folglich muss das Büschel der s_1 zu dem der p_2 projectivisch sein. Die entsprechenden Strahlen von zwei solchen Büscheln schneiden sich bekanntlich in Punkten eines Kegelschnittes K_s^2. Dieser geht durch S. Folglich hat er mit K^2 noch drei Punkte O, V, W gemeinsam. Jeder derselben hat die Eigenschaft, dass in ihm eine Lage von A mit einem der zugeordneten Punkte B_{12}, C_{12} zusammenfällt. Also ist er der Osculationspunkt von einem der gesuchten Kegelschnitte. Somit giebt es drei Kegelschnitte, welche durch A_1A_2S gehen und K^2 osculiren.

Wir fügen einige Bemerkungen zur Construction von K_s^2 bei. K_s^2 geht durch G. Zwei weitere Punkte von K_s^2 erhalten wir, indem wir die Doppelpunkte F_{12}, G_{12} der Involution J_g zeichnen. Sie werden durch E_1, E_2 harmonisch getrennt. Mithin sind F_{12}, G_{12} auch ein Paar der Involution harmonischer Pole J_p auf g in Bezug auf K^2. Daraus folgt, dass die Gerade, welche S mit einem dieser Doppelpunkte verbindet, von der Geraden durch G und den andern Doppelpunkt in einem Punkte von K_s^2 geschnitten wird. Bringen wir SE_1 mit GE_2 und SE_2 mit GE_1 zum Schnitte, so gelangen wir zu zwei weiteren Punkten von K_s^2. Schneide die Gerade GS aus g den Punkt H und entspreche ihm in der Involution J_p der Punkt H_1, so geht die Tangente t_s in S an K_s^2 durch denjenigen Punkt H_2, welcher in der Involution J_g dem Punkte H_1 correspondirt. Bemerken wir, dass H_1 auf der Tangente t_k liegt, welche in S den Kegelschnitt K^2 berührt, so folgt aus der Construction von t_s, dass t_s und t_k durch die Geraden harmonisch getrennt werden, welche S mit $F_{12} G_{12}$ verbinden.

Construiren wir zu H den entsprechenden Punkt in der Involution J_g und zu ihm den entsprechenden in der Involution J_p, so geht durch letzteren die Tangente in G an K_s^2.

Zeichnen wir das gemeinsame Paar der Involutionen J_p und J_g, so liegt dieses auf K_s^2.

Wir knüpfen an die Lösung der Aufgabe I einige Schlüsse.

a) Sei o die Gerade, welche einen der gefundenen Osculationspunkte — etwa O — mit S verbindet, und sei t_o die Tangente in O an K^2, so schneiden o und t_o die Linie g in einem Paare der Involution J_g. Folglich werden o und t_o durch die Geraden harmonisch getrennt, welche O mit den Doppelpunkten F_{12}, G_{12} der Involution J_g verbinden.

Lassen wir jetzt S den Kegelschnitt K^2 durchlaufen, so erhalten wir sämmtliche Kegelschnitte, welche durch $A_1 A_2$ gehen und K^2 osculiren. Wir construiren dieselben unter Benutzung der nämlichen Involution J_g und können daher für die Tangente und die gemeinsame Sehne im Osculationspunkte eines jeden dieser Kegelschnitte denselben Schluss ziehen, wie oben für o und t_o. Wir sagen daher:

Construiren wir die Kegelschnitte, welche durch zwei feste Punkte A_1, A_2 gehen und einen gegebenen Kegelschnitt K^2 osculiren, so wird die Tangente im Osculationspunkte jedes solchen Kegelschnittes von der gemeinsamen Sehne durch zwei Gerade harmonisch getrennt, welche durch zwei feste Punkte gehen. Diese sind Doppelpunkte einer Involution, für welche $A_1 A_2$ und die Schnittpunkte der Geraden $A_1 A_2$ mit K^2 Paare sind. * (Siehe die Anmerkung auf S. 122.)

b) Die Construction des Kegelschnittes K_s^2 ist nur von S, K^2 und der Involution J_g abhängig. Setzen wir daher an Stelle von $A_1 A_2$ irgend ein Punktepaar der Involution J_g, so gehen auch durch dieses und S drei Kegelschnitte, welche K^2 resp. in O, V, W osculiren. Wir erhalten daher dreimal unendlich viele Kegelschnitte, welche durch S gehen, K^2 osculiren und von g in Punkten derselben Involution geschnitten werden. Betrachten wir unter diesen Kegelschnitten nur diejenigen K_0^2, welche durch S gehen und K^2 in O osculiren, und schneiden wir dieselben mit einer beliebigen Geraden g, so wird auf dieser durch die Schnittpunkte mit K^2 und mit o und t_o eine Involution J_g bestimmt.

Indem wir diese zur Construction der Kegelschnitte benutzen, welche durch S gehen und K^2 in V und W osculiren, bemerken wir, dass auch diese Kegelschnitte von g in Paaren der Involution J_g geschnitten werden. Wir schliessen daher:

Alle Kegelschnitte, welche einen Kegelschnitt K^2 in einem Punkte O osculiren und durch einen Punkt S von K^2 gehen, werden von einer beliebigen Geraden in Paaren einer Involution geschnitten und bilden also ein Büschel.** Durch die Paare derselben Involution gehen zwei weitere Büschel von Kegelschnitten, welche S enthalten und K^2 osculiren.

Unter den Kegelschnitten K_0^2 berühren zwei in den Doppelpunkten der Involution J_g die Gerade g. Sollen wir umgekehrt die Kegelschnitte zeichnen, welche K^2 in O osculiren, durch S gehen und eine Gerade berühren, so zeichnen wir die Involution J_g und ihre Doppelpunkte. Sie sind die Berührungspunkte der gesuchten Kegelschnitte.

c) Wir nehmen an, dass K^2 ein Kreis sei, und untersuchen die Involution J_{g_∞}, welche die unendlich ferne Gerade g_∞ aus dem Büschel der Kegelschnitte K_0^2 schneidet. Ein Paar dieser Involution sind die imaginären Kreispunkte. Ein zweites Paar sind die unendlich fernen Punkte von o und t_o. Folglich gehen die Halbirungslinien des Winkels $t_o o$ nach den Doppelpunkten der Involution J_{g_∞}. Also halbiren diese Linien auch die Winkel aller Geradenpaare durch O, welche Paare der Involution J_{g_∞} projiciren. Nun geben uns diese Geradenpaare die Asymptotenrichtungen und ihre Halbirungslinien die Axenrichtungen von K_0^2 an. Wir schliessen daher:

Alle Kegelschnitte, welche einen Kreis in einem Punkte O osculiren und durch einen Punkt S des Kreises gehen, haben dieselben Axenrichtungen. Sie sind die Richtungen der Halbirungslinien der Winkel, welche die Tangente in O an den Kreis mit der Linie OS bildet.

d) Unter den Kegelschnitten K_0^2 sind stets zwei Parabeln. Ihre Axenrichtungen sind die Doppelpunkte der Involution J_{g_∞}. Die Strahlen aus dem

* Von hier aus lässt sich mit Hilfe einer Reciprocität ($F_{12}\,G_{12}\,K^2 - 1$) (vergl. meine Abhandlung: Ueber eine Reciprocität: Schlömilch, Bd. XXXI S. 146–156 Nr. 7) zeigen, dass die Enveloppe der gemeinsamen Sehnen von der 4. Classe ist.

** Osculationspunkt und S sind also, wie vorauszusehen war, den vier Grundpunkten eines Büschels von Kegelschnitten äquivalent.

Mittelpunkte M von K^2 nach diesen Doppelpunkten sind das gemeinsame Paar von zwei Involutionen. Die eine von diesen ist die Durchmesserinvolution von K^2. Die andere hat die Parallelen durch M zu o und t_0 zu Doppelstrahlen.

e) Ist g eine Tangente von K^2 und G ihr Berührungspunkt, so entspricht sie in der Projectivität der Büschel um S und G der Geraden GS. Folglich berührt der Kegelschnitt K_s^2 den Kegelschnitt K^2 in G. Daraus ergiebt sich, dass zwei der Kegelschnitte, welche durch SA_1A_2 gehen und K^2 osculiren, in Gerade zerfallen. Wir sagen daher:

Durch zwei Punkte, welche auf einer Tangente eines gegebenen Kegelschnittes K^2 liegen, geht ein Kegelschnitt, der K^2 osculirt und einen gegebenen Punkt von K^2 enthält.

f) Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen bekanntlich auf einem Kegelschnitt, der durch die Mitten der Seiten des Grundpunktvierecks geht. Wenden wir dies auf das Büschel der Kegelschnitte K_0^2 an, so folgt, dass ihre Mittelpunkte auf einem Kegelschnitt K_m^2 liegen, der K^2 in O berührt. Die unendlich fernen Punkte von K_m^2 sind die Doppelpunkte von J_g.

Ist K^2 ein Kreis, so ist K_m^2 eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Halbirungslinien des Winkels $t_0 o$ parallel sind.

Aufgabe II. Gegeben seien zwei Punkte A_1, A_2 und ein Kegelschnitt K^2. Gesucht werden die Kegelschnitte, welche durch A_1, A_2 gehen und K^2 vierpunktig berühren.

Wir knüpfen diese Aufgabe an die Aufgabe I an. Fällt dort S mit einem er drei Punkte O, V, W — etwa mit O — zusammen, so hat in diesem Punkte ein Kegelschnitt durch $A_1 A_2$ mit K^2 vier Punkte gemeinsam. Dies wird eintreten, wenn die Tangente t_0 in O mit der Geraden SO zusammenfällt. Dann muss der Schnittpunkt dieser Tangente mit g ein Doppelpunkt der Involution J_g sein. Wir schliessen daher:

Es giebt vier Kegelschnitte, welche durch zwei gegebene Punkte A_1, A_2 gehen und einen gegebenen Kegelschnitt K^2 vierpunktig berühren. Zur Construction der Berührungspunkte zeichnen wir die Doppelpunkte der Involution, für welche $A_1 A_2$ ein Paar und die Schnittpunkte der Geraden $A_1 A_2$ mit K^2 ein zweites Paar sind. Die Polaren dieser Doppelpunkte in Bezug auf K^2 schneiden aus K^2 die Berührungspunkte der gesuchten Kegelschnitte.

Aufgabe III. Gegeben sei ein Kegelschnitt K^2 und auf ihm ein Punkt S. Gesucht werden die Kreise durch S, welche K^2 osculiren.

Diese Aufgabe ist ein specieller Fall von I, bei dem an Stelle von A_1, A_2 die imaginären Kreispunkte auf der unendlich fernen Geraden g_∞ treten.

Dann sind E_1, E_2 die Schnittpunkte von g_∞ mit K^2. Sie bestimmen mit den imaginären Kreispunkten eine Involution J_{g_∞}, deren Doppelpunkte die Axenrichtungen von K^2 sind.

An Stelle des Punktes G von I tritt in unserem Falle der Mittelpunkt des Kegelschnittes K^2. Indem wir diese Specialisirungen berücksichtigen, können wir die Lösung der gestellten Aufgabe dahin aussprechen:

Es giebt drei Kreise, welche durch einen gegebenen Punkt S eines Kegelschnittes K^2 gehen und diesen osculiren. Die Osculationspunkte liegen auf einem Kegelschnitte K_s^2, der durch S, durch den Mittelpunkt von K^2 und durch die Fusspunkte der Perpendikel geht, welche aus S auf die Axen von K^2 gefällt werden können.

Die Tangente in S an K_s^2 liegt zur Tangente in S an K^2 in Bezug auf die Axenrichtungen von K^2 orthogonal symmetrisch. Die Linie, welche S mit dem Mittelpunkte von K^2 verbindet, ist ein Durchmesser von K_s^2. Die Axen von K_s^2 sind den Axen von K^2 parallel. Die Asymptoten von K_s^2 sind dem gemeinsamen Paare von zwei Involutionen parallel, deren eine die Durchmesserinvolution von K^2 ist. Die andere Involution hat die Axen von K^2 zu Doppelstrahlen.

Wir erhalten einen Punkt von K_s^2 auf einem Durchmesser p_1 von K^2, indem wir zu p_1 die conjugirte Richtung zeichnen. Dann ziehen wir durch S eine Gerade s_1, welche zu dieser Richtung in Bezug auf die Axenrichtungen von K^2 orthogonal symmetrisch ist. s_1 schneidet p_1 in einem Punkte von K_s^2.

Wir bemerken noch, dass die Asymptoten von K_s^2 stets reell sind wenn K^2 eine Ellipse ist. Dagegen wird K_s^2 eine Ellipse, wenn K^2 eine Hyperbel ist.

In dem Falle, in welchem K^2 eine gleichseitige Hyperbel ist, geht K_s^2 durch die imaginären Kreispunkte und ist folglich ein Kreis. Wir schliessen daher:

Construiren wir einen Kreis K_s^2, welcher den Mittelpunkt und einen gegebenen Punkt S einer gleichseitigen Hyperbel zu Enden eines Durchmessers hat, so schneidet K_s^2 die Hyperbel in drei weiteren Punkten, deren Osculationskreise durch S gehen.

Sei K^2 eine Parabel, so ist g_∞ eine Tangente von K^2. Dann folgt als Specialisirung von Ie):

Durch einen gegebenen Punkt S einer Parabel K^2 können wir einen Kreis legen, welcher die Parabel osculirt.

Sein Osculationspunkt ist Schnittpunkt von K^2 mit einer zweiten Parabel K_s^2, welche durch S geht und dieselbe Axenrichtung wie K^2 hat. Die Tangente in S an K_s^2 liegt zur Tangente in S an K^2 orthogonal symmetrisch in Bezug auf die Axenrichtung von K^2. K_s^2 geht durch den Fusspunkt des Perpendikels aus S auf die Axe von K^2.

Specialisiren wir die weiteren Schlüsse, welche wir an Aufgabe I anknüpfen, für unsern Fall, so ergiebt sich:

a) Diė Tangente im Osculationspunkte eines Kegelschnittes mit einem Kreise liegt zu der gemeinsamen Sehne in Bezug auf die Axenrichtungen des Kegelschnittes orthogonal symmetrisch.

b) Sind O und S Osculationspunkt und gemeinsamer Punkt zwischen einem Kegelschnitt K^2 und dem Osculationskreise in O, so geht durch S ein Büschel B_0 von Kegelschnitten, welche K^2 in O osculiren und deren Axen parallel zu den Axen von K^2 sind. Zwei Kegelschnitte dieses Büschels sind Parabeln, deren unendlich ferne Punkte resp. auf der einen und andern Axe von K^2 liegen.

c) Die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Büschels B_0 befinden sich auf einer gleichseitigen Hyperbel K_m^2, deren Asymptotenrichtungen mit den Axenrichtungen von K^2 zusammenfallen. Diese Hyperbel berührt K^2 in O und geht durch den Mittelpunkt von K^2.

Ist K^2 eine Parabel, so ist ihre Axe eine Asymptote von K_m^2.

d) Die Hyperbel K_m^2 ist bestimmt, wenn wir K^2 und O kennen. Schneiden wir K_m^2 mit der Normalen in O zur Tangente an K^2, so ist der Schnittpunkt Mittelpunkt des Osculationskreises. Wir schliessen daher:

Der Mittelpunkt des Osculationskreises in einem Punkte O an einen Kegelschnitt K^2 liegt auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche K^2 in O berührt, durch den Mittelpunkt von K^2 geht und die Axenrichtungen von K^2 zu Asymptotenrichtungen hat.*

Aufgabe IV. Gegeben sei ein Kegelschnitt K^2. Gesucht werden die Kreise, welche K^2 vierpunktig berühren.

Diese Aufgabe ist eine Specialisirung von Aufgabe II. Wir schliessen daher:

Es giebt vier Kreise, welche einen Kegelschnitt K^2 vierpunktig berühren. Die Berührungspunkte liegen in den Schnittpunkten der Axen mit K^2.

Ist K^2 eine Parabel, so giebt es einen Kreis, der die Parabel — im Scheitel — vierpunktig berührt.

---

* Mit Hilfe des Pascal'schen Satzes leiten wir leicht aus diesem Satze sechs bekannte Constructionen des Krümmungskreismittelpunktes ab, wenn die Axen des Kegelschnittes gegeben sind.

Dr. Christian Beyel.

VIII. Ueber gewisse Determinanten.

Bei einer Untersuchung über die in der Meteorologie vielfach verwendete Bessel'sche Formel, worüber ich an anderer Stelle eingehend berichten werde, wurde es mir wichtig, die beiden folgenden Determinanten:

$$1)\quad C_{2\nu} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \cos x_k, & \sin x_k, & \cos 2x_k, & \sin 2x_k, & \ldots, & \cos(\nu-1)x_k, & \sin(\nu-1)x_k, & \cos\nu x_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

$$2)\quad S_{2\nu} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \cos x_k, & \sin x_k, & \cos 2x_k, & \sin 2x_k, & \ldots, & \cos(\nu-1)x_k, & \sin(\nu-1)x_k, & \sin\nu x_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

$$k = 1, 2, \ldots, (2\nu)$$

in einem geschlossenen Ausdruck zu haben. Da in der mir zu Gebote stehenden Literatur nichts über diese interessanten Determinanten zu finden war, gebe ich im Folgenden eine Ableitung des Werthes derselben, die in analoger Weise bei verwandten Determinanten ebenfalls zum Ziele führen dürfte. Ich führe zunächst einige abkürzende Bezeichnungen ein.

Es sei

$$3)\quad \prod_{h=1}^{h=2\nu-1} \prod_{k=h+1}^{k=2\nu} \sin\frac{x_k - x_h}{2} = P_{1,2,\ldots,(2\nu)},$$

d. h. $P_{1,2,\ldots,(2\nu)}$ ist das Product der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zweien der Winkel x_m, wenn als Minuend dabei immer der Winkel mit dem höheren Index verwendet wird. Dies Product erinnert auffallend an die bekannte Differenzendeterminante. Wenn in 1) oder 2) von der k^{ten} Zeile die h^{te} subtrahirt wird, so erhält, wie man sich leicht überzeugt, jeder Theilsatz der k^{ten} Zeile in der transformirten Determinante den Factor $\sin\frac{x_k - x_h}{2}$, und man schliesst daraus, dass $C_{2\nu}$ wie $S_{2\nu}$ durch $P_{1,2,\ldots,(2\nu)}$ theilbar sein muss. Nun ist $C_{2\nu}$ wie $S_{2\nu}$ bezüglich des Winkels $\frac{x_k}{2}$ vom Range 2ν, während $P_{1,2,\ldots,(2\nu)}$ darin vom Range $2\nu - 1$ ist, da $\frac{x_k}{2}$ in $2\nu - 1$ Factoren vorkommt. Es können sich daher $C_{2\nu}$ und $S_{2\nu}$ von $P_{1,2,\ldots,(2\nu)}$ nur durch einen numerischen Factor und einen weiteren, bezüglich der Winkel symmetrischen Factor, der vom Range 1 hinsichtlich $\frac{x_k}{2}$ sein muss, unterscheiden. Die directe Aufsuchung dieser beiden Factoren ist mir indessen nicht gelungen; ich verfuhr deshalb in folgender Weise.

Es sei

$$4)\quad \sum_{k=1}^{k=2\nu} x_k = \sigma$$

und

$$5)\quad e^{ix_k} = a_k,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist.

Aus 1) und 2) ergiebt sich sofort

$$6)\quad C_{2\nu}+iS_{2\nu}=\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & \cos x_k, & \sin x_k, & \cos 2x_k, & \sin 2x_k, & \ldots, & \cos(\nu-1)x_k, & \sin(\nu-1)x_k, & a_k^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

$$k=1,2,\ldots,(2\nu).$$

Es werden nun in 6) die mit i multiplicirte dritte, fünfte, ..., $(2\nu-1)^{\text{te}}$ Colonne entsprechend zur zweiten, vierten, ..., $(2\nu-2)^{\text{ten}}$ addirt; dadurch erscheinen in letzteren die Werthe $a_k, a_k^2, \ldots, a_k^{\nu-1}$. In der so transformirten Determinante multiplicire man die dritte, fünfte, ..., $(2\nu-1)^{\text{te}}$ Colonne mit $-2i$, wodurch der Factor $(-2i)^{\nu-1}$ eingeführt wird, und addire dazu entsprechend die zweite, vierte, ..., $(2\nu-2)^{\text{te}}$ Colonne; in jenen Colonnen erscheint dann $a_k^{-1}, a_k^{-2}, \ldots, a_k^{-\nu+1}$. Man erhält also

$$7)\quad C_{2\nu}+iS_{2\nu}=\frac{1}{(-2i)^{\nu-1}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & a_k, & a_k^{-1}, & a_k^2, & a_k^{-2} & \ldots, & a_k^{\nu-1}, & a_k^{-\nu+1}, & a_k^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man hier je die k^{te} Zeile mit $a_k^{\nu-1}$ und berücksichtigt, dass zufolge 5) und 4)

$$8)\quad \prod_{k=1}^{k=2\nu} a_k = e^{i\sigma}$$

ist, so entsteht

$$9)\quad C_{2\nu}+iS_{2\nu}$$

$$=\frac{1}{(-2i)^{\nu-1}\,e^{i\sigma(\nu-1)}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k^{\nu-1}, & a_k^\nu, & a_k^{\nu-2}, & a_k^{\nu+1}, & a_k^{\nu-3}, & \ldots, & a_k^{2\nu-2}, & a_k^0, & a_k^{2\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Eine sehr einfache Ueberlegung ergiebt, dass die Permutation

$$\nu-1,\ \nu,\ \nu-2,\ \nu+1,\ \nu-3,\ \ldots,\ 2\nu-2,\ 0,\ 2\nu-1$$

der Elementenreihe $0, 1, \ldots, (2\nu-1)$ eine gerade Anzahl von Inversionen, nämlich $\nu(\nu-1)$, besitzt. Man kann deshalb sofort schreiben

$$10)\quad C_{2\nu}+iS_{2\nu}=\frac{1}{(-2i)^{\nu-1}\,e^{i\sigma(\nu-1)}}\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & a_k, & a_k^2, & a_k^3, & \ldots, & a_k^{2\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Die hier auftretende Determinante ist bekanntlich das Product aller Differenzen zwischen je zwei der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_{2\nu}$, wenn immer die Grösse mit höherem Index als Minuend genommen wird, d. h.

$$11)\quad C_{2\nu}+iS_{2\nu}=\frac{1}{(-2i)^{\nu-1}\,e^{i\sigma(\nu-1)}}\prod_{h=1}^{h=2\nu-1}\ \prod_{k=h+1}^{k=2\nu}(a_k-a_h).$$

Aus 5) ergiebt sich nun sehr leicht

$$12)\quad a_k-a_h=2i\sin\frac{x_k-x_h}{2}\cdot e^{\frac{i}{2}(x_h+x_k)}.$$

Beim Einsetzen dieses Werthes in 11) ist 3) zu berücksichtigen, und die Multiplication bezüglich der Potenzausdrücke geht in eine Summation bezüglich der Exponenten über; jeder einzelne Werth x_k kommt dabei $2\nu-1$-mal vor. Hierdurch entsteht, da in 11) genau $\nu(2\nu-1)$ Factoren vorhanden sind,

$$13)\qquad C_{2\nu}+iS_{2\nu}=\frac{(2i)^{\nu(2\nu-1)}.P_{1,2,\ldots,(2\nu)}.e^{\frac{i\sigma(2\nu-1)}{2}}}{(-2i)^{\nu-1}\,e^{i\sigma(\nu-1)}}$$

oder

$$14)\qquad C_{2\nu}+iS_{2\nu}=(-1)^{\nu-1}.2^{2\nu^2-2\nu+1}.i.P_{1,2,\ldots,(2\nu)}.e^{\frac{i\sigma}{2}}$$

$$15)\qquad =(-1)^{\nu-1}.2^{2\nu^2-2\nu+1}.P_{1,2,\ldots,(2\nu)}.\left(-\sin\frac{\sigma}{2}+i.\cos\frac{\sigma}{2}\right),$$

also endlich

$$16)\qquad C_{2\nu}=(-1)^{\nu}\;.2^{2\nu^2-2\nu+1}.P_{1,2,\ldots,(2\nu)}.\sin\frac{\sigma}{2},$$

$$17)\qquad S_{2\nu}=(-1)^{\nu-1}.2^{2\nu^2-2\nu+1}.P_{1,2,\ldots,(2\nu)}.\sin\frac{\sigma}{2}.$$

Diese Ausdrücke bestätigen die eingangs ganz allgemein abgeleiteten Ausdrücke vollkommen. Bei der von mir erwähnten Verwendung in der Meteorologie ist namentlich der Quotient der beiden untersuchten Determinanten von Wichtigkeit; man erhält für denselben das sehr einfache Resultat

$$18)\qquad C_{2\nu}:S_{2\nu}=-tg\,\frac{\sigma}{2}.$$

Dorpat, 21. November 1887.

K. Weihrauch,
Prof. d. physikal. Geogr.

VIII.

Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

Von
Cand. math. THEODOR LOHNSTEIN
in Berlin.

Die Theorie des durch das arithmetisch-geometrische Mittel definirten Algorithmus wird dem historischen Entwickelungsgange entsprechend gewöhnlich nur im Zusammenhange mit der Theorie der elliptischen Integrale betrachtet und aus der Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung (in Legendre's Form) hergeleitet. Man kann sich aber die Aufgabe stellen, die Theorie dieses Algorithmus independent zu begründen. Dieses hat zuerst Gauss gethan, der offenbar die ganze Theorie der elliptischen Functionen auf dem Fundament der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aufzubauen beabsichtigte. Indess wurden, da Gauss aus Gründen, über welche sein Briefwechsel Aufschluss giebt,* seine diesbezüglichen Untersuchungen nie veröffentlichte, seine dahin gerichteten Bemühungen erst mit der Publication seines diesen Gegenstand betreffenden wissenschaftlichen Nachlasses (1866) in den „Werken" bekannt. Schon vorher hatte Borchardt** eine independente Herleitung der Differentialgleichung gegeben, welcher das arithmetisch-geometrische Mittel genügt. Das Wesentliche der von ihm angewandten Methode besteht darin, dass ein gewisser Differentialausdruck gebildet wird, von welchem gezeigt wird, dass er vermöge der durch den Algorithmus vorgeschriebenen Transformation sich nur mit einem Factor multiplicirt, woraus in bekannter Weise sein Verschwinden erschlossen werden kann. Es hat diese Herleitung insofern etwas Unbefriedigendes, als die Aufstellung gerade jenes Differentialausdruckes ohne die vorherige Kenntniss der in Rede stehenden Differentialgleichung nicht recht naturgemäss erscheint.

Gauss giebt zwei Herleitungen der erwähnten Differentialgleichung; die eine*** ist der Borchardt'schen analog, indem gezeigt wird, dass die linke Seite der Differentialgleichung von dem Index n der angewandten Transformation unabhängig ist; die zweite† beruht auf der Methode der

---

* Brief an Crelle vom 18. Mai 1828; vergl. Werke III, S. 495 unten.

** Borchardt's Journal, Bd. 58.

*** Gauss' Werke III, S. 381.

† ibid. S. 365 flg.

unbestimmten Coefficienten; vermittelst dieser wird zuerst die Potenzreihe für den reciproken Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels von $1+x$ und $1-x$ in der Umgebung von $x=0$ gewonnen und alsdann gezeigt, dass diese einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Diese Methode leidet an zwei Uebelständen; einmal lässt sich auf diese Weise das Gesetz der Bildung der Coefficienten der erwähnten Reihe nur sehr mühsam eruiren, sodann aber soll doch erst die Differentialgleichung dazu dienen, durch Reihenentwickelungen etc. Aufschluss über die Natur der durch unsern Algorithmus definirten Function zu geben und für jeden Werth des Arguments analytische Ausdrücke zu liefern.

Im Folgenden ist, im Anschluss an ein drittes Gauss'sches Fragment*, eine neue Herleitung der obenerwähnten Differentialgleichung gegeben, welche dieselbe durch directe Rechnung ohne vorherige Kenntniss der Reihe ermittelt.

Es seien x und y zwei beliebige complexe Zahlgrössen; alsdann bezeichnen wir mit x' und y' die aus ihnen vermittelst der Gleichungen

$$x'=\frac{x+y}{2}, \quad y'=\sqrt{xy}$$

abgeleiteten Grössen, zunächst unter der beschränkenden Voraussetzung, dass, wenn $x=\varrho e^{\varphi i}$, $y=\sigma e^{\psi i}$ ist, $y'=\sqrt{\varrho\sigma}\, e^{\frac{\varphi+\psi}{2}i}$ oder $=-\sqrt{\varrho\sigma}\, e^{\frac{\varphi+\psi}{2}i}$ sei, unter $\sqrt{\varrho\sigma}$ den Zahlenwerth dieser Grösse verstanden, je nachdem $\psi-\varphi \lesseqgtr \pi$ ist. Bildet man unter dieser Einschränkung, welche offenbar zur Folge hat, dass x', y' innerhalb des durch den Nullpunkt und die Punkte x und y in der Zahlenebene gebildeten Dreiecks liegen, aus dem Grössenpaar $x'y'$ in derselben Weise $x''y''$, wie $x'y'$ aus xy hergeleitet wurde, so lässt sich bekanntlich sehr leicht zeigen, dass man, wenn man, in dieser Weise fortfahrend, aus $x^{(\nu)}y^{(\nu)}$ immer $x^{(\nu+1)}y^{(\nu+1)}$ ableitet, sich sehr schnell einer Grenze nähert, indem $\lim\limits_{\nu=\infty}(x^{(\nu)}-y^{(\nu)})=0$ ist. Der absolute Werth des so definirten Grenzwerthes ist offenbar zwischen ϱ und σ enthalten, sein Argument zwischen den Grenzen φ und ψ resp. φ und $-2\pi+\psi$.

Durch diesen Algorithmus wird nun eine analytische Function von x und y definirt, welche wesentlich nur von dem Verhältniss $\frac{y}{x}$ abhängt. Als analytische Function von x und y betrachtet, ist sie offenbar unendlich vieldeutig, und zwar ersieht man leicht, in welcher Weise die unendlich vielen Werthe für ein bestimmtes (x, y) entspringen. Man braucht nämlich den auftretenden Wurzelgrössen nur bis zu einem bestimmten Index m ihre volle Allgemeinheit zu lassen und erst aus $(x^{(m)}, y^{(m)})$ in der oben beschriebenen Weise die folgenden Grössenpaare abzuleiten, um sich immer noch

* ibid. S. 372 flg.

einem bestimmten Grenzwerthe zu nähern, welcher natürlich wieder einen Werth der Function für (x, y) darstellt.

Wir lassen jetzt die Rechnung folgen, die sich zunächst ganz an Gauss anschliesst.

Wir setzen

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=f, \quad \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=g,$$
$$\frac{dx'}{x'}+\frac{dy'}{y'}=f', \quad \frac{dx'}{x'}-\frac{dy'}{y'}=g',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dx^{(\nu)}}{x^{(\nu)}}+\frac{dy^{(\nu)}}{y^{(\nu)}}=f^{(\nu)}, \quad \frac{dx^{(\nu)}}{x^{(\nu)}}-\frac{dy^{(\nu)}}{y^{(\nu)}}=g^{(\nu)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

dann ist

$$f'=\frac{dx+dy}{x+y}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)=\frac{\tfrac{1}{2}x(f+g)+\tfrac{1}{2}y(f-g)}{x+y}+\tfrac{1}{2}f=f+\tfrac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}g,$$
$$g'=\frac{dx+dy}{x+y}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)=\tfrac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}g;$$

hiernach erhält man

$$f^{(\nu)}=f^{(\nu-1)}+\tfrac{1}{2}\frac{x^{(\nu-1)}-x^{(\nu)}}{x^{(\nu)}}g^{(\nu-1)}=f^{(\nu-1)}+g^{(\nu)},$$

also

$$f^{(\infty)}=f+\sum_{\nu=1}^{\infty}g^{(\nu)};$$

da nun aus

$$g^{(\nu)}=\tfrac{1}{2}\frac{x^{(\nu-1)}-x^{(\nu)}}{x^{(\nu)}}g^{(\nu-1)}$$

sich ergiebt

$$g^{(\nu)}=2^{-\nu}\frac{x-x'}{x'}\,\frac{x'-x''}{x''}\cdots\frac{x^{(\nu-1)}-x^{(\nu)}}{x^{(\nu)}}g,$$

so folgt

$$f^{(\infty)}=\frac{2\,dM}{M}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\left(\tfrac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}+\tfrac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}\,\frac{x'-x''}{x''}+\cdots\right)$$

oder

$$\frac{dM}{M}=\frac{dx}{x}(\tfrac{1}{2}+A)+\frac{dy}{y}(\tfrac{1}{2}-A),$$

wenn das arithmetisch-geometrische Mittel mit M bezeichnet wird und

$$A=\tfrac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}+\tfrac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\,\frac{x'-x''}{x''}+\cdots=\tfrac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-\nu+1}\prod_{\mu=1}^{\nu}\frac{x^{(\mu-1)}-x^{(\mu)}}{x^{(\mu)}}$$

gesetzt wird. Wir führen nun neue Grössen ein durch die Gleichungen

$$M=x'v,$$
$$\frac{x-x'}{x'}=t, \quad \frac{x'-x''}{x''}=t_1, \quad \ldots, \quad \frac{x^{(\nu)}-x^{(\nu+1)}}{x^{(\nu+1)}}=t_\nu, \quad \ldots;$$

dann sind die Grössen t_ν durch die Relationen

$$t_\nu = \frac{1-\sqrt{1-t^2_{\nu-1}}}{1+\sqrt{1-t^2_{\nu-1}}}$$

miteinander verbunden.

Ferner wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2A-t}{1-t^2} v,$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \left(\frac{2A-t}{1-t^2}\right)^2 v + \frac{(1-t^2)\left(2\frac{dA}{dt}-1\right)+2t(2A-t)}{(1-t^2)^2} v = \frac{2(1-t^2)\frac{dA}{dt}+4A^2-1}{(1-t^2)^2} v,$$

endlich

$$A = \tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{8}tt_1 + \tfrac{1}{16}tt_1t_2 + \cdots$$

Hieraus ersehen wir, dass v als Function von t die beiden Punkte $t = \pm 1$, den Punkt $t = \infty$ und die singulären Punkte von A als singuläre Punkte besitzt. Es handelt sich daher zuvörderst um die Untersuchung von A. Zunächst ist offenbar die Reihe für A convergent, wenn $|t| < 1$* und $|1-\sqrt{1-t^2}|$ und $|1+\sqrt{1-t^2}|$ so fixirt werden, dass $|1-\sqrt{1-t^2}| < |1+\sqrt{1-t^2}|$ ist; wenn ferner die folgenden t_ν immer unter denselben Bedingungen gebildet werden. — Ist nun $|t|$ selbst nicht < 1, so ist doch einer der beiden Werthe von t_1 so beschaffen, dass $|t_1| < 1$; hieraus kann man entnehmen, dass die Reihe für A unter der Bedingung stets bestimmte Werthe liefert, dass man von einem bestimmten ν ab die $t_{\nu+1}, t_{\nu+2}, \cdots$ den obigen Festsetzungen gemäss bestimmt.

Es hat ferner A die Eigenschaft, nur eine endliche Anzahl von Verzweigungspunkten zu besitzen, die wir sogleich ermitteln werden. Denn t_1, als Function von t betrachtet, hat die beiden Verzweigungspunkte ± 1; setzen wir also, um die Verzweigungspunkte von t_2 zu erhalten, $t_1 = +1$ und $t_1 = -1$, so ergeben sich als Verzweigungspunkte von t_2 erstens wieder ± 1, sodann $t = \infty$. Hiernach hat man, um demnächst die Verzweigungspunkte von t_3 zu erhalten, $t_1 = \pm 1, \infty$ zu setzen; man kommt so erstens wieder auf $t = \pm 1, \infty$, sodann auf $t_1 = \infty$, $t = 0$. Es hat t_4 demnach, als Function von t_1 betrachtet, $t_1 = \pm 1, 0, \infty$ zu Verzweigungspunkten; dies ergiebt aus $t_1 = \pm 1, \infty$ für t wieder $t = \pm 1, \infty, 0$; aus $t_1 = 0$ erhält man aber wieder $t = \pm 1$. Wir erkennen hieraus, dass die weitere Fortsetzung des eben angewandten Verfahrens für A keine neuen Verzweigungspunkte liefert. Es hat also A nur die singulären Punkte $t = \pm 1, 0, \infty$. Dieselben Verzweigungspunkte hat daher auch v. Erst dies, d. h. der Umstand, dass A und v nur eine endliche Anzahl von singulären Punkten besitzen, berechtigt uns überhaupt, nach Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten für diese Grössen zu suchen.

Wir bilden also

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{4}\sum_0^\infty 2^{-\nu} \frac{d(tt_1 \ldots t_\nu)}{dt}.$$

---

* Wir bedienen uns der Bezeichnung $|a|$, um (nach Herrn Weierstrass) den absoluten Betrag einer complexen Grösse zu bezeichnen.

Es ist

$$\frac{d(tt_1\dots t_\nu)}{dt}=tt_1\dots t_\nu\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t_1}\frac{dt_1}{dt}+\frac{1}{t_2}\frac{dt_2}{dt}+\dots+\frac{1}{t_\nu}\frac{dt_\nu}{dt}\right).$$

Ferner hat man

$$\frac{dt_\nu}{dt_{\nu-1}}=\frac{t_{\nu-1}}{2}\,\frac{1-t_\nu^2}{1-t_{\nu-1}^2},$$

demnach

$$\frac{1}{t_\nu}\frac{dt_\nu}{dt}=2^{-\nu}\frac{tt_1\dots t_{\nu-1}}{t_\nu}\,\frac{1-t_\nu^2}{1-t^2}.$$

Hiernach ist

$$\tfrac{1}{2}(1-t^2)\frac{dA}{dt}=\frac{t}{4}\left(\frac{1}{2t}(1-t^2)\right)+\tfrac{1}{8}tt_1\left(\frac{1}{2t}(1-t^2)+\frac{t}{4t_1}(1-t_1^2)\right)$$
$$+\tfrac{1}{16}tt_1t_2\left(\frac{1}{2t}(1-t^2)+\frac{t}{4t_1}(1-t_1^2)+\frac{tt_1}{8t_2}(1-t_2^2)\right)+\cdots$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu}2^{-3-\nu-\mu}t^2t_1^2\dots t_{\mu-1}^2t_{\mu+1}t_{\mu+2}\dots t_\nu(1-t_\mu^2)$$
$$=\tfrac{1}{4}-(1+t^2)\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-3-\nu}t_1t_2\dots t_\nu$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu}2^{-3-\nu-\mu}t^2t_1^2\dots t_{\mu-1}^2t_{\mu+1}t_{\mu+2}\dots t_\nu(1-t_\mu^2)+\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-2-\nu}t_1t_2\dots t_\nu$$
$$=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)A+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\nu}2^{-3-\nu-\mu}t^2t_1^2\dots t_{\mu-1}^2t_{\mu+1}\dots t_\nu(1-t_\mu^2)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{-2-\nu}t_1t_2\dots t_\nu.$$

Nun folgt durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$t_\nu^2(1+t_{\nu+1})^2=4t_{\nu+1}$$

die Gleichung

$$t_1t_2\dots t_n=3\sum_{m=1}^{n-1}2^{-1-2m}t^2t_1^2\dots t_m^2t_{m+1}\dots t_n+\tfrac{1}{2}t^2t_1t_2\dots t_n$$
$$+\frac{1}{2^{2n}}t^2t_1^2\dots t_{n-1}^2+\frac{1}{2^{2n}}t^2t_1^2\dots t_n^2,\quad\text{falls } n>1;$$
$$t_1=\tfrac{1}{2}t^2t_1+\tfrac{1}{4}t^2+\tfrac{1}{4}t^2t_1^2;$$

hiernach ist, falls $\mu<\nu-1$,

$$t_{\mu+1}t_{\mu+2}\dots t_\nu=3\sum_{\varrho=1}^{\nu-\mu-1}2^{-1-2\varrho}t_\mu^2t_{\mu+1}^2\dots t_{\mu+\varrho}^2t_{\mu+\varrho+1}\dots t_\nu$$
$$+\tfrac{1}{2}t_\mu^2t_{\mu+1}\dots t_\nu+2^{2\mu-2\nu}t_\mu^2t_{\mu+1}^2\dots t_{\nu-1}^2+2^{2\mu-2\nu}t_\mu^2t_{\mu+1}^2\dots t_\nu^2.$$

Wir bringen mit Hilfe dieser Relationen das allgemeine Glied (in Bezug auf ν) der Summen in eine andere Form, welche in dem Ausdruck für $\frac{dA}{dt}$ nach Absonderung von $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)A$ noch übrig blieben. Sondern wir die Glieder von $\mu=1$ bis $\mu=\nu-2$ von den übrigen beiden Summanden ab, so erhalten wir für das allgemeine Glied in Bezug auf ν folgenden Ausdruck:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-3-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_{\mu-1}^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-3-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_{\mu-1}^2 t_\mu^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu$$
$$+ 2^{-2-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-2}^2 t_\nu - 2^{-2-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-2}^2 t_{\nu-1}^2 t_\nu + 2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2$$
$$- 2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2 + 2^{-2-\nu} t_1 t_2 \dots t_\nu .$$

Ersetzt man nun auf Grund der oben abgeleiteten Relationen $t_{\mu+1} \dots t_\nu$ in der ersten der vorstehenden Summen durch den oben gefundenen Ausdruck, so erhält man zunächst eine Doppelsumme, die man aber, wenn man, $\mu + \varrho = \mu'$ setzend, darauf die Summationsbedingungen gehörig berücksichtigend, nach μ summirt, sofort auf eine einfache nach μ' von $\mu' = 2$ bis $\mu' = \nu - 1$ reduciren kann. Da das allgemeine Glied der so erhaltenen Summe für $\mu' = 1$ gleich 0 wird, so kann man die Summation von $\mu' = 1$ bis $\mu' = \nu - 1$ erstrecken. Ersetzt man endlich, was nur eine andere Bezeichnung ist, μ' durch μ, so erhält man:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-3-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_{\mu-1}^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu$$
$$= 3 \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (2^{-4-\nu-\mu} - 2^{-3-\nu-2\mu}) t^2 t_1^2 \dots t_\mu^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-4-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_\mu^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu + \sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-3-3\nu+\mu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-3-3\nu+\mu} t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2 .$$

Ferner ist

$$2^{-2-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-2}^2 t_\nu = 2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-2}^2 t_{\nu-1}^2 t_\nu + 2^{-4-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2$$
$$+ 2^{-4-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2 ,$$

$$2^{-2-\nu} t_1 t_2 \dots t_\nu = 3 \sum_{\mu=1}^{\nu-1} 2^{-3-2\mu-\nu} t^2 t_1^2 \dots t_\mu^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu$$
$$+ 2^{-3-\nu} t^2 t_1 t_2 \dots t_\nu + 2^{-2-3\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 + 2^{-2-3\nu} t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2 .$$

Vereinigt man unter Berücksichtigung der eben abgeleiteten Gleichungen die im allgemeinen Gliede auftretenden Ausdrücke, so erhält man:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu-2} 2^{-3-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_\mu^2{}_{\mu+1} \dots t_\nu + 3.2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 t_\nu$$
$$+ 2^{-3-3\nu} (2^{\nu-1} - 2) (t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 + t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2)$$
$$+ 2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-2}^2 t_{\nu-1}^2 t_\nu + 2^{-4-2\nu} (t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 - t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2)$$
$$+ 2^{-2-3\nu} (t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 + t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2) - 2^{-2-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 t_\nu$$
$$+ 2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 - 2^{-3-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\nu-1} 2^{-3-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_\mu^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu + 2^{-2-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_{\nu-1}^2 .$$

Dieser Ausdruck ist nun von $\nu=1$ bis $\nu=\infty$ zu summiren. Thut man dies, so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} 2^{-3-\nu-\mu} t^2 t_1^2 \dots t_\mu^2 t_{\mu+1} \dots t_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-4-2\nu} t^2 t_1^2 \dots t_\nu^2$$
$$= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-2-\nu} t t_1 \dots t_\nu\right)^2 = A^2.$$

Es ist demnach

$$\tfrac{1}{2}(1-t^2)\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)A + A^2 = (\tfrac{1}{2}-tA)\left(\tfrac{1}{2}-\frac{1}{t}A\right).$$

Nun hatten wir oben gefunden:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2A-t}{1-t^2}v,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{2(1-t^2)\dfrac{dA}{dt}+4A^2-1}{(1-t^2)^2}v.$$

Ersetzen wir hierin $\dfrac{dA}{dt}$ durch seinen eben ermittelten Ausdruck, so kommt:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = 2Av\frac{t+\dfrac{1}{t}+4A}{(1-t^2)^2},$$

ferner ist

$$2Av = t.v + (1-t^2)\frac{dv}{dt},$$

also, wenn wir dies in die vorstehende Gleichung einsetzen:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = -\frac{1}{1-t^2}v + \frac{3t^2-1}{t(1-t^2)}\frac{dv}{dt} + \frac{2}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Dies ist also die Differentialgleichung, der das arithmetisch-geometrische Mittel aus $1+t$ und $1-t$ genügt. Setzen wir

$$v=\frac{1}{w}, \text{ so wird } \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{w^2}\frac{dw}{dt}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{2}{w^3}\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - \frac{1}{w^2}\frac{d^2w}{dt^2},$$

und die Differentialgleichung geht über in

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1-3t^2}{t(1-t^2)}\frac{dw}{dt} - \frac{1}{1-t^2}w = 0.$$

Macht man endlich $\tau=t^2$, so geht aus ihr die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + \frac{1-2\tau}{\tau(1-\tau)}\frac{dw}{d\tau} - \frac{1}{4\tau(1-\tau)}w = 0$$

hervor. Mit Berücksichtigung des Umstandes, dass ein Werth unserer Function für $t=0$ gleich 1 wird, erhalten wir demnach

$$\frac{1}{v} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, t^2),$$

woraus wir weiter mit Zuhilfenahme der Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch bestimmte Integrale

$$\frac{1}{v} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-t^2 \sin^2\varphi}}$$

ableiten können.

Setzt man $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-t^2 \sin^2\varphi}}$, $E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-t^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$, so folgt endlich aus $A = \frac{1}{2}\left((1-t^2)\frac{dv}{v\,dt} + t\right)$

$$2tA = \frac{K-E}{K} = 1 - \frac{E}{K}.$$

Da $E = F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, t^2)$ ist, so kann man $\frac{E}{K}$ und auch $1 - \frac{E}{K}$ durch einen Kettenbruch ausdrücken. Man erhält so

$$A = \cfrac{\frac{1}{4}t}{1 - (\frac{3}{2})^2 \cfrac{\frac{t^2}{1.2}}{1 - (\frac{1}{2})^2 \cfrac{\frac{t^2}{2.3}}{1 - (\frac{5}{2})^2 \cfrac{\frac{t^2}{3.4}}{1 - (\frac{3}{2})^2 \cfrac{\frac{t^2}{4.5}}{1 - \cdots}}}}}.$$

Berlin, December 1887.

IX.

Ueber Minimalflächen.

Von
J. Vivanti
in Mantua.

§ 1. Einleitung.

Als Minimalflächen werden gewöhnlich diejenigen Flächen bezeichnet, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. Die Coordinaten der Punkte einer Minimalfläche wurden von Herrn Weierstrass unter die zweifache Form:

$$
1)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\,F(u)\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)\,F_1(v)\,dv, \\ y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\,F(u)\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)\,F_1(v)\,dv, \\ z = \int u\,F(u)\,du + \int v\,F_1(v)\,dv \end{cases}
$$

und

$$
2)\quad \begin{cases} x = \frac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u) + \frac{1-v^2}{2}f''_1(v) + vf'_1(v) - f_1(v), \\ y = i\left\{\frac{1+u^2}{2}f''(u) - uf'(u) + f(u) - \frac{1+v^2}{2}f''_1(v) + vf'_1(v) - f_1(v)\right\}, \\ z = uf''(u) - f'(u) + vf''_1(v) - f'_1(v) \end{cases}
$$

gesetzt, wo $f(u)$, $f_1(v)$ beliebige Functionen der complexen Variabeln u bezw. v sind, und

$$F(u) = f'''(u), \quad F_1(v) = f'''_1(v).$$

Die Fläche ist reell, wenn F und F_1 zu einander conjugirt sind; dann entsprechen die reellen Punkte der Fläche den paarweise conjugirten Werthen von u und v.

Sind die Functionen F, F_1 durch die Relation:

$$3)\quad F_1(u) = -\frac{1}{u^4}F\left(-\frac{1}{u}\right),$$

und dementsprechend die Functionen f, f_1 durch die Relation:

$$4)\quad f_1(u) = -u^2 f\left(-\frac{1}{u}\right)$$

verbunden, so ist die Minimalfläche eine Doppelfläche.

Die Theorie der Minimalflächen ist zu bekannt, als dass es nöthig wäre, hier auf dieselbe näher einzugehen. Eine ausführliche Zusammenfassung aller diese Theorie betreffenden Untersuchungen bildet den wichtigsten Theil des soeben erschienenen I. Bandes der „Leçons sur la théorie générale des surfaces" von H. G. Darboux (Paris, Gauthier-Villars, 1887). Durch eine Fussnote dieses ausgezeichneten Werkes (S. 364) wurde die vorliegende Arbeit veranlasst.

Herr Henneberg*, und kurz darauf Herr Schilling**, untersuchten diejenige Doppelfläche, welche der Function:

$$F(u)=3\left(u-\frac{1}{u}\right)\left(u+\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}$$

entspricht. Indem H. Darboux (a. a. O.) diese Untersuchungen erwähnt, weist er auf die durch die Function:

$$F(u)=\left(\frac{1}{u}-u\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{u}+u\right)^{\beta}\frac{1}{u^2}$$

erzeugten Doppelflächen hin, wo β, wegen der Bedingung 3), ungerade sein muss. Die Bestimmung einiger allgemeinen Eigenschaften dieser Flächen bildet den Inhalt der vorliegenden Note. Es möge aber dazu die Berechnung eines Integrals vorausgehen.

§ 2. Berechnung eines Integrals.

Betrachten wir das Integral:

$$\int\left(\frac{1}{u}-u\right)^{m}\left(\frac{1}{u}+u\right)^{n}\frac{du}{u},$$

wo m und n ganze, nicht negative und nicht zugleich verschwindende Zahlen bedeuten, und bezeichnen es durch das Symbol $H(m, n, u)$ oder $H(m, n)$. Setzen wir:

$$\frac{1}{u}-u=2p,\quad \frac{1}{u}+u=2q,$$

also

$$q^2=p^2+1,\quad \frac{du}{u}=-\frac{dp}{q}=-\frac{dq}{p},$$

so folgt:

$$H(m,n)=-2^{m+n}\int p^{m-1}q^{n}\,dq=-2^{m+n}\int p^{m}q^{n-1}\,dp=-2^{m+n}\varphi(m,n),$$

wo:

$$\varphi(m,n)=\varphi(m,n,u)=\int p^{-1m}q^{n}\,dq=\int p^{m}q^{n-1}\,dp$$

gesetzt wurde. Durch theilweise Integration ergiebt sich:

---

* „Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben" (Zürich 1875). — „Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat" (Vierteljahrsschr. d. naturf. Gesellsch. in Zürich, Bd. XXI).

** „Die Minimalflächen fünfter Classe" (Göttingen, 1880).

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{n+1} q^{n+1} p^{m-1} - \frac{m-1}{n+1} \int q^{n+1} p^{m-2}\, dp;$$

es ist aber

$$\int q^{n+1} p^{m-2}\, dp = \int q^{n-1} p^{m-2} q^2\, dp = \int q^{n-1} p^{m-2} (p^2+1)\, dp$$
$$= \varphi(m, n) + \varphi(m-2, n),$$

also:

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{m+n} \{q^{n+1} p^{m-1} - (m-1)\, \varphi(m-2, n)\},$$

und allgemein:

$$5) \quad \varphi(m-2h, n) = \frac{1}{m+n-2h} \{q^{n+1} p^{m-2h-1} - (m-2h-1)\, \varphi(m-2h-2m)\}.$$

Hieraus folgt:

$$6) \quad \varphi(m, n) = \frac{q^{n+1}}{m+n} \left\{ p^{m-1} - \frac{m-1}{m+n-2} p^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+n-2)(m+n-4)} p^{m-5} - \dots \right\} + const.$$
$$= \frac{1}{m+n} p^{m-1} q^{n+1} F\left(1, \frac{1-m}{2}, 1 - \frac{m+n}{2}, -p^{-2}\right) + const.$$

Man erhält analog:

$$7) \quad \varphi(m, n) = \frac{1}{m+n} p^{m+1} q^{n-1} F\left(1, \frac{1-n}{2}, 1 - \frac{m+n}{2}, q^{-2}\right) + const.$$

Ist $m = 0$ (oder $n = 0$), so geht die rechte Seite von 7) [oder von 6)] in eine geometrische Reihe über; in jedem andern Falle, ausgenommen wenn m und n gleichzeitig gerade sind, ist wenigstens eine von den Reihen 6) und 7) endlich. Die Function $\varphi(m, n)$ ist also jedenfalls algebraisch, ausgenommen etwa, wenn m und n gleichzeitig gerade sind.

Fassen wir jetzt diesen letzten Fall ins Auge. Die Formel 5), die auch für negative Werthe von $m-2h-2$ gilt, wird erst dann illusorisch, wenn $m+n-2h$ verschwindet, wenn nämlich $m-2h = -n$; folglich wird $\varphi(m, n)$, für gerade m und n, durch rationale Glieder in endlicher Anzahl und durch $\varphi(n, -n)$ ausgedrückt. Setzt man:

$$q = px,$$

so ist:

$$\frac{dp}{q} = \frac{1}{x} \frac{dp}{p}, \quad \frac{dq}{q} = dx + x \frac{dp}{p},$$

oder wegen der Relation $\frac{dp}{q} = \frac{dq}{p}$:

$$\frac{dp}{q} = \frac{dx}{1-x^2},$$

$$\varphi(-n, n) = \int p^{-n} q^{n-1}\, dp = \int \left(\frac{q}{p}\right)^n \frac{dp}{q} = \int \frac{x^n\, dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{1-x^2} - \int \frac{1-x^n}{1-x^2}\, dx.$$

Da n gerade ist, so ist $\frac{1-x^n}{1-x^2}$ eine ganze Function, welche durch Integration eine ebensolche Function ergiebt; dagegen ist $\int \frac{dx}{1-x^2}$ eine logarithmische Function. Folglich ist $\varphi(m, n)$ im betrachteten Falle transcendent. Wir können also schliessen:

$\varphi(m, n)$ [oder $H(m, n)$] ist dann und nur dann algebraisch, wenn wenigstens eine der Zahlen m, n ungerade ist.*

§ 3. Die Gleichungen der Fläche.

Die reelle Doppelfläche, welche der Function:

$$F(u) = \left(\frac{1}{u} - u\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{u} + u\right)^{\beta} \frac{1}{u^2}$$

entspricht, wird durch die Gleichungen**:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\{H(\alpha+1, \beta, u) + H(\alpha+1, \beta, v)\} \\ &= -2^{\alpha+\beta}\{\varphi(\alpha+1, \beta, u) + \varphi(\alpha+1, \beta, v)\}, \\ y &= \frac{i}{2}\{H(\alpha, \beta+1, u) - H(\alpha, \beta+1, v)\} \\ &= -2^{\alpha+\beta} i\{\varphi(\alpha, \beta+1, u) - \varphi(\alpha, \beta+1, v)\}, \end{aligned}$$

$$z = H(\alpha, \beta, u) + H(\alpha, \beta, v) = -2^{\alpha+\beta}\{\varphi(\alpha, \beta, u) + \varphi(\alpha, \beta, v)\}$$

gegeben, die durch Anwendung der Bezeichnungen (wo C_1, C_2 Constanten sind):

$$8)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2} H(\alpha+1, \beta, u) = \dfrac{-2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta+1} p^{\alpha+2} q^{\beta-1} F\left(1, \dfrac{1-\beta}{2}, \dfrac{1-\alpha-\beta}{2}, q^{-2}\right) = X(u), \\ \dfrac{i}{2} H(\alpha, \beta+1, u) = \dfrac{-2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta+1} i p^{\alpha-1} q^{\beta+2} F\left(1, \dfrac{1-\alpha}{2}, \dfrac{1-\alpha-\beta}{2}, -p^{-2}\right) = Y(u), \\ H(\alpha, \beta, u) = \dfrac{-2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} p^{\alpha-1} q^{\beta+1} F\left(1, \dfrac{1-\alpha}{2}, 1-\dfrac{\alpha+\beta}{2}, -p^{-2}\right) + C_1 \\ \qquad = \dfrac{-2^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta} p^{\alpha+1} q^{\beta-1} F\left(1, \dfrac{1-\beta}{2}, 1-\dfrac{\alpha+\beta}{2}, q^{-2}\right) + C_2 = Z(u) \end{cases}$$

die folgende Form annehmen:

---

* Man kann hieraus als Corollar einen arithmetischen Satz erhalten. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit $H(m, n)$ algebraisch sei, ist, dass der Coefficient von u^{-1} in der Entwickelung von $\left(\frac{1}{u} - u\right)^m \left(\frac{1}{u} + u\right)^n \frac{1}{u}$ verschwinde. Dieser Coefficient fällt mit dem Coefficienten von u^{m+n} in der Entwickelung von $(1-u^2)^m(1+u^2)^n$ zusammen, den wir durch c bezeichnen wollen. Es ist aber offenbar für $m+n$ ungerade

$$c = 0,$$

und für $m+n$ gerade

$$c = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{\frac{m+n}{2} - h} \binom{n}{h};$$

aus unserem Satze folgt also, dass für $m+n$ gerade $\sum_{h=0}^{m} (-1)^h \binom{m}{\frac{m+n}{2} - h} \binom{n}{h}$ dann und nur dann verschwindet, wenn m und n ungerade sind. Es ist leicht, direct zu beweisen, dass für ungerade m und n $c = 0$ ist; nicht so leicht ist es aber, zu zeigen, dass im umgekehrten Falle c niemals verschwinden kann.

** Da in diesem Falle F und F_1 identisch sind.

$$9)\qquad x = X(u) + X(v), \quad y = Y(u) - Y(v), \quad z = Z(u) + Z(v).$$

Aus den in § 2 erhaltenen Resultaten ergiebt sich Folgendes:

Ist α ungerade, β gerade, so ist x transcendent, y und z sind algebraisch;
" α gerade, β ungerade, " " y " z " x " "
sind α und β gerade, " " z " x " y " "
sind endlich α und β ungerade, so sind sämmtliche Coordinaten algebraisch.

Also ist die Doppelfläche dann und nur dann algebraisch, wenn α und β ungerade sind; und sie ist dann offenbar rational. Wir werden uns ausschliesslich mit diesem Falle beschäftigen.

Es folgt aus der Vergleichung von 2) und 9):

$$puf'' + uf' - f = X, \quad i(quf'' - uf' + f) = Y, \quad uf'' - f' = Z$$

und hieraus:

$$f = -u(pX + qiY + Z), \quad f' = u(X - iY) - Z, \quad f'' = X - iY.$$

Die Functionen X, Y, Z genügen, wie man leicht sieht, den folgenden Relationen:

$$10)\qquad X(-u) = -X(u), \quad Y(-u) = -Y(u), \quad Z(-u) = Z(u),$$

$$11)\qquad X\left(\frac{1}{u}\right) = -X(u), \quad Y\left(\frac{1}{u}\right) = Y(u), \quad Z\left(\frac{1}{u}\right) = Z(u),$$

aus welchen folgt:

$$12)\quad X\left(-\frac{1}{u}\right) = X(u), \quad Y\left(-\frac{1}{u}\right) = -Y(u), \quad Z\left(-\frac{1}{u}\right) = Z(u).$$

Diese Gleichungen verwandeln die 9) in:

$$13)\quad x = X(u) + X(w), \quad y = Y(u) + Y(w), \quad z = Z(u) + Z(w),$$

wo $w = -\dfrac{1}{v}$ ist.

§ 4. Digression über Doppelflächen im Allgemeinen.

Die Form der Gleichungen 13) ist charakteristisch für die Doppelflächen; man kann nämlich die Gleichungen jeder solchen Fläche auf diese Form bringen. Setzen wir allgemein:

$$\tfrac{1}{2}\int (1 - u^2) F(u)\, du = X(u),$$

$$\frac{i}{2}\int (1 + u)^2 F(u)\, du = Y(u),$$

$$\int u\, F(u)\, du = Z(u),$$

so ist wegen 3):

$$\tfrac{1}{2}\int (1 - v^2) F_1(v)\, dv = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1 - v^2}{v^4} F\left(-\frac{1}{v}\right) dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{v^2}\right) F\left(-\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{v^2} = \tfrac{1}{2}\int (1 - w^2) F(w)\, dw = X(w),$$

$$\frac{i}{2}\int^{v}(1+v^2)F_1(v)\,dv = -\frac{i}{2}\int\frac{1+v^2}{v^4}F\left(-\frac{1}{v}\right)dv$$
$$= -\frac{i}{2}\int^{v}\left(1+\frac{1}{v^2}\right)F\left(-\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v^2} = -\frac{i}{2}\int(1+w^2)F(w)\,dw = -Y(w),$$
$$\int v F_1(v)\,dv = -\int\frac{1}{v^3}F\left(-\frac{1}{v}\right)dv = -\int\frac{1}{v}F\left(-\frac{1}{v}\right)\frac{dv}{v^2} = \int w F(w)\,dw = Z(w),$$

wodurch die 1) in die 13) übergehen.

Aus den 13) folgt, da $\frac{dw}{dv} = w^2$ ist:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1-u^2}{2}F(u),\qquad \frac{\partial y}{\partial u} = i\frac{1+u^2}{2}F(u),\qquad \frac{\partial z}{\partial u} = uF(u),$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1-w^2}{2}F(w)w^2,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = i\frac{1+w^2}{2}F(w)w^2,\quad \frac{\partial z}{\partial v} = wF(w)w^2,$$

und hieraus:

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = A = \tfrac{1}{2}iw^2F(u)F(w)(w-u)(1-uw),$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = B = \tfrac{1}{2}iw^2F(u)F(w)(w-u)\,i(1+uw),$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = C = \tfrac{1}{2}iw^2F(u)F(w)(w-u)(w+u),$$
$$A^2+B^2+C^2 = \Delta^2 = [\tfrac{1}{2}iw^2F(u)F(w)(w-u)]^2(w-u)^2,$$

also, wenn man die Richtungscosinus der Normale mit θ_x, θ_y, θ_z bezeichnet:

$$14)\quad \theta_x = \frac{A}{\Delta} = \frac{1-uw}{w-u},\quad \theta_y = \frac{B}{\Delta} = i\frac{1+uw}{w-u},\quad \theta_z = \frac{C}{\Delta} = \frac{w+u}{w-u}.$$

Die Gleichungen 13) und 14) veranschaulichen diejenige Eigenschaft der Doppelflächen, welcher sie ihren Namen verdanken. Die den zwei Werthepaaren der Parameter $u=a$, $w=b$ $\left(\text{oder } u=a,\ v=-\frac{1}{b}\right)$ und $u=b$, $w=a$ $\left(\text{oder } u=b,\ v=-\frac{1}{a}\right)$ entsprechenden Punkte der Fläche sind zusammenfallend; die Richtungen der Normalen in denselben sind aber einander entgegengesetzt.

§ 5. Die erzeugende Minimalcurve und ihre Projectionen.

Die Erzeugungscurven $v = const.$ der Fläche entstehen durch Translation der Minimalcurve*:

$$15)\qquad x = X(u),\quad y = Y(u),\quad z = Z(u),$$

die Erzeugungslinien $u = const.$ durch Translation der Curve:

$$x = X(v),\quad y = Y(v),\quad z = Z(v),$$

* So heisst nach Lie eine Curve, deren Bogenlänge gleich Null ist.

welche mit der vorhergehenden der Form nach identisch ist und aus derselben durch eine Translationsbewegung erhalten werden kann (Darboux, S. 353).

Wir werden die Linie 15) durch L, ihre Projectionen auf den yz-, zx-, xy-Ebenen durch L_x, L_y, L_z bezeichnen. In diesem Paragraphen wollen wir erstens die Ordnung, die Classe und die Singularitäten der L_x, L_y, L_z, zweitens den Rang, die Ordnung und die Classe der L bestimmen.

Ordnung der L_z. Die Gleichungen der L_z sind:

$$x = X(u), \quad y = Y(u);$$

sie sind beide vom Grade 2τ in u, wenn man

$$\alpha + \beta = \sigma, \quad \alpha + \beta + 1 = \sigma + 1 = \tau$$

setzt. Jedem vorgegebenen Werthe von x (oder von y) entsprechen also 2τ im Allgemeinen verschiedene* Werthe von u, und diesen ebensoviele Werthe von y (oder von x). Folglich ist 2τ die Ordnung der L_z**.

Classe der L_z. Bezeichnen wir der Kürze wegen die constante Grösse $-\frac{2^\sigma}{\tau}$ mit c, so ist die Gleichung einer durch einen Punkt $x = c\xi$, $y = c\eta i$ der xy-Ebene gehenden Tangente zu L_z:

$$16)\qquad \begin{vmatrix} c\xi & c\eta i & 1 \\ X(u) & Y(u) & 1 \\ X'(u) & Y'(u) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Entwickelung der Determinante:

$$Y'(X - c\xi) - X'(Y - c\eta i) = 0.$$

Nun ist, wenn ψ_1 eine ganze Function von q^2 vom Grade $\frac{\beta-5}{2}$, ψ_2 eine ganze Function von p^2 vom Grade $\frac{\alpha-5}{2}$ bedeutet:

$$X = cp^{\alpha+2}\left(q^{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\sigma-1}q^{\beta-3} + \psi_1\right), \quad Y = ciq^{\beta+2}\left(p^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\sigma-1}p^{\alpha-3} + \psi_2\right);$$

$$X' = 2^\sigma \frac{p^{\alpha+1}q^\beta}{u}, \qquad Y' = 2^\sigma i \frac{q^{\beta+1}p^\alpha}{u},$$

also, wenn γ_θ eine Summe von Gliedern, deren Grad in p und $q < \theta$ ist, darstellt:

---

* Da die Wurzeln der Gleichung:

$$X'(u) \equiv \tfrac{1}{4}(1-u^4)F(u) = 0$$

± 1 und $\pm i$ sind, und diese Werthe von u die Gleichung $X(u) = const.$, ausgenommen für ganz specielle Werthe der Constante, nicht erfüllen, so sind die Wurzeln dieser letzten Gleichung nothwendig von einander verschieden. Dieselbe Eigenschaft kommt den Gleichungen $Y(u) = const.$, $Z(u) = const.$ zu.

** Man kann auch wirklich die Gleichungen der L_z derart umgestalten, dass es ersichtlich wird, dass ihre Resultante vom Grade 2τ in x, y ist. Siehe eine Note des Verfassers auf S. 184.

$$
\begin{aligned}
&Y'(X-c\xi)-X'(Y-c\eta i)\\
&=\frac{2^\sigma ci}{u}\left\{p^\alpha q^{\beta+1}\left[p^{\alpha+2}\left(q^{\beta-1}+\frac{\beta-1}{\sigma-1}q^{\beta-3}+\psi_1\right)-\xi\right]\right.\\
&\qquad\left.-p^{\alpha+1}q^\beta\left[q^{\beta+2}\left(p^{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{\sigma-1}p^{\alpha-3}+\psi_2\right)-\eta\right]\right\}\\
&=\frac{2^\sigma ci}{u}p^\alpha q^\beta\left\{q^\beta p^{\alpha+2}-p^\alpha q^{\beta+2}+\frac{\beta-1}{\sigma-1}p^{\alpha+2}q^{\beta-2}+\frac{\alpha-1}{\sigma-1}p^{\alpha-2}q^{\beta+2}+\gamma_\sigma\right\}\\
&=^*\frac{2^\sigma ci}{u}p^\alpha q^\beta\left\{-q^\beta p^\alpha+\frac{\beta-1}{\sigma-1}p^{\alpha+2}q^{\beta-2}+\frac{\alpha-1}{\sigma-1}p^{\alpha-2}q^{\beta+2}+\gamma_\sigma\right\}\\
&=^*\frac{2^\sigma ci}{u}p^\alpha q^\beta\left\{\frac{p^{\alpha-2}q^{\beta-2}}{\sigma-1}[-p^4+(\alpha-\beta-1)p^2+(\alpha-1)]+\gamma_\sigma\right\}.
\end{aligned}
$$

Da der äussere Coefficient von ξ, η unabhängig ist, so ist die Classe der L_z durch den Grad des eingeklammerten Ausdrucks gegeben; dieser Grad ist σ in p, q, also 2σ in u. Daher ist 2σ die Classe der L_z.

Singularitäten der L_z. Diese bestimmen sich durch die Plücker-schen Formeln, nachdem man die Ordnung 2τ, die Classe 2σ und das Geschlecht 0 kennt. Bezeichnen, wie gewöhnlich, d, r, w, t die Anzahlen der Doppel-, Rückkehr- und Wendepunkte und der Doppeltangenten, so ergiebt sich:

$$d=2\sigma^2-\sigma+2,\quad r=2\tau,\quad t=2\sigma^2-5\sigma+5,\quad w=2\sigma-4.$$

Ordnung der L_y. Die Gleichungen der L_y sind:

$$x=X(u),\quad z=Z(u).$$

Es entsprechen, der ersten Gleichung gemäss, jedem vorgegebenen Werthe von x 2τ Werthe von u, welche aber [Gl. 12)] paarweise entgegengesetzt-reciprok sind. Für je zwei solche Werthe nimmt $Z(u)$ [Gl. 12)] einen und denselben Werth an, folglich entsprechen jedem x-Werthe τ im Allgemeinen von einander verschiedene z-Werthe. Man würde analog finden, dass jedem z-Werthe σ verschiedene x-Werthe entsprechen [da die Function $Z(u)$ vom Grade 2σ in u ist]. Also ist τ die Ordnung der L_y.

Classe der L_y. Wir müssen statt der Gl. 16) die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c\xi & c\zeta & 1\\ X & Z & 1\\ X' & Z' & 0\end{vmatrix}=0$$

betrachten, wo $c\xi$, $c\zeta$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes der xz-Ebene sind. Man erhält durch Entwickelung:

$$X'(Z-c\zeta)-Z'(X-c\xi)=0.$$

Nun ist, wenn φ_1, φ_2 zwei ganze Functionen von q^2 vom Grade $\frac{\beta-3}{2}$ bezeichnen:

---

* Wegen der Relation $p^2+1=q^2$.

$$X = cp^{\alpha+2}(q^{\beta-1} + \varphi_1), \quad Z = c\frac{\tau}{\sigma}p^{\alpha+1}(q^{\beta-1} + \varphi_3);$$

$$X' = \frac{2^\sigma p^{\alpha+1} q^\beta}{u}, \qquad Z' = \frac{2^\sigma p^\alpha q^\beta}{u};$$

also:

$$X'(Z-c\zeta) - Z'(X-c\xi)$$

$$= \frac{2^\sigma c}{u}\left\{p^{\alpha+1}q^\beta\left[\frac{\tau}{\sigma}p^{\alpha+1}(q^{\beta-1}+\varphi_3)-\zeta\right] - p^\alpha q^\beta\left[p^{\alpha+2}(q^{\beta-1}+\varphi_1)-\xi\right]\right\}$$

$$= \frac{2^\sigma c}{u}p^\alpha q^\beta\left\{\frac{\tau}{\sigma}p^{\alpha+2}q^{\beta-1} + \frac{\tau}{\sigma}p^{\alpha+2}\varphi_3 - p\zeta - p^{\alpha+2}q^{\beta-1} - p^{\alpha+2}\varphi_1 + \xi\right\}$$

$$= \frac{2^\sigma c}{u}p^\alpha q^\beta\left\{\frac{1}{\sigma}p^{\alpha+2}q^{\beta-1} + p^{\alpha+2}\left(\frac{\tau}{\sigma}\varphi_3 - \varphi_1\right) + \xi - p\zeta\right\}.$$

Daher giebt die Gleichung:

$$\frac{1}{\sigma}p^{\alpha+2}q^{\beta-1} + p^{\alpha+2}\left(\frac{\tau}{\sigma}\varphi_3 - \varphi_1\right) + \xi - p\zeta = 0$$

die Werthe von u an, die den Berührungspunkten der aus $(c\xi, c\zeta)$ gehenden Tangenten entsprechen. Diese Gleichung ist von der $2\tau^{\text{ten}}$ Ordnung; ihre linke Seite ändert sich aber nicht, wenn man u durch $-\frac{1}{u}$ ersetzt, folglich sind ihre Wurzeln paarweise entgegengesetzt-reciprok. Für je zwei solche Wurzeln nehmen x und z je einen und denselben Werth an; also gehen aus einem beliebigen Punkte nur τ Tangenten; τ ist die Classe der L_y.

Singularitäten der L_y. Man findet durch die Plücker'schen Formeln:

$$d = t = \frac{(\sigma-1)(\sigma-2)}{2}, \quad r = w = \sigma - 1.$$

Ordnung, Classe und Singularitäten der L_x. Die charakteristischen Zahlen der L_x sind mit denen der L_y identisch. Man erhält sie auf eben demselben Wege; der einzige Unterschied ist, dass man hier nicht mit entgegengesetzt-reciproken, sondern mit reciproken Wurzeln zu thun hat [s. Gl. 11)].

Ordnung der L. Die Ordnung von L ist gleich der höchsten unter den Ordnungen ihrer Projectionen. Wir müssen aber hier als Ordnung der L_y (oder der L_x) nicht τ, sondern 2τ annehmen. Da nämlich für entgegengesetzt-reciproke u-Werthe y entgegengesetzte, x und z gleiche Werthe annehmen, so ist die Minimalcurve in Bezug auf die xz-Ebene symmetrisch und ihre Punkte projiciren sich zu je zweien auf einen und denselben Punkt der L_y, welche also doppelt aufgezählt werden muss. Dasselbe folgt von L_x, da gleiche Werthe von y und z, aber entgegengesetzte Werthe von x zwei reciproken u-Werthen entsprechen, also die Minimalcurve auch in Bezug auf die yz-Ebene symmetrisch ist.

Wir schliessen, dass die Ordnung von L 2τ beträgt.

Rang der L. Der Rang der L ist gleich der höchsten unter den Classen der L_x, L_y, L_z. Diese Classen sind bezw. 2τ, 2τ, 2σ (da, wie oben gesagt, L_x und L_y als doppelte Curven gelten müssen); also ist 2τ der Rang der L.

Classe der L. Die Gleichung der Osculationsebene der Minimalcurve ist bekanntlich (s. z. B. Darboux, S. 342):

$$pX + iqY + Z - (p\xi + iq\eta + \zeta) = 0,$$

wo ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten darstellen. Nun ist:

$$pX + iqY + Z$$
$$= c\left[p^{\alpha+3}\left(q^{\beta-1} + \frac{\beta-1}{\sigma-1}q^{\beta-3} + \gamma_{\beta-3}\right) - q^{\beta+3}\left(p^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\sigma-1}p^{\alpha-3} + \gamma_{\alpha-3}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\tau}{\sigma}p^{\alpha+1}(q^{\beta-1} + \gamma_{\beta-1})\right]$$
$$= c\left[p^{\alpha+3}q^{\beta-1} - q^{\beta+3}p^{\alpha-1} + \frac{\beta-1}{\sigma-1}p^{\alpha+3}q^{\beta-3} + \frac{\alpha-1}{\sigma-1}p^{\alpha-3}q^{\beta+3} + \frac{\tau}{\sigma}p^{\alpha+1}q^{\beta-1} + \gamma_\sigma\right]$$
$$= c\left[-\frac{1}{\sigma(\sigma-1)}p^{\alpha+3}q^{\beta-3} + \gamma_\sigma\right],$$

wie man durch einfache Umformungen erhält. Der Grad der Gleichung der Osculationsebene in u ist also 2σ, und diese Zahl giebt die Classe der Minimalcurve an.

Bezeichnen also O, R und C die Ordnung, den Rang und die Classe der L, so haben wir gefunden:

$$O = 2\tau, \quad R = 2\tau, \quad C = 2\sigma.$$

§ 6. Ordnung und Classe der Doppelfläche.

Wird die rechte Seite jeder der Gleichungen $\left(\text{wo } c_1 = \frac{1}{2\tau}\right)$:

$$x = X(u) = c_1\left(\frac{u^2-1}{u}\right)^{\alpha+2}\left\{\left(\frac{u^2+1}{u}\right)^{\beta-1} + \cdots\right\}$$
$$= c_1\left\{\frac{(u^2-1)^{\alpha+2}(u^2+1)^{\beta-1}}{u^{\alpha+\beta+1}} + \cdots\right\},$$
$$y = Y(u) = -c_1 i\left(\frac{u^2+1}{u}\right)^{\beta+2}\left\{\left(\frac{u^2-1}{u}\right)^{\alpha-1} - \cdots\right\}$$
$$= -c_1 i\left\{\frac{(u^2+1)^{\beta+2}(u^2-1)^{\alpha-1}}{u^{\alpha+\beta+1}} - \cdots\right\}$$

auf die Form eines einzigen Bruches gebracht, so ist der Nenner in beiden Fällen u^τ, der Zähler aber ein Polynom in u^2, dessen erstes und letztes Glied nur von der Entwickelung des Productes $(u^2-1)^{\alpha+2}(u^2+1)^{\beta-1}$ bezw. $(u^2+1)^{\beta+2}(u^2-1)^{\alpha-1}$ herrührt. Da nun α und β ungerade sind, so ist:
$(u^2-1)^{\alpha+2}(u^2+1)^{\beta-1} = (u^{2(\alpha+2)} - \cdots - 1)(u^{2(\beta-1)} + \cdots + 1) = u^{2\tau} + \cdots - 1,$
$(u^2+1)^{\beta+2}(u^2-1)^{\alpha-1} = (u^{2(\beta+2)} + \cdots + 1)(u^{2(\alpha-1)} - \cdots + 1) = u^{2\tau} + \cdots + 1,$
also:

$$x = c_1\frac{u^{2\tau} + \cdots - 1}{u^\tau}, \quad y = -c_1 i\frac{u^{2\tau} + \cdots + 1}{u^\tau},$$

woraus folgt, wenn a, b zwei Constanten bedeuten:

$$17)\quad \begin{cases} X(u) - iY(u) = x - iy = c_1\dfrac{au^{2\sigma} + \cdots - 2}{u^\tau}, \\ X(u) + iY(u) = x - iy = c_1\dfrac{2u^{2\tau} + \cdots + bu^2}{u^\tau} = c_1\dfrac{2u^{2\sigma} + \cdots + b}{u^{\sigma-1}}. \end{cases}$$

Aus der Elimination von u zwischen diesen Gleichungen ergiebt sich eine Gleichung:

$$R(x+iy,\ x-iy)=R_1(x,y)=0,$$

welche die Linie L_z darstellt und, wie schon gefunden, vom Grade 2τ in x, y oder in $x+iy$, $x-iy$ ist. Sollen x, y nicht mehr die Coordinaten der Minimalcurve, sondern die der Minimalfläche bezeichnen, so müssen wir statt x und y $x-X(v)$ bezw. $y+Y(v)$ setzen, wodurch die obige Gleichung in:

$$18)\qquad R\,[x+iy-(X(v)-iY(v)),\ x-iy-(X(v)+iY(v))]=0$$

übergeht. Diese Gleichung ist vom Grade 2τ in x, y, und ebenfalls vom Grade 2τ in $X(v)-iY(v)$, $X(v)+iY(v)$; diese letzten Ausdrücke sind aber [Gl. 17)] Brüche, deren Zähler vom Grade 2σ, deren Nenner v^τ bezw. $v^{\sigma-1}$ ist; folglich ist 18), auf ganze Form gebracht, vom Grade $2\tau.2\sigma$ oder $4\sigma\tau$ in v. Jedem Werthepaare x, y entsprechen also $4\sigma\tau$ Werthe von v; mit anderen Worten: es giebt $4\sigma\tau$ Erzeugungscurven des Systems $v=const.$, welche eine beliebige Parallele zur z-Axe schneiden. Es folgt aber aus einer Fussnote zum vorigen Paragraphen, dass jede Erzeugungslinie eine zu einer der Coordinatenebenen parallele Ebene im Allgemeinen nur einmal schneidet, woraus sich ergiebt, dass eine Erzeugungslinie eine zu einer Coordinatenaxe parallele Gerade höchstens einmal (im Allgemeinen) schneiden kann. Die oben betrachtete Parallele wird also, wenn sie willkürlich angenommen worden ist, von der Fläche in $4\sigma\tau$ Punkten geschnitten, welche sich aber zu $2\sigma\tau$ reduciren, da die Fläche eine Doppelfläche ist.

Es bleibt nur noch übrig, zu bestimmen, ob und wievielfach der unendlich entfernte Punkt der Geraden als Schnittpunkt mit der Fläche zu zählen ist. Dazu mag der folgende Weg führen.

Bezeichnet C eine beliebige Constante, und sind θ_1, θ_2, ..., $\theta_{2\tau}$ die Wurzeln der Gleichung:

$$19)\qquad Y(u)=C,$$

so ist für jedes der $4\tau^2$ Werthepaare $u=\theta_\mu$, $v=\theta_\nu$ $(\mu \gtreqless \nu)$:

$$Y(u)=C,\quad Y(v)=C,$$

folglich $y=0$; die entsprechenden Werthe von x, z sind:

$$x=X(\theta_\mu)+X(\theta_\nu),\quad z=Z(\theta_\mu)+Z(\theta_\nu).$$

Die Wurzeln θ_1, θ_2, ..., $\theta_{2\tau}$ sind paarweise reciprok. Nun fragt es sich: Wann wird $x=0$? Offenbar dann (und im Allgemeinen nur dann), wenn θ_μ und θ_ν zu einander reciprok sind, also, da x in θ_μ und θ_ν symmetrisch ist, für τ Werthepaare u, v. Beachtet man, dass auch z in θ_μ, θ_ν symmetrisch ist, so sieht man ein, dass jedem Werthe der Constante C τ Schnittpunkte der Fläche mit der z-Axe entsprechen. Nimmt C unbeschränkt zu, so nehmen τ von den Wurzeln der 19) unbeschränkt zu, die τ übrigen unbeschränkt ab; und dementsprechend streben die oben betrachteten τ Punkte der z-Axe sämmtlich nach dem unendlich entfernten Punkte derselben, welcher daher τ-fach zu zählen ist. Dieser Punkt gehört aber jeder Parallelen zur z-Axe; folglich besitzt jede solche Gerade τ unendlich entfernte Schnittpunkte mit der Fläche.

Die Schnittpunkte einer beliebigen Parallelen zur z-Axe mit der Fläche sind also im Ganzen $2\sigma\tau+\tau$ oder $\tau(2\tau-1)$; und soviel beträgt die Ordnung der Fläche.

Die Classe der Fläche ist, wie es sich durch eine einfache, von Herrn Lie* herrührende Schlussweise ergiebt, um eine Einheit kleiner als der Rang der Minimalcurve, also gleich $2\sigma+1$.

Bezeichnen Ω, K die Ordnung und die Classe der Fläche, so haben wir gefunden:

$$\Omega=\tau(2\tau-1),\quad K=2\sigma+1.$$

Die Fläche ist symmetrisch in Bezug auf die xz- und auf die yz-Ebene Sind nämlich (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) die den Parameterwerthen u_1, v_1 bez. u_2, v_2 entsprechenden Punkte der Fläche, so ist:

$$\text{für } u_2=-\frac{1}{u_1},\quad v_2=-\frac{1}{v_1}:\quad x_2=x_1,\quad y_2=-y_1,\quad z_2=z_1,$$

$$\text{für } u_2=\frac{1}{u_1},\quad v_2=\frac{1}{v_1}:\quad x_2=-x_1,\quad y_2=y_1,\quad z_2=z_1.$$

§ 7. Anwendung der Lie'schen Formeln.

Die bisherigen Anzahlbestimmungen, die wir vorgezogen haben, selbstständig anzuführen, konnten leichter durch Anwendung der Lie'schen Formeln** ermittelt werden. Wir wollen zur Bestätigung der erhaltenen Resultate diesen zweiten Weg einschlagen.

Ist k die Anzahl der Pole der Function $f(u)$ und sind $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Ordnungen dieser Pole, so ist:

$$O=\sum_{i=1}^{k} m_i+2k,\quad R=\sum_{i=1}^{k} m_i+k+2,\quad C=\sum_{i=1}^{k} m_i+2,$$

ferner***:

$$\Omega=\tfrac{1}{2}O(O-1)$$

und [da $f(u)$ rational ist]†:

$$K=R-1.$$

Alles kommt also darauf an, die Zahlen k, m_i zu bestimmen.

Setzt man:

$$u=\frac{aU+b}{cU+d}=\frac{N}{D},$$

so muss man†† statt der Function $F(u)$ die Function $G(U)$ betrachten, welche, von einem constanten Coefficienten abgesehen, durch die Formel:

---

* Lie, Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, Math. Ann. Bd. XIV, XV. — Schilling, a. a. O. S. 12—13; Darboux, a. a. O. S. 366.

** Siehe die soeben angeführten Arbeiten von Lie, Schilling und Darboux.

*** Schilling, S. 24.

† Darboux, S. 370.

†† Darboux, S. 305.

$$G(U)=\frac{1}{D^4}F(u)=\frac{1}{D^4}F\left(\frac{N}{D}\right)$$

gegeben ist. Nun ist aber:

$$p=\frac{D^2-N^2}{2ND},\quad q=\frac{D^2+N^2}{2ND},\quad F(u)=2^\sigma\frac{p^\alpha q^\beta}{u^2}=\frac{(D^2-N^2)^\alpha(D^2+N^2)^\beta}{N^{\sigma+2}D^{\sigma-2}},$$

folglich:

$$G(U)=\frac{(D^2-N^2)^\alpha(D^2+N^2)^\beta}{N^{\sigma+2}D^{\sigma+2}}.$$

Die Function $G(U)$ hat daher zwei $(\sigma+2)$-fache Pole; durch dreifache Integration ergiebt sich die [der Function $f(u)$ entsprechende] Function $g(U)$, welche folglich zwei $(\sigma-1)$-fache Pole besitzt. Es ist also:

$$k=2,\quad m_1=m_2=\sigma-1,$$

und die obigen Formeln geben:

$$O=2\sigma-2+4=2\tau,\quad R=2\sigma-2+2+2=2\tau,\quad C=2\sigma-2+2=2\sigma,$$
$$\Omega=\tfrac{1}{2}2\tau(2\tau-1)=\tau(2\tau-1),\quad K=2\tau-1=2\sigma+1.$$

§ 8. Die umschriebenen Cylinder.

Die Berührungscurve eines der Fläche umschriebenen Cylinders, dessen Erzeugungslinien zur Ebene:

$$Px+Qy+Rz=0$$

senkrecht sind, ist durch die folgende Gleichung bestimmt [s. Gl. 14)]:

$$20)\qquad P(1-uw)+Qi(1+uw)+R(w+u)=0$$

oder, wenn man wieder w durch v ausdrückt:

$$P(v+u)+Qi(v-u)+R(uv-1)=0.$$

Aus 20) ergiebt sich:

$$w=\varphi(u),\quad u=\varphi(w),$$

wenn:

$$\varphi(\theta)=\frac{R\theta+(P+Qi)}{(P-Qi)\theta-R}$$

ist; und die Gleichungen der Berührungslinie nehmen [s. Gl. 13)] die Form:

$$21)\quad x=X(u)+X(\varphi(u)),\quad y=Y(u)+Y(\varphi(u)),\quad z=Z(u)+Z(\varphi(u))$$

an. Setzen wir der Kürze wegen $\varphi(u)=\frac{N}{D}$, so ist:

$$p(w)=p(\varphi(u))=\frac{1-w^2}{2w}=\frac{\psi(u)}{ND},\quad q(w)=q(\varphi(u))=\frac{1+w^2}{2w}=\frac{\chi(u)}{ND},$$

wo $\psi(u)$, $\chi(u)$ quadratische Functionen von u sind; also:

$$x=c\left\{p^{\alpha+2}q^{\beta-1}+\cdots+\frac{\psi^{\alpha+2}\chi^{\beta-1}}{N^\tau D^\tau}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{c}{2^\tau}\left\{\frac{(1-u^2)^{\alpha+2}(1+u^2)^{\beta-1}}{u^\tau}+\cdots+\frac{\psi^{\alpha+2}\chi^{\beta-1}}{N^\tau D^\tau}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{c}{2^\tau}\,\frac{(1-u^2)^{\alpha+2}(1+u^2)^{\beta-1}N^\tau D^\tau+\cdots+u^\tau\psi^{\alpha+2}\chi^{\beta-1}+\cdots}{u^\tau N^\tau D^\tau}.$$

Der Zähler ist offenbar vom Grade 4τ in u, wenn weder N, noch D sich auf eine Constante reducirt. Man findet desgleichen, dass y vom Grade 4τ, z vom Grade 4σ ist. Man müsste daher schliessen, dass die Berührungscurve von der Ordnung 4τ ist. Es ist aber zu beachten, dass die Gleichungen 21) durch Umsetzung der Glieder auf der rechten Seite und Anwendung der Relation $\varphi(\varphi(u)) = u$ die Form:

$$x = X(\varphi(u)) + X[\varphi(\varphi(u))], \quad y = Y(\varphi(u)) + Y[\varphi(\varphi(u))],$$
$$z = Z(\varphi(u)) + Z[\varphi(\varphi(u))]$$

erhalten, woraus folgt, erstens, dass die 4τ u-Werthe $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{4\tau}$, die wegen der ersten Gl. 21) einem vorgegebenen Werthe von x entsprechen, durch die Relation $\theta_\nu = \varphi(\theta_\mu)$ paarweise gebunden sind; zweitens, dass für je zwei solche Werthe y und z je einen und denselben Werth annehmen. Hiernach leuchtet ein, dass die Ordnung der Berührungscurve nicht 4τ, sondern 2τ ist.

Es mögen jetzt die zwei besonderen Fälle untersucht werden, die wir früher bei Seite gelassen haben.

a) Ist $N = const.$, also $R = 0$, so ist $\varphi(u) = \frac{P+Qi}{(P-Qi)u} = -\frac{1}{ku}$ (wo k eine Constante darstellt), folglich: $v = -\frac{1}{\varphi(u)} = ku$ und:

$$x = X(u) + X(ku), \quad y = Y(u) - Y(ku), \quad z = Z(u) + Z(ku),$$

woraus erhellt, dass die Berührungscurve von der τ^{ten} Ordnung ist.

α) Ist insbesondere $Q = 0$, sind nämlich die Erzeugungslinien des Cylinders parallel zur x-Axe, so ist $k = -1$, $v = -u$ und:

$$x = X(u) + X(-u) = 0, \quad y = Y(u) - Y(-u) = 2Y(u),$$
$$z = Z(u) + Z(-u) = 2Z(u).$$

Die Berührungslinie liegt in der yz-Ebene und ist der L_x homothetisch.

β) Ist dagegen $P = 0$ oder sind die Erzeugungslinien des Cylinders parallel zur y-Axe, so ist $k = 1$, $v = u$ und:

$$x = 2X(u), \quad y = 0, \quad z = 2Z(u).$$

Die Curve liegt in der xz-Ebene und ist der L_y homothetisch.

b) Ist $D = const.$, also $P = Qi$, so ist $w = \varphi(u) = -u - \frac{2P}{R} = -u-k$ (wo k eine Constante ist), folglich:

$$x = X(u) + X(-u-k) = X(u) - X(u+k)$$
$$= \frac{c}{2^\tau}\left\{\frac{(1-u^2)^{\alpha+2}(1+u^2)^{\beta-1}}{u^\tau} + \cdots \right.$$
$$\left. - \frac{(1-k^2-2ku-u^2)^{\alpha+2}(1+k^2+2ku+u^2)^{\beta-1}}{(k+u)^\tau} - \cdots\right\}$$
$$= \frac{c}{2^\tau}\,\frac{(-u^{2\tau}+\cdots)(u^\tau+\cdots)-(-u^{2\tau}+\cdots)u^\tau}{u^\tau(k+u)^\tau} = \frac{c}{2^\tau}\,\frac{au^{3\tau-1}+\cdots}{u^\tau(k+u)^\tau},$$

wo a eine im Allgemeinen nicht verschwindende Constante ist. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man y statt x behandelt. Folglich ist die Berührungscurve in diesem Falle von der $\left(\frac{3\tau-1}{2}\right)^{\text{ten}}$ Ordnung.

γ) Ist insbesondere $P=0$, $Q=0$, so ist $w=-u$, $v=\frac{1}{u}$, folglich:

$$x = X(u)+X(-u)=0, \quad y=Y(u)+Y(-u)=0,$$
$$z = Z(u)+Z(-u)=2Z(u).$$

Der berührende Cylinder reducirt sich in diesem Falle auf die z-Axe. Da ferner jedem z-Werthe 2σ u-Werthe entsprechen, die Fläche aber eine Doppelfläche ist, so ist die z-Axe eine σ-fache Linie der Fläche.

§ 9. Die Evolvente der Projection der Minimalcurve auf einer beliebigen Ebene.

Es folgt aus bekannten Sätzen, dass die Projection der Minimalcurve auf einer bestimmten Ebene* die Evolute einer algebraischen Curve ist. Wir wollen beweisen, dass diese Eigenschaft jeder ebenen Projection der Minimalcurve zukommt, und dabei die Gleichung der Evolvente aufstellen.

Ist $a_3x+b_3y+c_3z=0$ die Gleichung der Projectionsebene, und führt man die lineare Substitution aus:

$$\bar{x}=a_1x+b_1y+c_1z, \quad \bar{y}=a_2x+b_2y+c_2z, \quad \bar{z}=a_3x+b_3y+c_3z,$$

wo a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 zu a_3, b_3, c_3 durch bekannte Relationen verbunden sind, so ist der Elementarbogen der Projectionscurve:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{d\bar{x}^2+d\bar{y}^2}=\sqrt{(a_1\,dx+b_1\,dy+c_1\,dz)^2+(a_2\,dx+b_2\,dy+c_2\,dz)^2} \\ &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)\,dx^2+\cdots+2(b_1c_1+b_2c_2)\,dy\,dz+\cdots} \\ &= \sqrt{(1-a_3^2)\,dx^2+\cdots-2b_3c_3\,dy\,dz-\cdots} \\ &= \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2-(a_3\,dx+b_3\,dy+c_3\,dz)^2} \\ &= \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2-d\bar{z}^2}=i\,d\bar{z}, \end{aligned}$$

da $dx^2+dy^2+dz^2$ der Elementarbogen der Minimalcurve, also gleich Null ist. Sind ξ, η die Coordinaten der Punkte der Evolvente, also $\frac{(\xi'^2+\eta'^2)^{3/2}}{\xi'\eta''-\xi''\eta'}$ ihr Krümmungsradius, so muss sein:

$$\text{22)} \qquad \frac{(\xi'^2+\eta'^2)^{3/2}}{\xi'\eta''-\xi''\eta'}=s=i\bar{z}.$$

Da ferner die entsprechenden Elementarbogen der Curve und ihrer Evolvente zu einander senkrecht stehen, so ist:

* Diese Ebene ist senkrecht zu den aus einem Punkte des Kugelkreises gehenden, die Fläche längs einer Minimalcurve berührenden Geraden. Vergl. Darboux, S. 365, 406.

$$\text{23)} \qquad \frac{\eta'}{\xi'} = -\frac{\bar{x}'}{\bar{y}'},$$

woraus folgt, da $\bar{x}'^2+\bar{y}'^2+\bar{z}'^2=0$:

$$\text{24)} \qquad \frac{(\xi'^2+\eta'^2)^{1/2}}{\xi'} = \frac{(\bar{x}'^2+\bar{y}'^2)^{1/2}}{\bar{y}'} = \frac{i\bar{z}'}{\bar{y}'}.$$

Differentiirt man 23), so erhält man:

$$\text{25)} \qquad \frac{\xi'\eta''-\xi''\eta'}{\xi'^2} = \frac{\bar{x}'\bar{y}''-\bar{y}'\bar{x}''}{\bar{y}'^2}.$$

Durch Einsetzung von 24), 25) in 22) ergiebt sich:

$$\text{26)} \qquad \xi' = -\frac{\bar{z}\bar{y}'}{\bar{z}'^3}(\bar{x}'\bar{y}''-\bar{x}''\bar{y}').$$

Aus den Gleichungen:

$$\bar{x}'^2+\bar{y}'^2+\bar{z}'^2=0, \quad \bar{x}'\bar{x}''+\bar{y}'\bar{y}''+\bar{z}'\bar{z}''=0$$

folgt aber:

$$\frac{\bar{x}'}{\bar{y}'\bar{z}''-\bar{y}''\bar{z}'} = \frac{\bar{y}'}{\bar{z}'\bar{x}''-\bar{z}''\bar{x}'} = \frac{\bar{z}'}{\bar{x}'\bar{y}''-\bar{y}''\bar{x}'},$$

wodurch 26) in:

$$\xi' = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'^2}(\bar{x}'\bar{z}''-\bar{z}'\bar{x}'') = \frac{-\bar{z}\bar{z}'\bar{x}''+\bar{x}\bar{z}'\bar{z}''-\bar{z}\bar{z}'\bar{z}''+\bar{x}\bar{x}'\bar{z}''}{\bar{z}'^2}$$

$$= \frac{\bar{z}'(\bar{x}\bar{z}''-\bar{z}\bar{x}'')-\bar{z}''(\bar{x}\bar{z}'-\bar{z}\bar{x}')}{\bar{z}'^2}$$

übergeht. Hieraus ergiebt sich unmittelbar durch Integration:

$$\xi = \frac{\bar{x}\bar{z}'-\bar{z}\bar{x}'}{\bar{z}'}$$

und aus dieser Gleichung durch Vertauschung von ξ, $\bar{x}$ mit η, $\bar{y}$:

$$\eta = \frac{\bar{y}\bar{z}'-\bar{z}\bar{y}'}{\bar{z}'}.$$

Die zwei letzten Gleichungen stellen die Evolvente dar.

Es ist fast überflüssig, zu bemerken, dass die im vorliegenden Paragraphen durchgeführte Untersuchung ganz allgemein ist und sich auf jede Minimalcurve bezieht.

§ 10. Ein besonderer Fall.

Es mögen, als Schluss unserer Betrachtungen, einige Worte einem besonderen Falle gewidmet werden, der den Fall der Henneberg'schen Fläche in sich einschliesst. Wir setzen nämlich voraus, es sei $\beta=\alpha$. Dann ist:

$$X(u) = cp^{\alpha+2}q^{\alpha-1}F\left(1, \frac{1-\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}-\alpha, q^{-2}\right),$$

$$Y(u) = ciq^{\alpha+2}p^{\alpha-1}F\left(1, \frac{1-\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}-\alpha, -p^{-2}\right),$$

$$Z(u) = Z_1(u) + C_1 = c\frac{\tau}{\sigma} p^{\alpha-1} q^{\alpha+1} F\left(1, \frac{1-\alpha}{2}, 1-\alpha, -p^{-2}\right) + C_1,$$

$$Z(u) = Z_2(u) + C_2 = c\frac{\tau}{\sigma} q^{\alpha-1} p^{\alpha-1} F\left(1, \frac{1-\alpha}{2}, 1-\alpha, q^{-2}\right) + C_2.$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lehrt uns, dass X und Y (bezw. Z_1 und Z_2), von Potenzen von i abgesehen, in einander übergehen, wenn man p und q durch $\pm iq$ und $\pm ip$ ersetzt. Nun braucht man nur zur Verwirklichung dieser Substitution u in $\pm iu$ zu verwandeln. Es ist nämlich für $v = \pm iu$:

$$p(v) = \mp iq(u), \quad q(v) = \mp ip(u),$$

folglich, da α ungerade ist:

$$\begin{aligned} X(v) &= (\pm i)^{2\alpha+1} \frac{1}{i} Y(u) = \mp Y(u), \\ Y(v) &= (\pm i)^{2\alpha+1}\ i\, X(u) = \pm X(u), \\ Z_1(v) &= (\pm i)^{2\alpha} \quad Z_2(u) = -Z_2(u), \\ Z_2(v) &= (\pm i)^{2\alpha} \quad Z_1(u) = -Z_1(u). \end{aligned}$$

Die Linien, welche durch die Gleichungen $v = \pm iu$ dargestellt werden, sind die Berührungslinien der Cylinder, deren Erzeugungslinien den Ebenen:

$$Px + Qy + Rz = 0$$

normal sind, wo P und Q durch die Relation [§ 8, *a)*]:

$$27) \qquad \frac{P+Qi}{P-Qi} = -\frac{1}{\pm i}$$

zu einander verbunden sind, und $R = 0$. Aus 27) ergiebt sich $P = \pm Q$, folglich sind die Erzeugungslinien der Cylinder der xy-Ebene parallel und halbiren die Winkel der x- und y-Ebene.

Die Gleichungen der Berührungslinien sind:

$$\begin{aligned} x &= X(u) + X(v) = X(u) \mp Y(u), \\ y &= Y(u) - Y(v) = Y(u) \mp X(u), \\ z &= Z_1(u) + Z_1(v) + 2C_1 = Z_1(u) - Z_1(u) + 2C_1 = 2C_1, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$y = \mp x, \quad z = const.$$

Die Berührungslinien sind also im betrachteten Falle zwei Geraden, welche, wie es sich aus § 8*a)* ergiebt, je τ-fach zu zählen sind.

Wir können schliessen:

Diejenigen Doppelflächen, für welche die in der Function F vorkommenden Exponenten α und β einander gleich sind, enthalten, ausser den 2α-fachen Geraden $x = 0$, $y = 0$, auch die $2\alpha + 1$-fachen Geraden $y = \mp x$, $z = const.$, wo die Constante für die beiden Linien dieselbe ist.

Mantua, 5. Februar 1888.

X.

Ueber Rotationsflächen mit loxodromischer Verwandtschaft.

Von

Prof. Dr. F. August

in Berlin.

Unter einer loxodromischen Linie oder Loxodromie einer Rotationsfläche versteht man bekanntlich eine Linie, welche alle Meridiane unter einem constanten Winkel α schneidet, welcher der Curswinkel genannt werden möge. Projicirt man eine Kugel von einem Pole aus stereographisch, so gehen die sämmtlichen Meridiane in gerade Linien über, welche durch einen Punkt gehen, und eine Loxodromie mit dem Curswinkel α projicirt sich in eine logarithmische Spirale, deren Tangente den Vector ebenfalls unter dem constanten Winkel α schneidet.

Diese sehr einfache Beziehung veranlasste Herrn Molins (Toul. Mém., t. VII$_2$ p. 293—322, 1885) zu der Untersuchung, ob es noch andere Rotationsflächen giebt, deren Loxodromien sich von einem Punkte der Axe aus auf eine zur Axe lothrechte Ebene perspectivisch als logarithmische Spiralen projiciren.

Aber auch diese Frage ist einer grossen Verallgemeinerung fähig. Da nämlich jede zur Axe lothrechte Ebene selbst eine Rotationsfläche für diese Axe ist, und die Loxodromien derselben die logarithmischen Spiralen sind, welche sich um den Schnittpunkt der Ebene mit der Axe winden, so hat man in den besprochenen Fällen eine perspectivische Abbildung gewisser Rotationsflächen aufeinander mit sich entsprechenden Loxodromien. Es liegt deshalb nahe, eine solche allgemein zu untersuchen. Durch diese Untersuchung wurde ich veranlasst, noch allgemeiner das Entsprechen der Loxodromien überhaupt in Betracht zu ziehen und endlich in noch grösserer Verallgemeinerung das Entsprechen herzuleiten aus einer gewissen Abbildungsart zweier beliebigen Flächen (nicht Rotationsflächen) aufeinander, welche mit der bekannten conformen Abbildung in engem Zusammenhange steht. Denkt man sich nämlich auf jeder der zwei Flächen eine Schaar von Isothermen, welche bekanntlich mit ihren (ebenfalls isothermen) Orthogonalen die Parameterlinien eines sogenannten Abbildungsparametersystems bilden, so kann man die beiden Flächen so aufeinander abbilden, dass die Trajectorien der Isothermenschaaren beider Flächen einander paarweise entsprechen. Diese Art der Abbildung will ich eine zu den gegebenen Isothermenschaaren gehörige Trajectorienabbildung nennen. Wählt man auf zwei Rotationsflächen als Isothermenschaaren die Meridiancurven und die Parallelkreise, so sind die Trajectorien die Loxodromien, und wir erhalten die vorher bezeichnete Abbildungsart, welche ich als loxodromische Abbildung bezeichne. Beide Abbildungsarten sollen einfache genannt werden, wenn die Parameterlinien selbst einander entsprechen, und zwar speciell bei Rotationsflächen die Meridiane den Meridianen, die Parallelkreise den Parallelkreisen (nicht umgekehrt). Die Untersuchung dieser Abbildungsarten, namentlich der letztgenannten, führt zu einer Reihe von interessanten Problemen, wie ich im Folgenden andeuten werde.

I. Zunächst wollen wir den analytischen Ausdruck für die besprochenen Abbildungsarten aufstellen. Die rechtwinkligen Coordinaten XYZ, $X_1Y_1Z_1$ zweier Punkte seien als Functionen zweier Parameter u, v, resp. u_1, v_1 gegeben, und zwar so, dass die Quadrate der Linienelemente der beiden definirten Flächen (F) und (F_1), dS und dS_1 die Bedingungen erfüllen

$$dS^2 = t(du^2 + dv^2), \quad dS_1^2 = t_1(du_1^2 + dv_1^2),$$

also uv und u_1v_1 Abbildungsparameter der Flächen (F) und (F_1) sind. Dann ist irgend eine Trajectorie der (isothermen) Parameterlinien $u = const.$ und $v = const.$ bestimmt durch die lineare Gleichung $au + bv = c$, wo a, b und c beliebige Constante bedeuten. Denn wenn man u, v als rechtwinklige Coordinaten einer Ebene (E) ansieht, so ist die Fläche F durch die Parameter u, v conform auf die Ebene (E) abgebildet, und jene Linie bildet sich hierbei als Gerade, d. h. als Trajectorie der Parallelen zu den Coordinatenaxen ab. Sollen also die Flächen (F_1) und (F) so aufeinander abgebildet werden, dass diese Trajectorien einander entsprechen, so muss jeder linearen Gleichung zwischen uv eine lineare Gleichung zwischen u_1v_1 entsprechen. Hierfür aber ist nothwendige und hinreichende Bedingung, dass

$$u_1 = \frac{a_1u + a_2v + a_3}{c_1u + c_2v + c_3} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{b_1u + b_2v + b_3}{c_1u + c_2v + c_3}.$$

Die Abbildung kommt also hinaus auf die collineare Abbildung der Ebenen aufeinander, und wir können den allgemeinsten Fall als collineare isothermische Trajectorienabbildung bezeichnen. Die bekannten Gesetze der Collineation können dann leicht auf die Flächen (F) und (F_1) übertragen werden, worauf wir nicht ausführlich einzugehen brauchen. Diese collineare Abbildung schliesst nun gewisse speciellere Fälle in sich, von denen einige besonders wichtig sind.

Verlangt man nämlich, dass allen Trajectorien auf (F), welche die Parameterlinien unter demselben Winkel α schneiden, auf (F_1) ebenfalls lauter Trajectorien mit dem Curswinkel α_1 entsprechen, so müssen u_1 und

v_1 lineare Functionen von u, v sein, und wir nennen in diesem Falle die Abbildung eine affine. Dann ist also

$$u_1 = a_1 u + a_2 v + a_3, \quad v_1 = b_1 u + b_2 v + b_3.$$

Auch hierbei sind wieder specielle Fälle hervorzuheben. Erstens: Die Abbildung wird conform, wenn gleichzeitig $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ und $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$ ist. Doch ist dies keineswegs die allgemeinste conforme Abbildung der Flächen (F_1) und (F) aufeinander. Zweitens: Die Abbildung wird einfach in dem oben definirten Sinne, wenn $a_2 = b_1 = 0$ (oder auch, was nur der Form nach davon verschieden ist, $a_1 = b_2 = 0$), und dieser Fall ist es, der uns vorzugsweise beschäftigen soll. Die Abbildung ist dann dargestellt durch die Gleichungen

$$u_1 = a_1 u + a_3, \quad v_1 = b_2 v + b_3.$$

Alsdann ist $\frac{dv_1}{du_1} = \frac{b_2}{a_1}\frac{dv}{du}$. Die Constante $b_2 : a_1 = k$ hat dann eine einfache geometrische Bedeutung. Der Trajectorie auf (F_1) mit der Gleichung

$$v_1 = u_1 \, ctg\, \alpha_1 + m_1$$

entspricht nämlich auf (F) die Trajectorie

$$v = u \, ctg\, \alpha + m,$$

und es ist

$$\underline{ctg\, \alpha_1 = k \, ctg\, \alpha.}$$

Hier sind α_1 und α die Curswinkel, gemessen gegen die Parameterlinien $u = const.$ Es stehen also die Cotangenten der Curswinkel entsprechender Trajectorien in einem constanten Verhältniss, und diese Eigenschaft ist charakteristisch für die einfachen isothermischen Trajectorienabbildungen. Wir wollen k den Modul der betreffenden Abbildungen nennen. Ist $k = \pm 1$, so ist die Abbildung wieder eine conforme.

Um zu den entsprechenden loxodromischen Abbildungen der Rotationsflächen überzugehen, stellen wir die Coordinaten derselben in folgender Form dar:

$$X = x, \quad Y = y \cos u, \quad Z = y \sin u.$$

x und y, die rechtwinkligen Coordinaten der Meridiancurve, seien Functionen von V; dann ist das Quadrat des Linienelements

$$dS^2 = ds^2 + y^2 du^2 = y^2 \left(\left(\frac{ds}{y} \right)^2 + du^2 \right),$$

wo ds das Bogenelement der Meridiancurve bedeutet. Setzt man nun $\int \frac{ds}{y} = v$, wodurch V, also auch y als Function von v definirt ist, so sind u und v Abbildungsparameter, und wir können die oben entwickelten Formeln anwenden. Die Gleichung einer Loxodromie mit dem Curs α ist dann

$$\int \frac{ds}{y} = u \, ctg\, \alpha + m.$$

Bei der einfachen loxodromischen Abbildung können wir bei passender Wahl der Anfangsmeridianebenen immer $a_3 = 0$ setzen. Ausserdem genügt es, den Fall zu betrachten, wo $a_1 = 1$ ist, so dass $b_2 = k$ ist; denn durch eine Dehnung der Parallelkreisbogen nach constantem Verhältniss können wir eine der beiden Flächen loxodromisch auf sich selbst abbilden und so die allgemeinere, einfach loxodromische Abbildung herstellen. Wir setzen deshalb für die Folge $u_1 = u$; dann können wir die entsprechenden Meridiane als in derselben Ebene liegend annehmen, und wir haben es nur mit einem Problem der Ebene zu thun. Die Bedingung der loxodromischen Verwandtschaft ist alsdann

$$\text{I)} \qquad v_1 = kv, \text{ d. h. } \int \frac{ds_1}{y_1} = k \int \frac{ds}{y}.$$

Man kann das Vorzeichen des Moduls k im Allgemeinen positiv nehmen, weil man das Vorzeichen von ds dementsprechend wählen kann. Ist aber dieses Vorzeichen durch andere Rücksichten bestimmt, so muss man für k auch negative Werthe zulassen. Man vergleiche hierüber den Abschnitt V. Schreibt man die Gleichung I) in Form einer Differentialgleichung

$$\frac{ds_1}{y_1} = k \frac{ds}{y},$$

so lässt sie eine einfache elementenweise Construction der Abbildung erkennen. Die Aufgabe der loxodromischen Abbildung der Rotationsflächen aufeinander ist hierdurch vollständig gelöst.

Die besprochene Abbildungsart giebt nun Veranlassung zu einer Reihe anderer Probleme. Wir wollen solche Probleme besprechen, uns aber auf die einfache loxodromische Abbildung der Rotationsflächen beschränken.

Man kann zunächst verlangen, dass zwei Flächen, welche aufeinander einfach loxodromisch abgebildet sind, ausserdem noch irgend eine andere Bedingung erfüllen, so dass nur eine der beiden Flächen gegeben sein kann, während die andere bestimmt wird, dass also eine gewisse Flächenverwandtschaft definirt ist.

II. Wir nehmen zunächst als zweite Bedingung die, dass die Flächen zugleich perspectivisch aufeinander abgebildet sind, und nennen die so definirte Verwandtschaft die perspectivisch-loxodromische. Hierbei muss das Projectionscentrum auf der gemeinschaftlichen Axe liegen, und es müssen entsprechende Meridianebenen zusammenfallen. Wählt man das Projectionscentrum als Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems, und sind r_1, φ_1 und r, φ die Polarcoordinaten entsprechender Punkte der Meridiancurve, so sind die beiden Bedingungen zu erfüllen

$$\text{I)} \qquad \frac{ds_1}{r_1 \sin\varphi_1} = k \frac{ds}{r \sin\varphi}$$

und

$$\text{II)} \qquad \varphi_1 = \varphi.$$

Hieraus folgt die Differentialgleichung

$$\frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{d\varphi}=k\cdot\frac{1}{r}\frac{ds}{d\varphi},$$

oder wenn man, wie gewöhnlich, mit ψ den Winkel bezeichnet, welchen der Vector mit der Tangente bildet,

$$k\sin\psi_1=\sin\psi.$$

Diese Gleichung drückt eine einfache Eigenschaft der gesuchten Curve aus. Zur analytischen Behandlung bringt man die Gleichung III) in die Form

$$\sqrt{1+\left(\frac{r'_1}{r_1}\right)^2}=k\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2};$$

also ist

$$\text{III)}\qquad \frac{r'_1}{r_1}=\pm\sqrt{(k^2-1)+k^2\left(\frac{r'}{r}\right)^2},$$

woraus folgt

$$r_1=ce^{\pm\int\sqrt{(k^2-1)+k^2\left(\frac{r'}{r}\right)^2}\,d\varphi}.$$

Hierdurch ist, wenn r als Function von φ gegeben ist, r_1 bestimmt.

Rückt der Pol ins Unendliche, so findet man durch eine einfache Grenzbetrachtung statt dessen die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$\text{III}')\qquad \frac{d\xi_1}{d\eta}=\pm\sqrt{(k^2-1)+k^2\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2}\ \text{ oder }\ \xi_1=\pm\int\sqrt{(k^2-1)+k^2\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2}\,d\eta+c.$$

In diesem letzteren Falle findet zwischen entsprechenden Bogen beider Curven die einfache Relation statt, dass $s_1=ks$ ist.

Den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel entsprechen im allgemeinen Falle Curven, welche durch reciproke Radien einander entsprechen. Liegt dagegen der Pol im Unendlichen, so werden dieselben symmetrisch. Den verschiedenen Werthen von c entsprechen ähnliche und ähnlich liegende (für unendlich entfernten Pol congruente) Curven. Man erkennt leicht eine grosse Menge einfacher Beziehungen zwischen beiden Curven, von denen wir die folgende hervorheben, die wir aber nur für endlichen Pol aussprechen, den Uebergang zum Grenzfall dem Leser überlassend. Die Gleichung III) ist unabhängig von der Richtung der Axe, sofern dieselbe nur durch O geht. **Stehen also zwei ebene Curven in dem durch III) bestimmten Zusammenhange, so erhält man dadurch, dass man beide gemeinsam um eine beliebige durch O gelegte Gerade der Ebene rotiren lässt, stets zwei nach dem Modul k perspectivisch-loxodromisch verwandte Rotationsflächen.** Wichtig ist ferner die Bemerkung, dass, wenn r für irgend einen Werth von φ unendlich klein von der Ordnung n ist, r_1 von der Ordnung $\pm kn$ unendlich klein ist. Hierdurch kann das Verhalten der gesuchten Curve im Unendlichen und in der Nähe des Projectionscentrums beurtheilt werden. Durch Anwendung auf bestimmte Beispiele kommt man zu mancherlei interessanten Resultaten. Ist der gegebene

Meridian ein Kreis, dessen Radius wir zur Einheit wählen, und dessen Mittelpunkt von O den Abstand α hat, so ist

$$r = \alpha \cos\varphi + \sqrt{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2},$$

und es ergiebt sich

$$\ln r_1 = \int \sqrt{\frac{k^2 - 1 + \alpha^2 \sin\varphi^2}{1 - \alpha^2 \sin\varphi^2}}\, d\varphi,$$

ein elliptisches Integral zweiter Ordnung. Ist $\alpha = 0$, so reducirt sich die Curve P_1 auf eine logarithmische Spirale, die aber nur reell ist, wenn $k^2 > 1$. Ueberhaupt sind die Gestalten der Curven wesentlich verschieden, je nachdem $k^2 > 1$ oder < 1 ist. Für $\alpha = 1$ vereinfacht sich die Lösung folgendermassen. Setzt man

$$tg\,\varphi^2 = \frac{t^2 - 1}{t^2 - k^2}, \text{ so ist } r_1^2 = \left(\frac{t+k}{t-k}\right)^k \cdot \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^k.$$

Auch hier ergeben sich zwei wesentlich verschiedene Gestalten, je nachdem $k > 1$ oder $k < 1$ ist. Da der gegebene Kreis durch den Anfangspunkt geht, so ist seine reciproke Curve eine Gerade, und da wir diese ebenso gut als gegebene Meridiancurve nehmen können, ohne dass die Resultate sich ändern, so erhalten wir hier die Lösung des Molins'schen Problems, jedoch in etwas einfacherer Form. Zu bemerken ist, dass Herr Molins bei der Discussion der Meridiancurve sich nur auf den Fall $k > 1$ beschränkt hat, wo die Curve einen Doppelpunkt auf der Axe erhält und parabolisch mit der Richtung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ins Unendliche geht. Ist $k < 1$, so bekommt sie eine Spitze, die nicht auf der Axe liegt, und hat die Tangente des gegebenen Kreises in O zur Asymptote. Ferner aber können wir nach der obigen Bemerkung zur Rotationsaxe jede durch O gelegte Gerade wählen, so dass wir zugleich alle Rotationsflächen gefunden haben, welche den geraden Kegelflächen loxodromisch und perspectivisch verwandt sind.

Der Grenzfall $\alpha = \infty$ führt auch auf elliptische Integrale zweiter Gattung. Auf niedere Transcendente wird man u. A. geführt, wenn man als gegebene Meridiancurve wählt Curven mit den Gleichungen $r = a(\sin\alpha\varphi)^n$. Ebenso wenn der gegebene Meridian eine Parabel im weiteren Sinne des Wortes ist, mit der Gleichung $\left(\frac{y}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)^n$ mit rechtwinkligen, oder $\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^n}$ in Polarcoordinaten. Die letzteren Curven führen auch zu bemerkenswerthen Resultaten, wenn man das Projectionscentrum in unendlicher Entfernung wählt. Für gewisse Werthe von n reduciren sich alsdann die Integrale auf elliptische oder auf niedere Transcendenten. Besonders interessant sind hierbei die Fälle $n = \frac{2}{3}$ und $n = \frac{3}{2}$, d. h. wenn die gegebene Meridiancurve eine semicubische Parabel ist, welche im ersteren Falle die y-Axe, im zweiten die x-Axe zur Rückkehrtangente hat.

Ist $n = \frac{2}{3}$, also $x = \frac{y^{3/2}}{a^{1/2}}$, so findet man als zweite Meridiancurve

$$x_1 = \left(\frac{k^2}{a}\right)\left(y - \frac{4a(1-k^2)}{9k^2}\right)^{3/2},$$

also wieder eine semicubische Parabel, deren Rückkehrtangente der y-Axe parallel ist.

Ist aber $n = \frac{3}{2}$, also $x = a^{1/3} y^{2/3}$, so findet man als zweite Meridiancurve nach einigen Rechnungen

$$(1-k^2)^{2/3} x_1^{2/3} + (1-k^2) y^{2/3} = \tfrac{4}{9} k^2 a^{2/3},$$

also wieder die Evolute eines Kegelschnittes. Eine genauere Discussion führt mit Rücksicht darauf, dass jede der Meridiancurven parallel der Axe beliebig verschoben werden darf, zu folgendem Resultat:

Rotirt das System der Evoluten einer Schaar von Kegelschnitten mit gemeinsamem Brennpunkt und zugehöriger Directrix um eine zur Directrix senkrechte, sonst aber beliebige Gerade der Ebene, so entsteht ein System von Rotationsflächen, welche loxodromisch-perspectivisch verwandt sind in Bezug auf den unendlich entfernten Punkt der Rotationsaxe als Pol. Für irgend zwei Evoluten selber gilt der Satz, dass die Bogen, welche von zwei beliebigen Parallelen zur x-Axe abgeschnitten werden, zueinander in constantem Verhältniss der Moduln stehen.

III. Man kann nun aber statt der Bedingung der perspectivischen Lage auch mancherlei andere Bedingungen aufstellen. Verlangt man z. B., dass die entsprechenden Flächen durch Gerade, welche senkrecht auf die Axe gefällt sind, aufeinander projicirt sind, so wird $x_1 = x$ und man findet die Differentialgleichung

$$\frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{y_1} = \frac{k\sqrt{1+y'^2}}{y}.$$

Die Integration gelingt in gewissen Fällen, namentlich wenn der gegebene Meridian eine Gerade ist, $y = x \operatorname{tg}\gamma$; dann wird $\frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{y_1} = \frac{k}{x \sin\gamma}$. Man findet ein singuläres Integral $y_1 = x \operatorname{tg}\gamma_1$, wo $\sin\gamma_1 = \frac{\sin\gamma}{k} = \frac{1}{\lambda}$ ist, also als zweiten Meridian wieder eine Gerade, die aber nicht immer reell ist. Das allgemeine Integral lässt sich nach bekannten Methoden finden, da die Differentialgleichung homogen ist. Setzt man $y_1 = x \operatorname{tg}\varphi$ und dann $\lambda \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\cos u}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = t$, so findet man schliesslich

$$x^2 = a^2 \frac{(1+t)^{\frac{2}{\lambda+1}}}{(1-t)^{\frac{2}{\lambda-1}}} (-1 + 2\lambda t - t^2)^{\frac{2}{\lambda^2-1}},$$

$$y_1^2 = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{(1+t)^{\frac{2}{\lambda+1}}}{(1-t)^{\frac{2}{\lambda-1}}}\,(-1+2\lambda t - t^2)^{\frac{2}{\lambda^2-1}}.$$

Für $\lambda = 1$ findet ein singulärer Fall statt.

Alle demselben Werthe von k entsprechenden particulären Integrale stellen Meridiane von Flächen dar, welche aufeinander durch die auf die Axe gefällten Senkrechten conform abgebildet sind.

Der einfachste Fall tritt ein, wenn gegeben ist $y = h$ (constant), also wenn (P) ein Cylinder ist. Man findet dann als singuläres Integral $y_1 = h_1 = \frac{h}{k}$, und als allgemeines $y_1 = \frac{h_1}{2}\left(e^{\frac{x-c}{h_1}} + e^{-\frac{x-c}{h_1}}\right)$. Die Fläche (P_1) ist also entweder die Rotationsfläche einer Kettenlinie mit der Höhe h_1, ein Katenoid, oder ein Cylinder mit dem Radius h_1, der von allen jenen Katenoiden eingehüllt wird. Hieraus folgt weiter: Irgend zwei Katenoide mit gemeinsamer Axe werden durch Strahlen, welche die Axe senkrecht durchschneiden, loxodromisch nach dem Parameter $\frac{h}{h_1}$ aufeinander abgebildet. Sind die Höhen einander gleich, also die Katenoide durch Verschiebung längs der Axe auseinander hervorgegangen, so ist die Abbildung eine conforme. Jedes in Betracht kommende Katenoid kann auch durch den Cylinder ersetzt werden, welcher dasselbe längs des Kehlkreises berührt.

IV. Ein drittes Problem erhält man, wenn man die Bedingung stellt, dass die entsprechenden Meridiane in dieselbe Ebene fallen, und dass die Richtungen der entsprechenden Meridianelemente einen constanten Winkel bilden.

Sind τ_1 und τ die Richtungswinkel, so hat man die Gleichungen

$$\frac{ds_1}{y_1} = k\frac{ds}{y} \quad \text{und} \quad \tau_1 = \tau + \gamma.$$

Hieraus ergiebt sich leicht die Differentialgleichung

$$\frac{dy_1}{y_1} = k\frac{dy}{y}(\cos\gamma + \sin\gamma . ctg\,\tau), \quad dx_1 = dy_1\, ctg(\tau+\gamma).$$

Ist der erste Meridian bekannt, so ist y bekannte Function von τ, und das Problem ist auf Quadraturen zurückgeführt.

Ein interessantes Beispiel für dieses Problem ergiebt sich, wenn man ausgeht von einem Kreise $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$; $\tau = \frac{\pi}{2} + \varphi$, $\tau_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi + \gamma$. Es ergiebt sich dann

$$\frac{dy_1}{y_1} = k\, ctg\,\varphi\,[\cos\gamma - \sin\gamma\; tg\,\varphi]\, d\varphi,$$

also

$$y_1 = a_1 \sin\varphi^{k\cos\gamma} e^{-k\sin\gamma\varphi}$$

und

$$x_1 = -a_1 k \int \sin\varphi^{k\cos\gamma} e^{-k\sin\gamma\varphi} (\cos\gamma + \sin\gamma \, tg\,\varphi) \, d\varphi.$$

Für $\gamma = 0$ erhält man

$$y_1 = a_1 \sin\varphi^k, \quad x_1 = -a_1 k \int \sin\varphi^k \, d\varphi.$$

Das letztere Integral lässt sich in vielen Fällen durch niedere Transcendente ausdrücken. Für $k = 2$ erhalten wir, wenn wir die willkürliche Constante a_1 durch $2b$ bezeichnen:

$$y_1 = b(1 - \cos 2\varphi), \quad x_1 = -b(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

Bildet man also einen Kreis (P) und eine einfache Cykloide (P_1), welche eine Centrale dieses Kreises zur Bahn des rollenden Kreises hat, so aufeinander ab, dass die Tangenten in entsprechenden Punkten parallel sind, und lässt man beide Curven um jene Centrale als Axe rotiren, so sind die Kugel und die Cykloidenrotationsfläche durch die Punkte P und P_1 loxodromisch nach dem Modul 2 aufeinander abgebildet.

Für $k = 3$ findet man $y_1 = b(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$, $x_1 = -b(9\cos\varphi - \cos 3\varphi)$, eine geschlossene algebraische Curve sehr einfacher Natur (aber keine Epicykloide). Auch wenn man $\gamma = \frac{\pi}{2}$ setzt, vereinfachen sich die allgemeinen Formeln bedeutend. Auch für die Parabeln $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{a}\right)^n$ ergeben sich einfache Integrale. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall $\gamma = 0$. Man findet, wenn man setzt $\frac{n}{n-1} = m$,

$$y_1 = a_1 \, tg\,\tau^{mk}, \quad x_1 = \frac{a_1 mk}{mk+1} tg\,\tau^{mk+1},$$

mithin

$$\frac{y_1}{a_1} = \left(\frac{mk+1}{mk} \frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{mk}{mk+1}}.$$

Ein singulärer Fall tritt ein, wenn $mk + 1 = 0$; dann ist

$$y_1 = a_1 \, ctg\,\tau, \quad x_1 = a_1 \ln ctg\,\tau, \quad \text{also} \quad \frac{y_1}{a_1} = e^{\frac{x_1}{a}}.$$

Es entspricht also einer Parabel im weiteren Sinne im Allgemeinen wieder eine solche Curve, in einem singulären Falle eine Logistik.

Wir wollen nun noch solche Probleme betrachten, bei welchen zu der Bedingung der einfachen loxodromischen Verwandtschaft Bedingungen hinzutreten, durch welche, wenn sie allein beständen, schon eine der beiden Flächen bestimmt ist, sobald die andere gegeben ist. Besteht aber auch die erstgenannte Bedingung, so darf keine von beiden Flächen mehr gegeben sein; sie werden vielmehr beide bestimmt. Wir beschränken uns hier auf zwei Fälle.

V. Zunächst stellen wir das Problem der Aufsuchung einfach loxodromisch verwandter paralleler Rotationsflächen.

Hierbei versteht es sich von selbst, dass entsprechende Punkte in dieselbe Meridianebene fallen.

Die Bedingung der einfachen loxodromischen Verwandtschaft ist

$$\text{I)}\qquad \frac{ds_1}{y_1} = k\frac{ds}{y}.$$

Damit die entsprechenden Punkte gemeinsame Normalen haben, muss sein

$$\text{II)}\qquad x_1 - x = -c\sin\tau,\quad y_1 - y = +c\cos\tau,$$

wo c den Abstand der parallelen Curven bedeutet, τ den gemeinschaftlichen Richtungswinkel der Tangenten. Da nun $ds_1 = dy_1 : \sin\tau$, $ds = dy : \sin\tau$, so ist

$$\text{III)}\qquad \frac{dy_1}{y_1} = k\frac{dy}{y},\ \text{also}\ y_1 = \alpha y^k.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf II)

$$\text{IV)}\qquad \cos\tau = (\alpha y^k - y) : c,$$

also

$$\text{V)}\qquad ctg\,\tau = \frac{dx}{dy} = \frac{\alpha y^k - y}{\sqrt{c^2 - (\alpha y^k - y)^2}}.$$

Diese Differentialgleichung hat erstens das singuläre Integral

$$\text{VI)}\qquad c^2 - (\alpha y^k - y)^2 = 0.$$

Dies ergiebt einen constanten Werth für y, also eine Cylinderfläche. Das allgemeine Integral ist

$$\text{VII)}\qquad x = \int \frac{(\alpha y^k - y)\,dy}{\sqrt{c^2 - (\alpha y^k - y)^2}}.$$

Hierdurch ist die eine Meridiancurve bestimmt. c kann immer positiv genommen werden, wenn man das Vorzeichen des Krümmungsradius ϱ passend bestimmt. Weiter ist nach II)

$$\text{VIII)}\qquad x_1 = x - c\sin\tau = -\sqrt{c^2 - (\alpha y^k - y)^2} + \int \frac{(\alpha y^k - y)\,dy}{\sqrt{c^2 - (\alpha y^k - y)^2}}.$$

Es sind also auch die Coordinaten des Punktes P_1 als Functionen von y bestimmt. Hiermit ist das Problem vollständig auf Quadraturen zurückgeführt. Uebrigens ergiebt sich auch direct, entsprechend der wechselseitigen Beziehung beider Curven,

$$\text{IX)}\qquad x_1 = \int \frac{y_1 - \left(\frac{y_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}}{\sqrt{c^2 - \left(y_1 - \left(\frac{y_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^2}}\,dy_1.$$

Die Gleichungen II) und III) gestatten eine ausserordentlich einfache Construction des Punktes P_1, wenn P gegeben ist, und damit auch der gemeinsamen Normale PP_1, so dass man leicht zum Nachbarpunkte übergehen, also elementweise die Curven construiren kann. — Differenzirt man ferner die Gleichung IV) nach y und beachtet, dass $dy = ds \cdot sin\tau$ ist, so findet man leicht für die Krümmungsradien der Curven (P) und (P_1)

$$\text{X)} \qquad \varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{cy}{y - ky_1}, \quad \varrho_1 = \varrho - c = \frac{cky_1}{y - ky_1},$$

woraus sich noch die einfache Relation ergiebt $\varrho_1 : \varrho = ky_1 : y$.

Es lässt sich also auch der gemeinschaftliche Krümmungsmittelpunkt M beider Curven leicht construiren. Bei diesem Problem tritt der in I) bereits angedeutete Fall ein, dass die Vorzeichen von ds und ds_1 bereits durch die Wahl der Parameter bedingt sind; man muss deshalb hier positive und negative Werthe des Moduls k unterscheiden, und es zeigt sich das für die Gestaltsverhältnisse wichtige Gesetz: Wenn $ky_1 : y$ positiv ist, sind beide Curven nach derselben Seite concav; wenn dagegen $ky_1 : y$ negativ ist, kehren sie sich gegenseitig ihre concave Seite zu.

Für gewisse Werthe von k führen die Integrale VIII) und IX) auf elliptische Functionen oder auf niedere Transcendente.

Ist zunächst $k = +1$, so kommt man auf concentrische Kugeln, oder für $\alpha = 1$ auf Ebenen senkrecht zur Axe, und dieselben sind aufeinander conform abgebildet.

In allen Fällen, wo k von $+1$ verschieden ist, können wir zunächst $\alpha = \pm \frac{1}{a^{k-1}}$ setzen, und indem wir a zur Längeneinheit wählen, erhalten wir als Integrationsconstante $\alpha = \pm 1$, so dass wir haben

$$y_1 = \pm y^k, \quad x = \int \frac{\pm y^k - y}{\sqrt{c^2 - (\pm y^k - y)^2}} dy, \text{ etc.}$$

Besonders hervorzuheben ist der Fall $k = -1$, weil dann die Abbildung auch conform ist. Alsdann ist bei passender Wahl des Vorzeichens der Quadratwurzel

$$x = \int \frac{1 \mp y^2}{\sqrt{c^2 y^2 - (1 \mp y^2)^2}} dy.$$

Setzt man noch $c = \gamma \mp \frac{1}{\gamma}$, wobei man für γ nur positive reelle Werthe $\gtreqless 1$ zu berücksichtigen braucht, so wird

$$x = \int \frac{(1 \mp y^2)}{\sqrt{(\gamma^2 - y^2)\left(y^2 - \frac{1}{\gamma^2}\right)}} dy.$$

Setzt man ferner $q^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^4}$ und $y = \frac{1}{\gamma\sqrt{1 - q^2 \sin\varphi^2}} = \frac{1}{\gamma \Delta\varphi}$, so kommt

$$x = \frac{1}{\gamma} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \mp \frac{1}{\gamma^3} \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi^3}.$$

Dies lässt sich in bekannter Weise durch elliptische Functionen ausdrücken.

Auch für $k=2$ und $k=3$ kommt man auf elliptische Integrale, welche sich in folgenden Fällen auf niedere Transcendente reduciren, nämlich für $k=2$, $\alpha=+1$ und $c=\frac{1}{2}$ und für $k=3$, $\alpha=+1$ und $c=\sqrt{\frac{4}{27}}$.

Uebrigens lassen sich die Gestalten der Meridiancurven mit Rücksicht auf die entwickelten Relationen auch ohne Berechnung der Integrale sehr wohl übersehen, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden kann.

VI. Als letztes Problem besprechen wir die Aufsuchung einer Rotationsfläche, welche mit ihrer Evolutenfläche einfach loxodromisch verwandt ist. Auch hierbei fallen entsprechende Meridianebenen zusammen.

Sei (P) die erste Meridiancurve, (P_1) ihre Evolute, ϱ und τ der Krümmungsradius und der Richtungswinkel von (P).

Dann haben wir die Bedingungen

$$\text{I)} \qquad \frac{ds_1}{y_1}=\frac{k\,ds}{y},$$

$$\text{II)} \qquad \begin{cases} ds=\varrho\,d\tau, & dx=\varrho\cos\tau\,d\tau, \quad dy=\varrho\sin\tau\,d\tau, \\ ds_1=\varrho'd\tau, & x_1=x-\varrho\sin\tau, \quad y_1=y-\varrho\cos\tau. \end{cases}$$

Die Differentiationen nach τ sind hier, wie in der Folge, durch Accente bezeichnet. Aus obigen Gleichungen folgt

$$\text{III)} \qquad \frac{\varrho'}{y_1}=k\frac{\varrho}{y},$$

woraus sich leicht ergiebt, wenn man $u=\frac{1}{k}\,\frac{\varrho'}{\varrho}-1$ setzt:

$$\text{IV)} \qquad y=\frac{\varrho\cos\tau}{u},$$

also, da $y'=\varrho\sin\tau$ ist,

$$\frac{y'}{y}=u\,tg\,\tau.$$

Dagegen ergiebt sich durch logarithmisches Differenziren von IV)

$$\frac{y'}{y}=\frac{\varrho'}{\varrho}-tg\,\tau-\frac{u'}{u}=k(u+1)-tg\,\tau-\frac{u'}{u}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{u'}{u(u+1)}=k-tg\,\tau,$$

also

$$\int\frac{du}{u(u+1)}=k\tau+ln\cos\tau+ln\gamma,$$

wo $ln\gamma$ die Integrationsconstante bedeutet.

Nach Ausführung der Integration ergiebt sich

$$u=\frac{\gamma e^{k\tau}\cos\tau}{1-\gamma e^{k\tau}\cos\tau}, \text{ also } \frac{\varrho'}{\varrho}=\frac{k}{1-\gamma e^{k\tau}\cos\tau}.$$

Hieraus kann ϱ und dann y gefunden werden. Zur Bestimmung der Constanten setzen wir fest, dass für $\tau=\alpha$, $\varrho=b$, $y=a$, $y_1=a+b\cos\gamma=\beta a$ sei. Dann ist

$$ln\frac{\varrho}{b}=k\int_\alpha^\tau\frac{d\tau}{1-\beta e^{k(\tau-\alpha)}\cos\tau},$$

$$y=\frac{\varrho(1-\beta e^{k(\tau-\alpha)}\cos\tau)}{\beta e^{k(\tau-\alpha)}}=\int_\alpha^\tau\varrho\sin\tau\,d\tau+a,$$

$$x=\int_\alpha^\tau\varrho\cos\tau\,d\tau.$$

Hierdurch ist die Curve (P), also auch die Curve (P_1) vollständig bestimmt. Es ist zu bemerken, dass die Gleichung $\varrho'=k\varrho\frac{y_1}{y}$ folgende geometrische Betrachtung vermittelt. Sind irgend zwei entsprechende Punkte P und P_1 gegeben, so ist $PP_1=\varrho$. Dann lässt sich ϱ', der Krümmungsradius der Evolute, aus obiger Gleichung construiren und ferner die entsprechenden Bogenelemente $ds=\varrho\,d\tau$, $ds_1=\varrho_1\,d\tau$ für gegebenes $d\tau$. Man wird so zu zwei entsprechenden Nachbarpunkten geführt, kann also beide Curven elementweise construiren.

Eine eingehende analytische Discussion der Curve, die zu ganz interessanten Betrachtungen und Resultaten führt, würde an dieser Stelle zu viel Raum beanspruchen. Ich behalte mir dieselbe für eine andere Mittheilung vor.

Berlin, im Januar 1888.

XI.

Untersuchungen über die Constitution unendlich dünner astigmatischer Strahlenbündel nach ihrer Brechung in einer krummen Oberfläche.

Von

Prof. Dr. Ludwig Matthiessen

in Rostock.

Von der Brechung eines unendlich dünnen nicht homocentrischen Strahlenbündels, welches zwei Brennlinien in zwei aufeinander senkrechten Focalebenen besitzt, hat C. Neumann eine vollständige Darstellung gegeben. (Ber. d. königl. sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Cl. 1880. S. 53.) Derselbe wendet zu dem Zwecke das Fermat'sche Princip von der kleinsten optischen Länge an, sowie die Folgerung des Malus'schen Satzes, dass das in einem isotropen Medium gebrochene Strahlenbündel ebenfalls zwei aufeinander senkrechte Focalebenen mit zwei Brennlinien besitze. C. Neumann nimmt jedoch nach Sturm an, dass die Brennlinien vor der Brechung auf dem Hauptstrahle senkrecht stehen und auch nach beliebig vielen Brechungen senkrecht auf demselben bleiben. Wir wollen nun die Neumann'sche Darstellung in dieser Richtung verallgemeinern und zu zeigen versuchen, dass selbst dann, wenn die Brennlinien vor der Brechung auf dem Hauptstrahle senkrecht stehen, sie es nach der Brechung im Allgemeinen nicht mehr bleiben, sondern eine bestimmbare Inclination gegen denselben annehmen, wie es dem Verlaufe der Rückkehrkante der Brennfläche naturgemäss zu entsprechen scheint. Die bekannten Gleichungen der Object- und Bilddistanzen werden durch unsere weitergehenden Untersuchungen in keinerlei Weise modificirt, sondern nur die Beziehungen für die Lagen der Brennlinien aus denselben zugleich mitgewonnen. Dies Theorem erscheint um so wichtiger, als in der praktischen Dioptrik für messbar dünne Strahlenbündel die Inclination bemerkbar wird. Wenn die Azimuthe und Inclinationen der Brennlinien des einfallenden Strahlenbündels, sowie ihre Distanzen vom Einfallspunkte gegeben sind, so lassen sich dieselben Elemente für das gebrochene Strahlenbündel berechnen. Sämmtliche Strahlen, welche von einem leuchtenden Punkte oder einer Brennlinie ausgehen und dem astigmatischen Strahlenbündel angehören, gehen auch durch beide Brennlinien des gebrochenen Strahlenbündels. In einer früheren Abhandlung (Acta mathematica IV, 2 [1884], S. 177) ist von mir gezeigt worden, dass man zur vollständigen Bestimmung des Ortes und der relativen Lage der beiden Brennlinien eines beliebigen, auch endlich dicken astigmatischen Strahlenbündels mindestens vier Strahlen kennen muss und dass alle übrigen Strahlen desselben gewisse Bedingungen erfüllen müssen, um demselben anzugehören.

Sind auf dem Hauptstrahle r und r_1 die conjugirten Object- und Bilddistanzen von dem Einfallspunkte, n und n_1 die Indices der Medien, so lässt sich der Fermat'sche Satz anwenden: Die optische Länge (Gangzeit) eines Strahles zwischen Object- und Bildpunkt ist ein Minimum, also

$$nr = n_1 r_1 = u = \text{Min.}$$

Ist nun $f(x, y, z) = f = 0$ die Gleichung der brechenden Fläche und sind $(a_1 b_1 c_1)$ sowie $(a_2 b_2 c_2)$ die Oerter vom Object- und Bildpunkte, (x, y, z) der Einfallspunkt des Hauptstrahles des Bündels, so ist

$$r = \sqrt{(a_1 - x)^2 + (b_1 - y)^2 + (c_1 - z)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(a_2 - x)^2 + (b_2 - y)^2 + (c_2 - z)^2},$$

also

$$nr + n_1 r_1 = u = F(x, y, z) = \text{Min.}$$

und

$$n\,\partial r + n_1\,\partial r_1 = \partial u = 0.$$

Führen wir statt der totalen die partiellen Differentiale ein, so ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\partial z = 0,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\partial z = 0.$$

Wir können ∂x eliminiren und haben in der Finalgleichung die Coefficienten der willkürlichen Differentiale ∂y und ∂z gleich Null zu setzen. Multipliciren wir die zweite Gleichung mit λ, subtrahiren und setzen

$$\left(\frac{\partial F}{x}\right) - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

so folgt weiter

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Daraus ergeben sich die Relationen

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + n_1\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right) = nA - n_1 A_1 = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\ 1)\quad & n\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + n_1\left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right) = nB - n_1 B_1 = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\ & n\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) + n_1\left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right) = nC - n_1 C_1 = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right); \quad \text{daneben } f(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Sie reichen zur Bestimmung von A_1, B_1, C_1 aus, wenn x, y und z bekannt sind. In diesen Gleichungen bedeuten A, B, C die Richtungscosinusse des einfallenden Strahles r gegen die Coordinatenaxen, A_1, B_1, C_1 die des gebrochenen und zwar in der Richtung des fortschreitenden Lichtes. Da eine Zunahme von r eine Abnahme von r_1 im Gefolge hat, so erklären sich daraus die entgegengesetzten Vorzeichen. Wir bezeichnen weiter die Richtungscosinus der Normale des Einfallspunktes mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, den Einfalls- und Brechungswinkel mit e_2 und e_1, die Azimuthe der Einfallsebene gegen die zu x, y, z parallelen Normalebenen mit φ, φ', φ'', die der Brechungsebene mit ψ, ψ', ψ''. Dann gelten für die Richtungscosinusse der Hauptstrahlen r und r_1 in der Richtung der Lichtbewegung folgende Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) &= A = \cos\alpha\cos e_2 + \sin\alpha\sin e_2\cos\varphi,\\
\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) &= B = \cos\beta\cos e_2 + \sin\beta\sin e_2\cos\varphi',\\
\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) &= C = \cos\gamma\cos e_2 + \sin\gamma\sin e_2\cos\varphi'';
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi+\varphi') &= -\cot\alpha\cot\beta,\\
\cos(\varphi+\varphi'') &= -\cot\alpha\cot\gamma,\\
\cos(\varphi'-\varphi'') &= -\cot\beta\cot\gamma.
\end{aligned} \tag{3}$$

Ferner ist für den gebrochenen Strahl

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right) &= A_1 = \cos\alpha\cos e_1 + \sin\alpha\sin e_1\cos\psi,\\
-\left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right) &= B_1 = \cos\beta\cos e_1 + \sin\beta\sin e_1\cos\psi',\\
-\left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right) &= C_1 = \cos\gamma\cos e_1 + \sin\gamma\sin e_1\cos\psi'';
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\psi+\psi') &= -\cot\alpha\cot\beta,\\
\cos(\psi+\psi'') &= -\cot\alpha\cot\gamma,\\
\cos(\psi'-\psi'') &= -\cot\beta\cot\gamma.
\end{aligned} \tag{5}$$

Zur Vereinfachung der Formeln wählen wir nun den Einfallspunkt (x, y, z) als Coordinatenanfangspunkt und die Normale zur z-Axe. Für ein unendlich kleines Oberflächenelement, welches von dem unendlich dünnen Strahlenbündel getroffen wird, können wir alsdann das osculirende elliptische Paraboloid

$$\frac{Mx^2 + 2Oxy + Ny^2}{2} - z = 0$$

setzen, und es ist $x=0$, $y=0$, $z=0$ und $\partial z = 0$. Nennen wir ε das Azimuth der Einfallsebene gegen den I. Hauptnormalschnitt der Fläche und bezeichnen die Krümmungsradien der beiden Hauptnormalschnitte mit ϱ_1 und ϱ_2, so wird

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos\varepsilon^2}{\varrho_1} + \frac{\sin\varepsilon^2}{\varrho_2},\\
N &= \frac{1}{\varrho''} = \frac{\sin\varepsilon^2}{\varrho_1} + \frac{\cos\varepsilon^2}{\varrho_2},\\
O &= \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\sin\varepsilon\cos\varepsilon.
\end{aligned} \tag{6}$$

Infolge der Verlegung der Coordinaten wird nun $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 0^0$; ferner $\cos(\varphi + \varphi') = \cos(\psi + \psi') = 0$; deshalb werden die Richtungscosinusse

$$7)\qquad \begin{aligned} A &= \sin e_2 \cos\varphi, & A_1 &= \sin e_1 \cos\psi, \\ B &= \sin e_2 \sin\varphi; & B_1 &= \sin e_1 \sin\psi. \end{aligned}$$

Da für das unendlich kleine Flächenelement

$$\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0, \quad \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0, \quad \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = -\lambda$$

ist, so folgt weiter

$$8)\qquad nA - n_1 A_1 = 0, \quad nB - n_1 B_1 = 0, \quad nC - n_1 C_1 = -\lambda.$$

Durch Substitution der Werthe von A und B findet man, wie die beiden ersten Gleichungen ergeben, dass $\psi = \varphi$ sein muss, dass also die Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen. Verlegt man die Einfallsebene in die xz-Ebene, so wird $\varphi = \psi = 0^0$; mithin werden die Richtungscosinusse der Strahlen

$$\begin{aligned} A &= \sin e_2, & A_1 &= \sin e_1, \\ B &= 0, & B_1 &= 0, \\ C &= \cos e_2, & C_1 &= \cos e_1. \end{aligned}$$

Ihre Differentiale sind mit Rücksicht auf die allgemeinen Gleichungen

$$9)\qquad \begin{aligned} \partial A &= -\cos e_2\, \partial\alpha + \cos e_2\, \partial e_2, \\ \partial B &= -\cos e_2\, \partial\beta + \sin e_2\, \partial\varphi, \\ \partial C &= \sin e_2 \cos\varphi''\, \partial\gamma - \sin e_2\, \partial e_2; \end{aligned}$$

$$10)\qquad \begin{aligned} \partial A_1 &= -\cos e_1\, \partial\alpha + \cos e_1\, \partial e_1, \\ \partial B_1 &= -\cos e_1\, \partial\beta + \sin e_1\, \partial\psi, \\ \partial C_1 &= \sin e_1 \cos\psi''\, \partial\gamma - \sin e_1\, \partial e_1. \end{aligned}$$

Die Werthe $\cos\varphi''\,\partial\gamma$ und $\cos\psi''\,\partial\gamma$ lassen sich bestimmen aus der Relation

$$\cos(\varphi' + \varphi'') = \cos(\psi' + \psi'') = -\cot\alpha \cot\gamma;$$

man erhält $\cos\varphi'' = \partial\alpha : \partial\gamma$ und andererseits $\cos\psi'' = \partial\alpha : \partial\gamma$; ebenso findet man aus der Relation

$$\cos(\varphi' - \varphi'') = \cos(\psi' - \psi'') = -\cot\beta \cot\gamma$$

$\sin\varphi'' = \sin\psi'' = \partial\beta : \partial\gamma$. Die Differentiale nehmen demgemäss folgende Formen an:

$$11)\qquad \begin{aligned} \partial A &= -\cos e_2\, \partial\alpha + \cos e_2\, \partial e_2, \\ \partial B &= -\cos e_2\, \partial\beta + \sin e_2\, \partial\varphi, \\ \partial C &= \sin e_2\, \partial\alpha - \sin e_2\, \partial e_2; \end{aligned}$$

$$12)\qquad \begin{aligned} \partial A_1 &= -\cos e_1\, \partial\alpha + \cos e_1\, \partial e_1, \\ \partial B_1 &= -\cos e_1\, \partial\beta + \sin e_1\, \partial\psi, \\ \partial C_1 &= \sin e_1\, \partial\alpha - \sin e_1\, \partial e_1. \end{aligned}$$

Neumann differenzirt statt der allgemeinen Gleichungen in α, β, γ die specialisirten, findet also

$$\begin{aligned} \partial A &= \cos e_2\, \partial e_2, & \partial A_1 &= \cos e_1\, \partial e_1, \\ \partial B &= \sin e_2\, \partial\varphi, & \partial B_1 &= \sin e_1\, \partial\psi, \\ \partial C &= -\sin e_2\, \partial e_2; & \partial C_1 &= -\sin e_1\, \partial e_1. \end{aligned}$$

Auch diese sind richtig; doch ist wohl zu beachten, dass hier die Differentiale ∂e_2 und ∂e_1 eine andere Bedeutung haben, als in den vorhergehenden Formeln, indem sie sich auf die Richtungscosinusse des Strahles gegen die Normale des Punktes (0, 0, 0) und nicht auf das Wachsthum der Winkel e_2 und e_1 von dieser Normale bis zur Normale des Punktes $(\partial x, \partial y, \partial z)$ beziehen. Es wird sich dieser Umstand auch in der Folge ergeben. Aus den drei Gleichungen in n und n_1 folgt nunmehr

$$13)\qquad \begin{aligned} n \sin e_2 - n_1 \sin e_1 &= 0, \\ 0 &= 0, \\ n \cos e_2 - n_1 \cos e_1 &= -\lambda. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen enthält das Snellius'sche Brechungsgesetz; aus der dritten folgt

$$\lambda = n \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}.$$

Wir differenziren nun die Gleichungen 1):

$$nA - n_1 A_1 = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad nB - n_1 B_1 = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad nC - n_1 C_1 = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

und erhalten damit für einen unendlich nahen Strahl $(\partial x, \partial y, \partial z)$

$$\begin{aligned} n\,\partial A - n_1\,\partial A_1 &= \lambda\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\partial x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\partial z\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\partial\lambda, \\ n\,\partial B - n_1\,\partial B_1 &= \lambda\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\partial y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\right)\partial z\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\partial\lambda, \\ n\,\partial C - n_1\,\partial C_1 &= \lambda\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\partial z\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\partial\lambda \end{aligned}$$

oder

$$14)\qquad \begin{aligned} n\,\partial A - n_1\,\partial A_1 &= \lambda(M\,\partial x + O\,\partial y), \\ n\,\partial B - n_1\,\partial B_1 &= \lambda(O\,\partial x + N\,\partial y), \\ n\,\partial C - n_1\,\partial C_1 &= -\partial\lambda. \end{aligned}$$

Substituiren wir die Werthe der Differentiale, so resultirt

$$15)\qquad \begin{aligned} n \cos e_2(\partial e_2 - \partial\alpha) - n_1 \cos e_1(\partial e_1 - \partial\alpha) &= \lambda(M\,\partial x + O\,\partial y), \\ n(\sin e_2\,\partial\varphi - \cos e_2\,\partial\beta) - n_1(\sin e_1\,\partial\psi - \cos e_1\,\partial\beta) &= \lambda(O\,\partial x + N\,\partial y). \end{aligned}$$

Wir wollen die beiden Hauptstrahlen, welche den Punkt (0, 0, 0) der Fläche treffen, mit Σ und Σ_1 bezeichnen. Auf dem einfallenden Hauptstrahle des als convergent angenommenen Strahlenbündels mögen die Brennlinien b_1 und b_2, auf dem gebrochenen Σ_1 die Brennlinien a_1 und a_2 stehen und zwar die ersteren in der Richtung des fortschreitenden Lichtes gegen den Hauptstrahl geneigt unter den Winkeln δ' und δ_1, die beiden anderen unter den Winkeln δ'' und δ_2. Ihre Distanzen vom Punkte (0, 0, 0) seien in der positiven Richtung gemessen beziehlich ξ_0, x_0, x_1 und x_2, die Azimuthe der Focalebenen Σb_1 und $\Sigma_1 a_1$ gegen die xz-Ebene (Einfallsebene) beziehlich ϑ_1 und ϑ_2. Da die Focalebenen aufeinander senkrecht stehen, so sind die Azimuthe von Σb_2 und $\Sigma_1 a_2$ resp. gleich $90^\circ + \vartheta_1$ und $90^\circ + \vartheta_2$.

Die Richtungscosinusse von b_2 und b_1 gegen die Axen seien α, β, γ und α_1, β_1, γ_1. Dann wird sein

$$(\Sigma b_2)\quad \begin{cases} \alpha = \cos\delta_1 \sin e_2 - \sin\delta_1 \cos e_2 \sin\vartheta_1, \\ \beta = \sin\delta_1 \cos\vartheta_1, \\ \gamma = \cos\delta_1 \cos e_2 + \sin\delta_1 \sin e_2 \sin\vartheta_1; \end{cases}$$

$$(\Sigma b_1)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\delta' \sin e_2 + \sin\delta' \cos e_2 \cos\vartheta_1, \\ \beta_1 = \sin\delta' \sin\vartheta_1, \\ \gamma_1 = \cos\delta' \cos e_2 - \sin\delta' \sin e_2 \cos\vartheta_1. \end{cases}$$

Daraus findet man

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \cos\delta_1, \quad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \cos\delta_1 \cos\delta',$$
$$\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C = \cos\delta', \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$\alpha\,\partial A + \beta\,\partial B + \gamma\,\partial C = -\sin\delta_1 [\sin\vartheta_1 (\partial e_2 - \partial\alpha) - \cos\vartheta_1 (\sin e_2\, \partial\varphi - \cos e_2\, \partial\beta)],$$
$$\alpha_1 \partial A + \beta_1 \partial B + \gamma_1 \partial C = \quad \sin\delta' [\cos\vartheta_1 (\partial e_2 - \partial\alpha) + \sin\vartheta_1 (\sin e_2\, \partial\varphi - \cos e_2\, \partial\beta)].$$

Wenn nun ein Strahl (∂x, ∂y, ∂z) mit den Richtungscosinussen $A + \partial A$, $B + \partial B$, $C + \partial C$ dem einfallenden Strahlenbündel angehören, also durch b_1 und b_2 gehen soll, etwa in den Punkten ($\xi\eta\zeta$) und ($\xi_1\eta_1\zeta_1$), so gelten für ξ, η, ζ je zwei Werthe, indem man einmal den Hauptstrahl x_0 und die Brennlinie ∂b_2 auf die Axen projicirt und ein andermal den Nebenstrahl $x_0 + \partial x_0$ und die Coordinaten ∂x, ∂y, ∂z seines Einfallspunktes. Dies giebt

$$16)\qquad \begin{aligned} \xi &= A x_0 + \alpha\, \partial b_2 = \partial x + (A + \partial A)(x_0 + \partial x_0), \\ \eta &= B x_0 + \beta\, \partial b_2 = \partial y + (B + \partial B)(x_0 + \partial x_0), \\ \zeta &= C x_0 + \gamma\, \partial b_2 = \partial z + (C + \partial C)(x_0 + \partial x_0); \quad dz = 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1 und addirt, so wird nach Division durch $\sin\delta'$ eine Gleichung erhalten, worin einige Glieder den Coefficienten $\cot\delta'$ enthalten. Durch eine einfache geometrische Betrachtung findet man

$$\partial x_0 = \cos\delta_1\, \partial b_2 - \sin e_2\, \partial x.$$

Infolge dessen verschwindet der Coefficient von $\cot\delta'$ und es resultirt

$$\begin{aligned} 0 = x_0 [\cos\vartheta_1 (\partial e_2 - \partial\alpha) &+ \sin\vartheta_1 (\sin e_2\, \partial\varphi - \cos e_2\, \partial\beta)] \\ &+ \cos e_2 \cos\vartheta_1\, \partial\alpha + \sin\vartheta_1\, \partial y. \end{aligned}$$

Analog erhält man für ξ_1, η_1, ζ_1

$$\partial\xi_0 = \cos\delta'\, \partial b_1 - \sin e_2\, \partial x,$$
$$\begin{aligned} 0 = \xi_0 [\sin\vartheta_1 (\partial e_2 - \partial\alpha) &- \cos\vartheta_1 (\sin e_2\, \partial\varphi - \cos e_2\, \partial\beta)] \\ &+ \cos e_2 \sin\vartheta_1\, \partial x - \cos\vartheta_1\, \partial y. \end{aligned}$$

Aus den beiden Relationen für x_0 und ξ_0 ergeben sich die Werthe

$$\partial e_2 - \partial\alpha = -\left[\left(\frac{\cos\vartheta_1^2}{x_0} + \frac{\sin\vartheta_1^2}{\xi_0}\right) \cos e_2\, \partial x + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0}\right) \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1\, \partial y\right],$$

$$\sin e_2\, \partial\varphi - \cos e_2\, \partial\beta$$
$$= -\left[\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0}\right) \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 \cos e_2\, \partial x + \left(\frac{\sin\vartheta_1^2}{x_0} + \frac{\cos\vartheta_1^2}{\xi_0}\right) \partial y\right]$$

oder der Kürze wegen

$$\partial e_2 - \partial \alpha = -(P \cos e_2 \, \partial x + R \, \partial y),$$
$$\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta = -(R \cos e_2 \, \partial x + Q \, \partial y).$$

Aus der ersten Gleichung erkennt man beiläufig, dass das Differential ∂e_2 sich nicht, wie das Neumann'sche, auf die Normale des Punktes (0, 0, 0), sondern auf die des Punktes $(\partial x, \partial y, \partial z)$ bezieht, weil es das Differential des Richtungscosinus mit einschliesst. Nimmt man als Specialfall ein osculirendes Rotationsparaboloid, also $\partial \alpha = \partial x : r$, ferner $\vartheta_1 = 90^0$, so wird

$$\partial e_2 = -\frac{\cos e_2 \, \partial x}{\xi_0} + \frac{\partial x}{r},$$

wie auch eine einfache geometrische Betrachtung lehrt.

Für das gebrochene Strahlenbündel gelten entsprechende Gleichungen, wie sich aus den Gleichungen 15)

$$n \cos e_2 (\partial e_2 - \partial \alpha) - n_1 \cos e_1 (\partial e_1 - \partial \alpha) = \lambda (M \, \partial x + O \, \partial y),$$
$$n(\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta) - n_1 (\sin e_1 \, \partial \psi - \cos e_1 \, \partial \beta) = \lambda (O \, \partial x + N \, \partial y)$$

ergiebt, wenn man die Werthe von $\partial e_2 - \partial \alpha$ und $\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta$ einsetzt. Man erhält dann

$$\partial e_1 - \partial \alpha = -(P_1 \cos e_1 \, \partial x + R_1 \, \partial y),$$
$$\sin e_1 \, \partial \psi - \cos e_1 \, \partial \beta = -(R_1 \cos e_1 \, \partial x + Q_1 \, \partial y).$$

Wir stellen sämmtliche Gleichungen zusammen:

$$17) \quad \begin{aligned} \partial x_0 &= \cos \delta_1 \, \partial b_2 - \sin e_2 \, \partial x, \\ \partial \xi_0 &= \cos \delta' \, \partial b_1 - \sin e_2 \, \partial x, \\ \partial x_2 &= \cos \delta_2 \, \partial a_2 - \sin e_1 \, \partial x, \\ \partial x_1 &= \cos \delta'' \, \partial a_1 - \sin e_1 \, \partial x; \end{aligned}$$

$$18) \quad \begin{aligned} 0 &= x_0 [\cos \vartheta_1 (\partial e_2 - \partial \alpha) + \sin \vartheta_1 (\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta)] \\ &\quad + \cos e_2 \cos \vartheta_1 \, \partial x + \sin \vartheta_1 \, \partial y, \\ 0 &= \xi_0 [\sin \vartheta_1 (\partial e_2 - \partial \alpha) - \cos \vartheta_1 (\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta)] \\ &\quad + \cos e_2 \sin \vartheta_1 \, \partial x - \cos \vartheta_1 \, \partial y, \\ 0 &= x_2 [\cos \vartheta_2 (\partial e_1 - \partial \alpha) + \sin \vartheta_2 (\sin e_2 \, \partial \psi - \cos e_1 \, \partial \beta)] \\ &\quad + \cos e_1 \cos \vartheta_2 \, \partial x + \sin \vartheta_2 \, \partial y, \\ 0 &= x_1 [\sin \vartheta_2 (\partial e_1 - \partial \alpha) - \cos \vartheta_2 (\sin e_2 \, \partial \psi - \cos e_1 \, \partial \beta)] \\ &\quad + \cos e_1 \sin \vartheta_2 \, \partial x - \cos \vartheta_2 \, \partial y; \end{aligned}$$

$$19) \quad \begin{aligned} \partial e_2 - \partial \alpha &= -\left[\left(\frac{\cos \vartheta_1^2}{x_0} + \frac{\sin \vartheta_1^2}{\xi_0}\right) \cos e_2 \, \partial x + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0}\right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \, \partial y\right], \\ &\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta \\ &= -\left[\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0}\right) \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1 \cos e_2 \, \partial x + \left(\frac{\sin \vartheta_1^2}{x_0} + \frac{\cos \vartheta_1^2}{\xi_0}\right) \partial y\right], \\ \partial e_1 - \partial \alpha &= -\left[\left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2^2}{x_1}\right) \cos e_1 \, \partial x + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 \, \partial y\right], \\ &\sin e_1 \, \partial \psi - \cos e_1 \, \partial \beta \\ &= -\left[\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 \cos e_1 \, \partial x + \left(\frac{\sin \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2^2}{x_1}\right) \partial y\right] \end{aligned}$$

oder der Kürze wegen, wie vorhin

$$
20)\quad
\begin{aligned}
\partial e_2 - \partial \alpha &= -(P \cos e_2 \, \partial x + R \, \partial y),\\
\sin e_2 \, \partial \varphi - \cos e_2 \, \partial \beta &= -(R \cos e_2 \, \partial x + Q \, \partial y),\\
\partial e_1 - \partial \alpha &= -(P_1 \cos e_1 \, \partial x + R_1 \, \partial y),\\
\sin e_2 \, \partial \psi - \cos e_1 \, \partial \beta &= -(R_1 \cos e_1 \, \partial x + Q_1 \, \partial y).
\end{aligned}
$$

Setzt man von nun an zur Vereinfachung $\frac{n_1}{n} = \frac{\sin e_2}{\sin e_1} = n$, so gelten zwischen den Grössen P, Q, R folgende Beziehungen:

$$
21)\quad
\begin{aligned}
&\text{I.} && -P \cos e_2{}^2 + n P_1 \cos e_1{}^2 = M \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1},\\
&\text{II.} && -Q + n Q_1 = N \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1},\\
&\text{III.} && -R \cos e_2 + n R_1 \cos e_1 = O \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir die Werthe P, Q, R etc. ein, so gelangen wir zu den Gleichungen zwischen den Object- und Bilddistanzen. Für den Fall, dass eine oder mehrere Brennlinien vor die Fläche treten, sind ihre Abscissen als wesentlich negativ zu betrachten. Die Gleichungen sind

$$
\text{I.}\quad
\begin{aligned}
&\frac{-\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \cos \varepsilon^2 + \varrho_1 \sin \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_1 \cos e_2{}^2}{\sin(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{\cos \vartheta_1{}^2}{x_0} + \frac{\sin \vartheta_1{}^2}{\xi_0} \right\}\\
&+ \frac{n \varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \cos \varepsilon^2 + \varrho_1 \sin \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_1 \cos e_1{}^2}{\sin(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_1} \right\} = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\text{II.}\quad
\begin{aligned}
&\frac{-\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \sin \varepsilon^2 + \varrho_1 \cos \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{\sin \vartheta_1{}^2}{x_0} + \frac{\cos \vartheta_1{}^2}{\xi_0} \right\}\\
&+ \frac{n \varrho_1 \varrho_2}{\varrho_2 \sin \varepsilon^2 + \varrho_1 \cos \varepsilon^2} \cdot \frac{\sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{\sin \vartheta_1{}^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_1} \right\} = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\text{III.}\quad
\begin{aligned}
&\frac{-\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \cdot \frac{\sin e_1 \cos e_2 \sin 2\vartheta_1}{\sin(e_2 - e_1) \sin 2\varepsilon} \left\{ \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0} \right\}\\
&+ \frac{n \varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2} \cdot \frac{\sin e_1 \cos e_1 \sin 2\vartheta_2}{\sin(e_2 - e_1) \sin 2\varepsilon} \left\{ \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right\} = 1.
\end{aligned}
$$

Sind also ϱ_1, ϱ_2, ε, ϑ_1, e_1, e_2, ξ_0 gegeben, so lassen sich daraus ϑ_2, x_1 und x_2 berechnen. Es ist nämlich

$$
\frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_1} = P_1, \quad \frac{\sin \vartheta_2{}^2}{x_2} + \frac{\cos \vartheta_2{}^2}{x_1} = Q_1,
$$

$$
\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_2 = R_1.
$$

Aus den beiden ersten folgt

$$
\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = P_1 + Q_1, \quad \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \cos 2\vartheta_2 = P_1 - Q_1,
$$

und mit Hilfe der dritten

$$
\tan 2\vartheta_2 = \frac{2 R_1}{P_1 - Q_1}.
$$

Ferner ist

$$\frac{1}{x_1 x_2} = P_1 Q_1 - R_1^2;$$

also sind x_1 und x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{1}{x} - P_1\right)\left(\frac{1}{x} - Q_1\right) = R_1^2.$$

Sind (a', b', c') und (a'', b'', c'') die Oerter der Brennlinien b_1 und b_2 des einfallenden Strahlenbündels, ξ_0 und x_0 ihre Abscissen, so werden der Einfallspunkt (x, y, z) und die geometrischen Elemente der Einfallsebene, die Krümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2, sowie ε gefunden mittels der Relationen

$$22)\quad \begin{aligned} x_0 - \xi_0 &= \sqrt{(a'-a'')^2 + (b'-b'')^2 + (c'-c'')^2}, \\ \xi_0 &= \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2 + (z-c')^2} = \frac{c'-z}{c'-c''}(x_0 - \xi_0), \\ x_0 &= \sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2 + (z-c'')^2} = \frac{c''-z}{c'-c''}(x_0 - \xi_0), \\ & f(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man x, y, z, ξ_0 und x_0.

Die Formeln I, II, III zeigen, dass bei schiefer Incidenz die Azimuthe der Focalebenen vor und hinter der Fläche f im Allgemeinen verschieden sind und zwar findet eine Verrückung statt in der Weise, dass sie die Fläche in verschiedenen Linien schneiden, mit Ausnahme des Falles $\varepsilon = 0^0$, $\vartheta_1 = 0^0$ oder 90^0. Ebenso verändern sich aber auch die Inclinationen δ gegen die Hauptstrahlen, sowie die Längen der Brennlinien.

Um zu den hierzu erforderlichen Bestimmungsgleichungen zu gelangen, gehen wir aus von dem System 16) und suchen die Werthe von ∂b_1, ∂b_2, ∂a_1 und ∂a_2. Wir fanden

$$\begin{aligned} \alpha\,\partial b_2 &= \partial x + A\,\partial x_0 + x_0\,\partial A, \\ \beta\,\partial b_2 &= \partial y + B\,\partial x_0 + x_0\,\partial B, \\ \gamma\,\partial b_2 &= \partial z + C\,\partial x_0 + x_0\,\partial C, \quad \partial z = 0. \end{aligned}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit α, β, γ, beachten, dass $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ist und setzen den Werth von ∂x_0 ein, sowie nach 18)

$$\sin\vartheta_1(\partial e_2 - \partial\alpha) - \cos\vartheta_1(\sin e_2\,\partial\varphi - \cos e_2\,\partial\beta) = -\frac{1}{\xi_0}(\cos e_2 \sin\vartheta_1\,\partial x - \cos\vartheta_1\,\partial y),$$

so resultirt

$$\sin\delta_1\,\partial b_2 = \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0}(\cos e_2 \sin\vartheta_1\,\partial x - \cos\vartheta_1\,\partial y).$$

In ähnlicher Weise findet man die Ausdrücke der übrigen Brennlinien, so dass man hat:

$$23)\quad \begin{aligned} \sin\delta_1\,\partial b_2 &= \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0}(\cos e_2 \sin\vartheta_1\,\partial x - \cos\vartheta_1\,\partial y), \\ \sin\delta'\,\partial b_1 &= \frac{x_0 - \xi_0}{x_0}(\cos e_2 \cos\vartheta_1\,\partial x + \sin\vartheta_1\,\partial y), \\ \sin\delta_2\,\partial a_2 &= \frac{x_2 - x_1}{x_1}(\cos e_1 \sin\vartheta_2\,\partial x - \cos\vartheta_2\,\partial y), \\ \sin\delta''\,\partial a_1 &= \frac{x_2 - x_1}{x_2}(\cos e_1 \cos\vartheta_2\,\partial x + \sin\vartheta_2\,\partial y) \end{aligned}$$

und weiter

$$
24)\quad
\begin{aligned}
\partial e_2 - \partial \alpha &= \frac{1}{x_0 - \xi_0}(\sin\vartheta_1 \sin\delta_1\, \partial b_2 + \cos\vartheta_1 \sin\delta' \partial b_1),\\
\sin e_2\, \partial\varphi - \cos e_2\, \partial\beta &= \frac{1}{x_0 - \xi_0}(-\cos\vartheta_1 \sin\delta_1\, \partial b_2 + \sin\vartheta_1 \sin\delta' \partial b_1),\\
\partial e_1 - \partial\alpha &= \frac{1}{x_2 - x_1}(\sin\vartheta_2 \sin\delta_2\, \partial a_2 + \cos\vartheta_2 \sin\delta'' \partial a_1),\\
\sin e_2\, \partial\psi - \cos e_1\, \partial\beta &= \frac{1}{x_2 - x_1}(-\cos\vartheta_2 \sin\delta_2\, \partial a_2 + \sin\vartheta_2 \sin\delta'' \partial a_1).
\end{aligned}
$$

Für die Differentiale ∂x_0, $\partial\xi_0$, ∂x_2 und ∂x_1 gehen nun die Ausdrücke 17) über in folgende:

$$
25)\quad
\begin{aligned}
\partial x_0 &= -\sin e_2\, \partial x + \cot\delta_1 \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0}(\cos e_2 \sin\vartheta_1\, \partial x - \cos\vartheta_1\, \partial y),\\
\partial \xi_0 &= -\sin e_2\, \partial x + \cot\delta' \frac{x_0 - \xi_0}{x_0}(\cos e_2 \cos\vartheta_1\, \partial x + \sin\vartheta_1\, \partial y),\\
\partial x_2 &= -\sin e_1\, \partial x + \cot\delta_2 \frac{x_2 - x_1}{x_1}(\cos e_1 \sin\vartheta_2\, \partial x - \cos\vartheta_2\, \partial y),\\
\partial x_1 &= -\sin e_1\, \partial x + \cot\delta'' \frac{x_2 - x_1}{x_2}(\cos e_1 \cos\vartheta_2\, \partial x + \sin\vartheta_2\, \partial y).
\end{aligned}
$$

Wir wollen die vorstehenden Formeln auf den Fall einer sphärischen Fläche vom Radius r anwenden und betrachten die geometrische Lage eines windschiefen Strahlenfächers, welcher begrenzt wird durch den Hauptstrahl (0, 0) und einen Nebenstrahl (∂x, ∂y). Es sei ∂q der Querschnitt und X das Azimuth des einfallenden Fächers im Einfallspunkte, ∂q_1 der Querschnitt und X_1 das Azimuth des gebrochenen Strahlenfächers. Dann ist

$$
\partial q = \frac{\partial y}{\sin X} = \frac{\cos e_2\, \partial x}{\cos X}, \quad \partial q_1 = \frac{\partial y}{\sin X_1} = \frac{\cos e_1\, \partial x}{\cos X_1}.
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
&\cos X\, \partial y = \sin X \cos e_2\, \partial x,\\
&\cos X_1\, \partial y = \sin X_1 \cos e_1\, \partial x, \quad \tan X_1 \cos e_1 = \tan X \cos e_2
\end{aligned}
$$

und in Berücksichtigung der Gleichungen 23)

$$
26)\quad
\begin{aligned}
\sin\delta_1\, \partial b_2 &= -\frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0}\sin(X - \vartheta_1)\, \partial q,\\
\sin\delta'\, \partial b_1 &= \frac{x_0 - \xi_0}{x_0}\cos(X - \vartheta_1)\, \partial q,\\
\sin\delta_2\, \partial a_2 &= -\frac{x_2 - x_1}{x_1}\sin(X_1 - \vartheta_2)\, \partial q_1,\\
\sin\delta''\, \partial a_1 &= -\frac{x_2 - x_1}{x_2}\cos(X_1 - \vartheta_2)\, \partial q_1.
\end{aligned}
$$

Nun sind der Bedeutung nach ∂b_2, ∂b_1, ∂a_2 und ∂a_1 die Abschnitte des windschiefen Fächers auf den vier Brennlinien; wir wollen deshalb die totalen Brennlinien eines vollständigen Strahlenbündels bezeichnen mit Δb_2, Δb_1, Δa_2 und Δa_1. Geht nun X in ϑ_1 über, so wird

$$\sin\delta_1\,\partial b_2 = -\frac{x_0-\xi_0}{\xi_0}\sin(X-\vartheta_1)\,\partial q = 0, \quad \partial b_2 = 0,$$

$$\sin\delta'\,\partial b_1 = \frac{x_0-\xi_0}{x_0}\cdot\frac{\cos e_2\,\partial x}{\cos\vartheta_1} = \frac{x_0-\xi_0}{x_0}\cdot\frac{\partial y}{\sin\vartheta_1}, \quad \partial b_1 = \varDelta b_1.$$

Der windschiefe Fächer geht über in die Focalebene Σb_1 und weil ∂b_2 verschwindet, so geht daraus beiläufig hervor, dass die die Brennlinie $\varDelta b_1$ begrenzenden Strahlen vom Mittelpunkte der Brennlinie $\varDelta b_2$ ausgehen. Geht X in $90^0+\vartheta_1$ über, so wird

$$\sin\delta_1\,\partial b_2 = -\frac{x_0-\xi_0}{\xi_0}\,\partial q = \frac{x_0-\xi_0}{\xi_0}\cdot\frac{\cos e_2\,\partial x}{\sin\vartheta_1} = -\frac{x_0-\xi_0}{\xi_0}\cdot\frac{\partial y}{\cos\vartheta_1}, \quad \partial b_2 = \varDelta b_2,$$

$$\sin\delta'\,\partial b_1 = \frac{x_0-\xi_0}{x_0}\cos(X-\vartheta_1)\,\partial q = 0, \quad \partial b_1 = 0.$$

Der windschiefe Fächer geht über in die Focalebene Σb_2 und weil ∂b_1 verschwindet, so gehen die die Brennlinie $\varDelta b_2$ begrenzenden Strahlen vom Mittelpunkte der Brennlinie $\varDelta b_1$ aus.

Für den gebrochenen Strahlenfächer, welcher ebenfalls windschief ist, sind die Formeln analog, jedoch findet eine Verrückung der Focalebenen statt, so dass zu dem Grenzstrahle andere Coordinaten $\partial x'$ und $\partial y'$ gehören. Es ist demnach für $X_1 = \vartheta_2$:

$$\sin\delta_2\,\partial a_2 = 0, \quad \partial a_2 = 0,$$

$$\sin\delta''\,\partial a_1 = \frac{x_2-x_1}{x_2}\,\partial q_1 = \frac{x_2-x_1}{x_2}\cdot\frac{\cos e_1\,\partial x'}{\cos\vartheta_2} = \frac{x_2-x_1}{x_2}\cdot\frac{\partial y'}{\sin\vartheta_2}, \quad \partial a_1 = \varDelta a_1;$$

für $X_1 = 90^0+\vartheta_2$:

$$\sin\delta_2\,\partial a_2 = -\frac{x_2-x_1}{x_1}\,\partial q_1 = \frac{x_2-x_1}{x_1}\cdot\frac{\cos e_1\,\partial x'}{\sin\vartheta_2} = \frac{x_2-x_1}{x_1}\cdot\frac{\partial y'}{\cos\vartheta_2}, \quad \partial a_2 = \varDelta a_2,$$

$$\sin\delta''\,\partial a_1 = 0, \quad \partial a_1 = 0.$$

Ferner ist für

$$27)\quad \begin{aligned}
&X = \vartheta_1: && \sin\vartheta_1\cos e_2\,\partial x = \cos\vartheta_1\,\partial y,\\
&X = 90^0+\vartheta_1: && \cos\vartheta_1\cos e_2\,\partial x = -\sin\vartheta_1\,\partial y,\\
&X_1 = \vartheta_2: && \sin\vartheta_2\cos e_1\,\partial x' = \cos\vartheta_2\,\partial y',\\
&X_1 = 90^0+\vartheta_2: && \cos\vartheta_2\cos e_1\,\partial x' = -\sin\vartheta_2\,\partial y'.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass im Allgemeinen $\partial x'$ von ∂x, $\partial y'$ von ∂y verschieden ist, also eine Verrückung der Focalebenen gegeneinander stattfinden muss, so lange z. B. $\tan\vartheta_1\cos e_2$ von $\tan\vartheta_2\cos e_1$ verschieden bleibt. Mit anderen Worten: Die Grenzstrahlen der einfallenden Hauptstrahlenfächer sind im Allgemeinen nicht die Grenzstrahlen der gebrochenen Hauptstrahlenfächer. Um deshalb die Längen der vier Brennlinien eines Strahlenbündels miteinander vergleichen zu können, muss man demselben eine bestimmte Gestalt zuschreiben. Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass das einfallende Strahlenbündel auf der Fläche einen unendlich kleinen, mit dem Punkte (0, 0, 0) concentrischen Kreis vom Radius ∂s ausschneide. Dann ist für

$$X = \vartheta_1:$$

$$\partial q = \frac{\cos e_1 \, \partial s}{\sqrt{1 - \sin\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}, \quad \partial s = \partial x \frac{\sqrt{1 - \sin\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}{\cos\vartheta_1} = \partial y \frac{\sqrt{1 - \sin\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}{\sin\vartheta_1 \cos e_2},$$

28)

$$X = 90^0 + \vartheta_1:$$

$$\partial q = \frac{\cos e_2 \, \partial s}{\sqrt{1 - \cos\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}, \quad \partial s = \partial x \frac{\sqrt{1 - \cos\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}{-\sin\vartheta_1} = \partial y \frac{\sqrt{1 - \cos\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}{\cos\vartheta_1 \cos e_2}.$$

Für den gebrochenen Strahl gelten analoge Beziehungen. Wir erhalten demgemäss für die Längen der Brennlinien folgendes System von Gleichungen:

29)

$$X = 90^0 + \vartheta_1: \quad \sin\delta_1 \, \varDelta b_2 = \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0} \partial q = \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0} \cdot \frac{\cos e_2 \, \partial s}{\sqrt{1 - \cos\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}$$
$$= -\frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0} \cdot \frac{\cos e_2 \, \partial x}{\sin\vartheta_1} = \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0} \cdot \frac{\partial y}{\cos\vartheta_1},$$

$$X = \vartheta_1: \quad \sin\delta' \, \varDelta b_1 = \frac{x_0 - \xi_0}{x_0} \partial q = \frac{x_0 - \xi_0}{x_0} \cdot \frac{\cos e_2 \, \partial s}{\sqrt{1 - \sin\vartheta_1^2 \sin e_2^2}}$$
$$= \frac{x_0 - \xi_0}{x_0} \cdot \frac{\cos e_2 \, \partial x}{\cos\vartheta_1} = \frac{x_0 - \xi_0}{x_0} \cdot \frac{\partial y}{\sin\vartheta_1},$$

$$X_1 = 90^0 + \vartheta_2: \quad \sin\delta_2 \, \varDelta a_2 = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \partial q' = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot \frac{\cos e_1 \, \partial s}{\sqrt{1 - \cos\vartheta_2^2 \sin e_1^2}}$$
$$= -\frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot \frac{\cos e_1 \, \partial x'}{\sin\vartheta_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot \frac{\partial y'}{\cos\vartheta_2},$$

$$X_1 = \vartheta_2: \quad \sin\delta'' \, \varDelta a_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_2} \partial q' = \frac{x_2 - x_1}{x_2} \cdot \frac{\cos e_1 \, \partial s}{\sqrt{1 - \sin\vartheta_2^2 \sin e_1^2}}$$
$$= \frac{x_2 - x_1}{x_2} \cdot \frac{\cos e_1 \, \partial x'}{\cos\vartheta_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_2} \cdot \frac{\partial y'}{\sin\vartheta_2}.$$

Zu einer Berechnung der Inclinationen und Längenverhältnisse der vier Brennlinien wollen wir die gewonnenen Resultate auf einen Specialfall anwenden. Es sei $\varrho_2 = \varrho_1 = r$ und $\vartheta_1 = 90^0$. Dann ist gemäss Formel III auch $\vartheta_2 = 90^0$; die Focalebenen Σb_1 und $\Sigma_1 a_2$ liegen in der Einfallsebene und die Focalebenen Σb_1 und $\Sigma_1 a_1$ senkrecht dazu. Die Abscissengleichungen werden demnach

30)

$$\text{I.} \quad \frac{-r \sin e_1 \cos e_2^2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{\xi_0} + \frac{nr \sin e_1 \cos e_1^2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{f_1}{\xi_0} + \frac{\varphi_1}{x_1} = 1,$$

$$\text{II.} \quad \frac{-r \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{nr \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{f_2}{x_0} + \frac{\varphi_2}{x_2} = 1.$$

Es sei zunächst $X = \vartheta_1 = 90^0$ (II. Focalebene). Dann ist

$$\partial x = \partial x' = 0, \quad \partial y = \partial y' = \partial s, \quad \partial e_2 = \partial e_1 = 0;$$
$$\partial b_1 = \varDelta b_1, \quad \partial b_2 = 0, \quad \partial a_1 = \varDelta a_1, \quad \partial a_2 = 0.$$

Differenziren wir die Gleichung I, so resultirt

$$\frac{-n \cos e_1^2 \, \partial x_1}{x_1^2} + \frac{\cos e_2^2 \, \partial \xi_0}{\xi_0^2} = 0.$$

Nun ist nach 25)

$$\partial x_1 = \cot\delta'' \frac{x_2 - x_1}{x_2} \partial y, \quad \partial \xi_0 = \cot\delta' \frac{x_0 - \xi_0}{x_0} \partial y$$

und wenn wir substituiren, so ergiebt sich

$$31) \qquad \frac{\cot\delta'' \cot e_1 \cos e_1 (x_2 - x_1)}{x_1^2 x_2} = \frac{\cot\delta' \cot e_2 \cos e_2 (x_0 - \xi_0)}{\xi_0^2 x_0}.$$

Es ist also δ'' von δ' abhängig; ist $\delta' = 90^0$ oder das einfallende Strahlenbündel homocentrisch ($\xi_0 = x_0$), so ist auch $\delta'' = 90^0$, d. h. die Brennlinien Δb_1 und Δa_1 stehen senkrecht zum Hauptstrahle. Ist $\delta' = 0^0$, so ist auch $\delta'' = 0^0$; die beiden Brennlinien liegen gleichzeitig im Hauptstrahl.

Das Längenverhältniss der Brennlinien ist gemäss 29)

$$32) \qquad \frac{\Delta a_1}{\Delta b_1} = \frac{(x_2 - x_1) x_0 \sin\delta'}{(x_0 - \xi_0) x_2 \sin\delta''}.$$

Wenn δ' unendlich klein wird, so wird auch δ'' gleich Null. Die Gleichung der Inclinationen wird alsdann

$$Lim\left(\frac{\cot\delta''}{\cot\delta'}\right) = \frac{\sin\delta'}{\sin\delta''} = \frac{x_1^2 x_2 (x_0 - \xi_0) \cot e_2 \cos e_2}{\xi_0^2 x_0 (x_2 - x_1) \cot e_1 \cos e_1}$$

und das Längenverhältniss

$$\frac{\Delta a_1}{\Delta b_1} = \frac{x_1^2 \sin e_1 \cos e_2^2}{\xi_0^2 \sin e_2 \cos e_1^2}.$$

Es sei ferner $X = 90^0 + \vartheta_1 = 180^0$ (I. Focalebene). Dann ist

$$\partial x = \partial x' = \partial s, \quad \partial y = \partial y' = 0,$$

und gemäss 19) und 25)

$$\partial e_2 = -\frac{\cos e_2 \, \partial x}{\xi_0} + \frac{\partial x}{r}, \quad \partial e_1 = -\frac{\cos e_1 \, \partial x}{x_1} + \frac{\partial x}{r},$$

$$\partial x_0 = -\sin e_2 \, \partial x + \cot\delta_1 \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0} \cos e_2 \, \partial x,$$

$$\partial x_2 = -\sin e_2 \, \partial x + \cot\delta_2 \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cos e_1 \, \partial x.$$

Differenziren wir die Gleichung II in der Form

$$\frac{n}{x_2} - \frac{1}{x_0} = \frac{\sin(e_2 - e_1)}{r \sin e_1} = \frac{1}{r}(n \cos e_1 - \cos e_2),$$

so resultirt

$$\frac{-n\,\partial x_2}{x_2^2} + \frac{\partial x_0}{x_0^2} = \frac{\sin e_2}{r}(\partial e_2 - \partial e_1) = \frac{\sin e_2}{r}\left(\frac{\cos e_1}{x_1} - \frac{\cos e_2}{\xi_0}\right)\partial x.$$

Subtituiren wir die Differentiale, so erhalten wir

$$33) \qquad \frac{\cot\delta_2 \cot e_1 \frac{x_2 - x_1}{x_1} - 1}{x_2^2} - \frac{\cot\delta_1 \cot e_2 \frac{x_0 - \xi_0}{\xi_0} - 1}{x_0^2} = \frac{1}{r}\left(\frac{\cos e_2}{\xi_0} - \frac{\cos e_1}{x_1}\right).$$

Diese Gleichung lehrt, dass ebenfalls zu einem gegebenen Werthe δ_1 im Allgemeinen ein davon verschiedener Werth von δ_2 gehört, selbst dann, wenn vor der Brechung $\delta_1 = 90^0$ oder der einfallende Strahlenfächer homocentrisch ist, also $\xi_0 = x_0$. In diesem Falle ist

$$34)\qquad \cot\delta_2 = \frac{x_2\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\cos e_2}{x_0} - \frac{\cos e_1}{x_1}\right) + \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_0^2}\right\}}{\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \cdot \frac{\cos e_1}{\sin e_1}}.$$

Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der Gleichungen I und II verwandeln in

$$35)\qquad \cot\delta_2 = \frac{x_2 - x_0 \cos(e_2 - e_1)}{x_0 \sin(e_2 - e_1)}.$$

Der geometrische Sinn dieser Relation ist, dass die II. Brennlinie $\varDelta a_2$ in der Centralen des leuchtenden Punktes liegt (Reusch).

Das Längenverhältniss der II. Brennlinie ist nun

$$36)\qquad \frac{\varDelta a_2}{\varDelta b_2} = \frac{(x_2 - x_1)\,\xi_0 \cos e_1 \sin\delta_1}{(x_0 - \xi_0)\, x_1 \cos e_2 \sin\delta_2}.$$

Wenn δ_1 unendlich klein wird, so wird auch δ_2 gleich Null. Die Gleichung der Inclinationen wird nämlich

$$Lim\left(\frac{\cot\delta_2}{\cot\delta_1}\right) = \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2} = \frac{x_2^2 x_1 (x_0 - \xi_0) \cot e_2}{x_0^2 \xi_0 (x_2 - x_1) \cot e_1},$$

also das Längenverhältniss

$$\frac{\varDelta a_2}{\varDelta b_2} = \frac{x_2^2 \sin e_1}{x_0^2 \sin e_2}.$$

Wenn man voraussetzt, dass das Strahlenbündel auf der Fläche einen kleinen Kreis vom Radius ∂s ausschneidet, so gelten nach 29) folgende Gleichungen:

$$\frac{\sin\delta_1\, \varDelta b_2}{x_0 - \xi_0} = \frac{-\cos e_2\, \partial s}{\xi_0}, \quad \frac{\sin\delta'\, \varDelta b_1}{x_0 - \xi_0} = \frac{\partial s}{x_0},$$
$$\frac{\sin\delta_2\, \varDelta a_2}{x_2 - x_1} = \frac{-\cos e_1\, \partial s}{x_1}, \quad \frac{\sin\delta''\, \varDelta a_1}{x_2 - x_1} = \frac{\partial s}{x_2}.$$

Die genannten Längenverhältnisse lassen sich demnach in folgender fortlaufenden Proportion darstellen:

$$37)\qquad \frac{\varDelta b_2}{\varDelta b_1} = \frac{(x_0 - \xi_0)\, x_0 x_1 x_2 \sin\delta' \sin\delta'' \sin\delta_2 \cos e_2}{(x_0 - \xi_0)\, \xi_0 x_1 x_2 \sin\delta_1 \sin\delta'' \sin\delta_2}.$$
$$\frac{\varDelta a_2}{\varDelta a_1} \qquad \frac{(x_2 - x_1)\, \xi_0 x_0 x_2 \sin\delta_1 \sin\delta' \sin\delta'' \cos e_1}{(x_2 - x_1)\, \xi_0 x_0 x_1 \sin\delta_1 \sin\delta' \sin\delta_2}$$

Wir wollen noch die Grenzwerthe von δ_2 für senkrechte Incidenz untersuchen mit Rücksicht auf die Fälle, wo das einfallende Strahlenbündel homocentrisch, das osculirende Paraboloid entweder ein Rotationsparaboloid oder ein elliptisches ist.

Im ersten Falle ergiebt die Gleichung 34) oder 35)

$$Lim \cot\delta_2 = \infty, \quad \delta_2 = 0^0,$$

d. h. die II. Brennlinie bleibt in der optischen Axe.

Im zweiten Falle, also für den Scheitel eines elliptischen Paraboloids ändern sich die Verhältnisse. Es ist

$$\frac{n}{x_1}-\frac{\cos e_2^2}{x_0 \cos e_1^2}=\frac{1}{\varrho_1 \cos e_1^2}(n \cos e_1-\cos e_2),$$

$$\frac{n}{x_2}-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{\varrho_2}(n \cos e_1-\cos e_2),$$

folglich

$$Lim\,\frac{x_2-x_1}{x_1 x_2}=\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right)$$

und nach 34), wobei ϱ_2 an die Stelle von r zu setzen ist,

$$Lim \cot \delta_2=0, \quad \delta_2=90^0,$$

d. h. die II. Brennlinien stehen auf der optischen Axe senkrecht, also ist nur für diesen Fall das Sturm'sche Theorem zutreffend. Dies Theorem lässt sich noch in anderer Weise begründen.* Wir nehmen an, es sei die brechende Fläche eine gegen die z-Axe symmetrische, in dieser ein leuchtender Punkt, dessen homocentrisches Strahlenbündel die ganze Fläche bestreicht. Die Fläche sei von einer solchen geometrischen Beschaffenheit, dass nach der Brechung irgend eine der Wellenflächen ein elliptisches Paraboloid bilde von der Form

$$f=\frac{mx^2+ny^2}{2}-z=0, \quad m=\frac{1}{r_1}, \quad n=\frac{1}{r_2}.$$

Für einen Punkt $(x, z, 0)$ dieses Wellenflächenparaboloids sind die Hauptkrümmungsradien

$$\varrho_2=r_2\left(1+\frac{2z}{r_1}\right)^{1/2}, \quad \varrho_1=r_1\left(1+\frac{2z}{r_1}\right)^{3/2}.$$

Es ist demnach für einen benachbarten Punkt $(x+\partial x, z+\partial z, 0)$

$$\frac{\partial s}{\partial \varrho_2}=\frac{r_1+2z}{r_2}\sqrt{\frac{r_1}{2z}};$$

folglich wird $\partial \varrho_2=0$ nur für $z=0$ und ∞, d. h. für den Scheitel. Wir finden demnach**

$$\text{38)} \qquad \tan \delta_2=\left(\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_1}\right)\frac{\partial s}{\partial \varrho_2}=\frac{r_2-r_1-2z}{r_2}\sqrt{\frac{r_1}{2z}}.$$

Nun hat $\tan \delta_2$ ein absolutes Minimum für

$$z=\tfrac{1}{2}(r_1-r_2).$$

Demnach ist δ_2 spitz für diesen endlichen Werth von z und nimmt bei wachsendem oder abnehmendem z zu bis $\delta_2=90^0$ bei den Grenzwerthen $z=\infty$ und 0. Im Scheitel (0, 0, 0) ist also $\delta_2=90^0$, d. h. die II. Brennlinie steht senkrecht zum Hauptstrahle. Andererseits ist für die I. Brennlinie

* L. Matthiessen, Ueber die Form der unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündel und über die Kummer'schen Modelle. Sitzungsber. d. math.-phys. Classe der königl. bayer. Akad. d. Wissensch. 1883, I.

** Acta math. [1884] IV, 2, S. 185.

$$tan\,\delta'' = \left(\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho_1}$$

und

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho_1} = \frac{r_2\sqrt{1+\frac{y^2}{r_2^2}}}{3y\sqrt{1+\frac{2z}{r_1}}},$$

d. h. $\delta'' = 90^0$ für alle Punkte $(x, z, 0)$.

In einer etwas eleganteren Form treten die vorstehenden Gleichungen auf, wenn man das Coordinatensystem nach dem Punkte $(x, z, 0)$ verlegt und seine Normale zur ζ-Axe wählt. Das osculirende Paraboloid ist alsdann

39) $$\frac{sin\,\tau^3}{r_1}\xi^2 + \frac{sin\,\tau}{r_2}\eta^2 - 2\zeta = 0,$$

wo τ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente des Punktes $(x, z, 0)$ mit der Symmetrieaxe bildet. Demgemäss ist

$$\frac{2z}{r_1} = cot\,\tau^2, \quad \varrho_1 = \frac{r_1}{sin\,\tau^3}, \quad \varrho_2 = \frac{r_2}{sin\,\tau}.$$

Für den unendlich nahen Punkt $(x+\partial x,\ z+\partial z,\ 0)$ oder $(\partial\xi, \partial\zeta, 0)$ ist

$$\frac{\partial s}{\partial\varrho_2} = \frac{\partial\xi}{\partial\varrho_2} = \frac{r_1}{r_2\,sin\,\tau\,cos\,\tau},$$

folglich $\partial\varrho_2 = 0$ nur für $\tau = 0^0$ oder 90^0 und

40) $$tan\,\delta_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varrho_2} = \frac{r_2\,sin\,\tau^2 - r_1}{r_2\,sin\,\tau\,cos\,\tau}.$$

Ein absolutes Minimum erreicht $tan\,\delta_2$ für $cot\,\tau^2 = (r_1 - r_2) : r_1$ und es wird $\delta_2 = 0$ für $sin\,\tau^2 = r_1 : r_2$.

Für den Nebennormalschnitt ist $\delta'' = 90^0$ wegen der Relation

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho_1} = \frac{\partial\eta}{\partial\varrho_1} = \frac{r_2\,sin\,\tau}{3\,\partial\eta}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der II. Brennlinie mit u und v, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem (x, z), so findet man die Gleichung der Rückkehrkante der Brennfläche im ersten Meridian des Paraboloids aus den Relationen

$$u = x - \varrho_2\,cos\,\tau = (r_1 - r_2)\sqrt{\frac{2z}{r_1}},$$

$$v = z + \varrho_2\,sin\,\tau = z + r_2, \quad u^2 = 2\frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1}(v - r_2).$$

Die Gleichung ist die einer andern Apollonischen Parabel, also können die II. Brennlinien nicht auf den Hauptstrahlen senkrecht stehen.

Bezeichnen wir die Coordinaten der I. Brennlinien mit u_1 und v_1, so findet man die Gleichung der Spuren derselben im ersten Meridian aus den Relationen

$$u_1 = x - \varrho_1 \cos\tau = -2z\sqrt{\frac{2z}{r_1}},$$
$$v_1 = z + \varrho_1 \sin\tau = 3z + r_1, \quad u_1^2 = \frac{8(v_1 - r_1)^3}{27 r_1}.$$

Diese Gleichung ist die der Neil'schen Parabel oder der Evolute des ersten Meridians der Wellenfläche.

Unsere Untersuchungen haben demnach zu dem Resultat geführt, dass die Brennlinien eines unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündels verschiedene und bestimmbare Inclinationen gegen den Hauptstrahl besitzen. Denn was hier speciell von der parabolischen Wellenfläche gilt, muss auch von den Wellenflächen nach der Brechung oder Reflexion an anderen Flächen gelten. Wenn es auch bei der Betrachtung unendlich dünner Strahlenbündel irrelevant erscheint, ob man das Sturm'sche Theorem gelten lassen will oder nicht, so versagt dasselbe doch für die messbar dünnen Strahlenbündel der praktischen Dioptrik. Es wird nicht in Abrede gestellt werden können, dass im Hinblick auf Formel 39) die Gleichung des osculirenden Paraboloids der Wellenfläche ausser den Grössen ξ^2, η^2 und ζ noch andere variable Grössen enthält, welche die Werthe der Inclinationen der Brennlinien beeinflussen.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Ein Satz aus der Eliminationstheorie.

Sind zwei Gleichungen

$$1)\qquad \begin{cases} A \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \\ B \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m = 0 \end{cases}$$

gegeben, und setzt man:

$$a'_i = b_0 a_{i+1} - a_0 b_{i+1}, \quad b'_i = b_m a_i - a_m b_i,$$

so sind:

$$2)\qquad \begin{cases} A' \equiv b_0 A - a_0 B \equiv \sum_{i=0}^{m-1} a'_i x^{m-i-1} = 0, \\ B' \equiv (b_m A - a_m B)\dfrac{1}{x} \equiv \sum_{i=0}^{m-1} b'_i x^{m-i-1} = 0 \end{cases}$$

zwei Gleichungen der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Resultante mit derjenigen der Gleichung 1) identisch ist. Durch dasselbe Verfahren erhält man aus 2) zwei andere Gleichungen $A'' = 0$, $B'' = 0$, und allgemein zwei Gleichungen

$$3)\qquad A^{(\lambda-1)} = 0, \quad B^{(\lambda-1)} = 0;$$

die Ordnung der Gleichungen 3) ist $m - \lambda + 1$ und ihre Resultante ist mit derjenigen der Gleichungen 1) identisch. Es ist ersichtlich, dass die Coefficienten a'_0, b'_0 nur von a_0, a_1, b_0, b_1, a_m, b_m, die Coefficienten a'_{m-1}, b'_{m-1} nur von a_0, b_0, a_m, a_{m-1}, b_m, b_{m-1} abhängig sind; dergleichen sind

a''_0, b''_0 nur von a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, a_m, a_{m-1}, b_m, b_{m-1},
a''_{m-2}, b''_{m-2} nur von a_0, a_1, b_0, b_1, a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, b_m, b_{m-1}, b_{m-2}

und allgemein

$a_0^{(\lambda-1)}$, $b_0^{(\lambda-1)}$ nur von $a_0, \ldots, a_{\lambda-1}$, $b_0, \ldots, b_{\lambda-1}$, $a_m, \ldots, a_{m-\lambda+2}$, $b_m, \ldots, b_{m-\lambda+2}$,

$a_{m-\lambda+1}^{(\lambda-1)}$, $b_{m-\lambda+1}^{(\lambda-1)}$ nur von $a_0, \ldots, a_{\lambda-2}$, $b_0, \ldots, b_{\lambda-2}$, $a_m, \ldots, a_{m-\lambda+1}$, $b_m, \ldots, b_{m-\lambda+1}$

abhängig. Wendet man nun noch einmal unsern Process auf 3) an, setzt man nämlich:

$$a_i^{(\lambda)} = b_0^{(\lambda-1)} a_{i+1}^{(\lambda-1)} - a_0^{(\lambda-1)} b_{i+1}^{(\lambda-1)}, \quad b_i^{(\lambda)} = b_{m-\lambda+1}^{(\lambda-1)} a_i^{(\lambda-1)} - a_{m-\lambda+1}^{(\lambda-1)} b_i^{(\lambda-1)},$$

so ergeben sich zwei Gleichungen der $(m-\lambda)^{\text{ten}}$ Ordnung:

4) $$A^{(\lambda)}=0,\quad B^{(\lambda)}=0,$$

deren Resultante mit derjenigen der Gleichungen 1) identisch ist; und es zeigt sich von selbst, dass die erste dieser Gleichungen nach dem Grössensystem

5) $$a_\lambda,\ a_{\lambda+1},\ \dots,\ a_{m-\lambda+1},\quad b_\lambda,\ b_{\lambda+1},\ \dots,\ b_{m-\lambda+1},$$

die zweite nach dem Grössensystem

6) $$a_{\lambda-1},\ a_\lambda,\ \dots,\ a_{m-\lambda},\quad b_{\lambda-1},\ b_\lambda,\ \dots,\ b_{m-\lambda}$$

linear ist. Also:

Man kann aus zwei gegebenen Gleichungen 1) der m^{ten} Ordnung zwei andere Gleichungen 4) der $(m-\lambda)^{\text{ten}}$ Ordnung erhalten, die dieselbe Resultante als die ursprünglichen Gleichungen besitzen, und deren eine nach dem Grössensystem 5), die andere nach dem Grössensystem 6) linear ist.

Um für die Anwendung dieses Satzes ein Beispiel anzuführen, setzen wir voraus, die Coefficienten $a_\lambda,\ a_{\lambda+1},\ \dots,\ a_{m-\lambda},\ b_\lambda,\ b_{\lambda+1},\ \dots,\ b_{m-\lambda}$ der Gleichungen 1) seien ganze Functionen einer Variabeln y, deren Grad bis auf p steigt. Dann ist, nach einer bekannten Regel, höchstens $2mp$ der Grad der Resultante in y. Erwägen wir aber, dass der Grad der Coefficienten der Gleichungen 4) nur bis auf p steigt, so können wir schliessen, dass der Grad der Resultante in y höchstens $2(m-\lambda)p$ ist.

Mantua, 26. December 1887. J. Vivanti.

X. Ueber die Fourier-Bessel'sche Transcendente.

Dem im 31. Jahrgange dieser Zeitschrift veröffentlichten Aufsatze: „Ueber den functionentheoretischen Zusammenhang zwischen den Lamé'schen, Laplace'schen und Bessel'schen Functionen" fühle ich mich verpflichtet, folgende Bemerkung hinzuzufügen.

Auf S. 28, Gl. 7α), wird die Kugelfunction definirt durch

1) $$\frac{d^2z}{du^2}+\sqrt{e_1-e_3}\,ctg\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u\right)\frac{dz}{du}+(e_1-e_3)\left\{n(n+1)-\frac{\nu^2}{sin^2\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u\right)}\right\}z=0$$

mit dem Integral in Heine's Bezeichnung:

2) $$z=\alpha P_\nu^n\left(cos\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u\right)\right)+\beta Q_\nu^n\left(cos\left(\sqrt{e_1-e_3}\,u\right)\right),$$

wo im Besonderen n die Abkürzung ist für

3) $$n=\frac{h}{\sqrt{e_1-e_3}}-\tfrac{1}{2}.$$

Ich machte nun a. o. O. darauf aufmerksam, dass für

4) $$e_1=e_3=0$$

die Gleichung 1) übergeht in die Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen:

5) $$\frac{d^2z}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dz}{du}+\left\{h^2-\frac{\nu^2}{u^2}\right\}z=0$$

mit dem Integral

$$6)\qquad z = \alpha J_\nu(hu) + \beta K_\nu(hu),$$

übersah jedoch, dass n dadurch unendlich gross wird. Indem ich dies jetzt hervorhebe, will ich nicht unterlassen zu bemerken, dass bei dem von mir gegebenen Grenzübergange das Unendlichwerden von n ein secundäres Moment ist; die Hauptsache bleibt das Verschwinden der Weierstrass'schen e's.

Halten wir dagegen den von Herrn Mehler gegebenen Grenzübergang und setzen wir in 1)

$$\sqrt{e_1 - e_3} = 1$$

und, wie es vorgeschrieben ist,* statt u das Argument $\frac{u}{n}$, so erhalten wir

$$7)\qquad \frac{d^2 z}{d\left(\frac{u}{n}\right)^2} + ctg\left(\frac{u}{n}\right)\frac{dz}{d\left(\frac{u}{n}\right)} + \left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\left(\frac{u}{n}\right)}\right\} z = 0,$$

welche Differentialgleichung für $n = \infty$ in die Gleichung 5) übergeht, wenn dort noch $h = 1$ gemacht wird.

Auf eine Gleichung derselben Form werden wir geführt, wenn wir in 1)

$$8)\qquad \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} = m$$

substituiren. Denn es geht hervor:

$$9)\qquad \frac{d^2 z}{d\left(\frac{u}{m}\right)^2} + ctg\left(\frac{u}{m}\right)\frac{dz}{d\left(\frac{u}{m}\right)} + \left\{n(n+1) - \frac{\nu^2}{\sin^2\left(\frac{u}{m}\right)}\right\} z = 0.$$

Mit dem Verschwinden der e's werden m und n zugleich unendlich gross, und auch 9) geht in 5) über.

Aus dem Vergleichen von 7) und 9) ziehe ich den Schluss: Der von Herrn Mehler zuerst angeregte Gedanke, die Bessel'sche Transcendente durch ein Grenzverfahren aus der Kugelfunction herzuleiten, hat durch meine obengenannte Abhandlung eine Vertiefung erfahren.

Damit ist die kritische Bemerkung a. o. O. auf S. 32 oben, soweit sie sich auf die Bessel'sche Function bezieht, erledigt. Vor Allem kann ich nun der Ansicht des Herrn Schubert**: „Bei den Kugelfunctionen führen zwei verschiedene Grenzbetrachtungen zu denselben Bessel'schen Functionen; man kann entweder den Weg des Herrn Haentzschel oder den von Herrn Mehler und Heine einschlagen“ nicht mehr beipflichten.

---

* Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Aufl. Berlin 1878. Bd. I S. 188.

** Schubert, Ueber die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0$$

für Flächenstücke, die von confocalen Ellipsen und Hyperbeln begrenzt werden. Inaugural-Dissertation der Universität Königsberg. Danzig 1886. S. 33.

Berlin, den 20. November 1887. Dr. E. Haentzschel.

XI. Construction der Fläche zweiter Ordnung aus neun Punkten, von denen acht imaginär sind.

Es sei die Aufgabe gegeben, durch acht imaginäre Punkte, welche als Doppelpunkte von vier elliptischen, auf den reellen Geraden 12, 34, 56, 78 gelegenen Involutionen gegeben sind, und einen reellen Punkt eine Fläche zweiter Ordnung zu legen.

Heben wir zunächst die Hauptzüge aus dem Gang der Construction hervor.

Man legt durch die acht imaginären Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 zwei Regelflächen $\eta_1^{(2)}$ und $\eta_2^{(2)}$ zweiter Ordnung; diejenige dem durch $\eta_1^{(2)}$ und $\eta_2^{(2)}$ bestimmten Flächenbüschel angehörende Fläche $\varphi^{(2)}$, welche den neunten reellen Punkt 9 enthält, ist die gesuchte Fläche.*

Was die Einzelheiten betrifft, so handelt es sich zunächst um die Construction der Regelflächen $\eta_1^{(2)}$ und $\eta_2^{(2)}$, welche durch die acht imaginären Punkte hindurchgehen. Man construire zunächst durch sechs der gegebenen imaginären Punkte, z. B. durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, die Raumcurve dritter Ordnung $r_1^{(3)}$**, lege sodann durch die reelle Verbindungslinie der noch übrigen beiden Punkte 7, 8 und durch einen construirten Punkt P der Raumcurve $r_1^{(3)}$ eine Ebene ε_1, welche $r_1^{(3)}$ in den beiden weiteren Punkten Q und R schneiden möge, und ermittle irgend zwei Punkte X, Y des durch P, Q, R, 7, 8 bestimmten Kegelschnittes $k_1^{(2)}$***. Durch $r_1^{(3)}$ und die beiden von X und Y aus an $r_1^{(3)}$ gezogenen Sehnen lässt sich dann eine Regelfläche zweiter Ordnung $\eta_1^{(2)}$ legen, welche als durch die acht imaginären Punkte gehend angesehen werden muss, da sie die Curven $r_1^{(3)}$ und $k_1^{(2)}$ enthält.

In ähnlicher Weise construire man die durch 3, 4, 5, 6, 7, 8 bestimmte Raumcurve dritter Ordnung $r_2^{(3)}$, eine Ebene ε_2 durch 12 und in ihr den Kegelschnitt $k_2^{(2)}$, welcher durch die drei Schnittpunkte derselben mit $r_2^{(3)}$, sowie durch 1 und 2 hindurchgeht, endlich die Regelfläche $\eta_2^{(2)}$, welche $r_2^{(3)}$ und $k_2^{(2)}$, also die acht imaginären Punkte enthält.

Trifft nun eine beliebig durch den reellen Punkt 9 gelegte Gerade x die Flächen $\eta_1^{(2)}$ und $\eta_2^{(2)}$ in den Punktpaaren A_1B_1, A_2B_2, so ist der dem Punkte 9 conjugirte Punkt 10 in Bezug auf die durch A_1B_1, A_2B_2 bestimmte Involution der zweite Schnittpunkt der Geraden x mit der gesuchten Fläche $\varphi^{(2)}$, und beschreibt x das Strahlenbündel 9, so wird durch den Punkt 10 die Fläche vollständig erzeugt.†

* Reye, Die Geometrie der Lage. II. Abth. II. Aufl. S. 153.

** Siehe die Mittheilung Nr. IV des Verf. im 2. Hefte dies. Jahrg. d. Ztschr.

*** Vergl. des Verf. Inaug.-Diss., Aufg. II bezw. III.

† Reye, a. a. O. S. 160.

Eisenach. Dr. Carl Hossfeld.

XII. Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Schwere für das Jacobi'sche Gleichgewichtsellipsoid.

Clairaut beweist in seiner „Théorie de la figure de la terre"* einen Satz, durch welchen die Veränderlichkeit der Schwere auf einem Rotationsellipsoid, welches die Gleichgewichtsfläche einer homogenen rotirenden Flüssigkeit ist, geometrisch veranschaulicht wird. Im Folgenden soll ein analoger Satz für das dreiaxige Gleichgewichtsellipsoid abgeleitet werden.

Die Oberfläche der mit der Geschwindigkeit ω um die x-Axe rotirenden Flüssigkeit habe die Gleichung

$$1)\qquad F=\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}+\frac{z^2}{r^2}-1=0,$$

wobei $$p<q<r$$

ist. Das Potential der Flüssigkeit für die im Punkte (x, y, z) befindliche Masseneinheit ist

$$2)\qquad W=\tfrac{1}{2}\{Ax^2+(B+\omega^2)y^2+(C+\omega^2)z^2-D\}.$$

Das Ellipsoid selbst soll eine Niveaufläche sein, welche etwa dem Werthe W_0 entspricht; daher müssen die Bedingungsgleichungen

$$3)\qquad Ap^2=(B+\omega^2)q^2=(C+\omega^2)r^2=2W_0+D$$

erfüllt sein.

Die zu den Axen parallelen Componenten der Schwere sind:

$$4)\qquad \begin{aligned} X&=\frac{\partial W_0}{\partial x}=A.x,\\ Y&=\frac{\partial W_0}{\partial y}=(B+\omega^2).y,\\ Z&=\frac{\partial W_0}{\partial z}=(C+\omega^2).z. \end{aligned}$$

Die Schwere S ergiebt sich als Resultante:

$$S^2=X^2+Y^2+Z^2,$$
$$S=\{A^2.x^2+(B+\omega^2)^2y^2+(C+\omega^2)^2.z^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus erhält man für die Schwere an den Polen

$$5)\qquad \begin{aligned} &\text{der Axe} && P=A.p,\\ &\text{des Aequators} && \left\{\begin{aligned} Q&=(B+\omega^2).q,\\ R&=(C+\omega^2).r.\end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Gleichungen 3) in folgende über:

$$6)\qquad P.p=Q.q=R.r.$$

Das ist die bekannte, aus der Vorstellung von Canälen abgeleitete Bedingung.

---

* Seconde partie, chap. I, § XVIII.

Da nun

$$A = \frac{P}{p} = Pp \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$B + \omega^2 = \frac{Q}{q} = Pp \cdot \frac{1}{q^2}$$

$$C + \omega^2 = \frac{R}{r} = Pp \cdot \frac{1}{r^2},$$

so folgt

7) $$S^2 = P^2 p^2 \left\{ \frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4} \right\}.$$

Das vom Mittelpunkte des Ellipsoides auf die Tangentialebene des Punktes (x, y, z) gefällte Perpendikel ist aber

$$s = \left\{ \frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4} \right\}^{-\frac{1}{2}};$$

daher ist

8) $$S = P \cdot \frac{p}{s} = Q \cdot \frac{q}{s} = R \cdot \frac{r}{s}$$

und

$$P : Q : R : S = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r} : \frac{1}{s}.$$

Die Gleichungen der Flächennormale im Punkte (x, y, z) sind bei Einführung eines Parameters l:

$$\xi - x = l \cdot \frac{x}{p^2}, \quad \eta - y = l \cdot \frac{y}{q^2}, \quad \zeta - z = l \cdot \frac{z}{r^2}.$$

Die Entfernung eines Punktes (ξ, η, ζ) der Normalen vom Flächenpunkte (x, y, z) ergiebt sich aus

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = l^2 \cdot \left\{ \frac{x^2}{p^4} + \frac{y^2}{q^4} + \frac{z^2}{r^4} \right\} = \frac{l^2}{s^2}.$$

Für den Schnittpunkt der Normalen mit der

Hauptebene (q, r) ist $\xi = 0$ und $l = -p^2$,
„ (r, p) „ $\eta = 0$ „ $l = -q^2$,
„ (p, q) „ $\zeta = 0$ „ $l = -r^2$.

Die Entfernungen dieser drei Schnittpunkte vom Punkte (x, y, z) sind somit:

9) $$e = \frac{p^2}{s}, \quad f = \frac{q^2}{s}, \quad g = \frac{r^2}{s}.$$

Damit gehen die Gleichungen 8) in folgende über:

10) $$S = P \cdot \frac{e}{p} = Q \cdot \frac{f}{q} = R \cdot \frac{g}{r}.$$

Dieses Resultat lässt sich so aussprechen:

An der Oberfläche eines dreiaxigen Gleichgewichtsellipsoides für eine homogene rotirende Flüssigkeit ändert sich die Schwere proportional jenem Stücke der Normalen, welches durch eine der drei Hauptebenen des Ellipsoides abgeschnitten wird.*

Linz a. D., 18. Februar 1888. Theodor Schmid.

XIII. Berichtigung zu Buka's „Bemerkungen etc.", S. 117 dieses Bandes.

Durch vier unendlich nahe Lagen eines stetig in einer Ebene bewegten ebenen Systems S werden drei unendlich nahe Pole oder Punkte auf der zugehörigen Polbahn bestimmt, und ferner wird durch diese drei unendlich nahen Punkte der Krümmungsmittelpunkt der Polbahn bestimmt. Demnach erfordert die Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Polbahn die Betrachtung von vier unendlich nahen Lagen des Systems S. In der Ableitung der Grübler'schen Construction der Krümmungsmittelpunkte der Polbahn liegt nun die Bedingung versteckt, dass jeder der beiden Endpunkte einer Systemstrecke in vier unendlich nahen Lagen sich auf je einem Kreise befinden. Aus diesem Grunde gilt die Grübler'sche Construction nur für die Polbahn eines Gelenkvierecks; und sie gilt nicht allgemein, wie ich auch nach Grübler's Vorgange in meinem Lehrbuch der Kinematik Art. 50 angenommen habe. In dieser Hinsicht ist die Buka'sche Bemerkung richtig.

Vollkommen richtig ist aber der durch die Bobillier'sche Construction längst bestätigte Satz S. 30 meiner „Kinematik": „Die Bewegung des ebenen Systems S aus einer Lage in zwei unendlich nahe folgende Lagen ist bestimmt durch die Bewegung der als Systemstrecke betrachteten Koppel FL des durch die vier Krümmungsmittelpunkte $FL\Phi\Lambda$ gebildeten Gelenkvierecks."

Die Buka'sche Behauptung, dass dieser Satz hinfällig sei, beruht auf einem Irrthum; denn in diesem Satze kommen nur drei unendlich nahe Lagen in Betracht, und nicht vier, auf welche sich die Buka'sche Folgerung bezieht. Dieser Satz steht auch in keinem Zusammenhang mit dem Krümmungsmittelpunkt der Polbahn; denn durch drei unendlich nahe Systemlagen wird nur ein Element der Polbahn, resp. die Tangente an derselben bestimmt.

Dr. L. Burmester.

XIV. Eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten.

Bezeichnet n eine positive ganze, k eine gerade Zahl, so ist das arithmetische Mittel aus den k^{ten} Potenzen der zu n gehörigen Binomialcoefficienten immer eine ganze Zahl.

---

* Für das Rotationsellipsoid wird $f\ (=g)$ jenes Stück der Normalen, welches durch die Rotationsaxe abgeschnitten wird.

Im einfachsten Falle $k=2$ kennt man die Summe der Binomialcoefficientenquadrate $=(2n)_n$ und kann damit beweisen, dass das Mittel

$$\frac{(2n)_n}{n+1}=\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+2)}{3.4.5\dots(n-1)}$$

eine ganze Zahl ausmacht; bei grösseren k dagegen scheint ein anderes Verfahren nöthig zu werden.

Schlömilch.

XV. Bemerkung über doppelt centrische Vielecke.

Nimmt man die Strecke $m\mu=e$ willkürlich, beschreibt aus m einen Kreis mit dem beliebigen Radius $r>e$ und aus μ einen zweiten Kreis mit dem Radius

$$\varrho=\frac{r^2-e^2}{2r},$$

so giebt es bekanntlich unendlich viel Dreiecke PP_1P_2, welche in den ersten und zugleich um den zweiten Kreis beschrieben sind. Der Punkt P kann hierbei willkürlich auf dem Umkreise gewählt werden, und die Figur schliesst sich von selbst. Unter jenen Dreiecken besitzt nun dasjenige den grössten Umfang, mithin auch die grösste Fläche, dessen Spitze P in den Durchschnitt des Umkreises mit der verlängerten μm fällt; dagegen tritt das Minimum von Umfang und Fläche ein, wenn P der Durchschnitt des Umkreises und der Verlängerung von $m\mu$ ist. Lässt man P den Umkreis durchlaufen, so erhält man drei gleiche Maxima und drei gleiche Minima.

Analog gestaltet sich die Sache beim Viereck, wo

$$\varrho=\frac{r^2-e^2}{\sqrt{2(r^2+e^2)}}$$

zu nehmen ist. Das Viereck $PP_1P_2P_3$ wird nämlich zu einem Maximum, wenn seine Gegenecken P_1 und P_3 in die Durchschnitte des Umkreises mit der beiderseits verlängerten Centrale e fallen; das Minimalviereck ist das Trapez, dessen Parallelseiten normal zu e liegen und dessen Höhe 2ϱ ist. Im Ganzen existiren vier gleiche Maxima und vier gleiche Minima.

Diese Sätze sind ohne Zweifel specielle Fälle zweier allgemeinen Theoreme, die sich auf doppelt centrische Vielecke von ungerader resp. gerader Seitenzahl beziehen; eine Untersuchung hierüber dürfte nicht ohne Interesse sein.

Schlömilch.

XVI. Geometrische Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde.

Der Verfasser bemerkt über den Inhalt dieser Abhandlung:

Es wird darin nachgewiesen, dass eine Drehung der Polarisationsebene in einem homogenen Medium, möge sie nach welchem Gesetze auch immer erfolgen, eine harmonische Relation involvirt. Trägt man sich nämlich vom Ausgangspunkte der Lichtbewegung aus die Geschwindigkeiten der beiden circularpolarisirten Wellen auf ihrer Wellennormale in entgegengesetzten Richtungen auf, so werden durch das Gesetz der Drehung für das betreffende Medium zwei zu dem Anfangspunkte in Bezug auf die beiden Paare von Endpunkten der Geschwindigkeiten harmonisch conjugirte Punkte bestimmt. Der geometrische Ort dieser beiden vierten harmonischen Punkte wird als „Drehungsfläche" definirt. Durch dieselbe ist die Drehung in einem Medium vollkommen bestimmt.

Für das homogene magnetische Feld besteht diese Fläche aus zwei zur Richtung der Kraftlinien senkrechten Ebenen (das Cosinusgesetz Verdet's vorausgesetzt). Wird nun die entsprechende „Surface of wave slowness" gesucht, so ergiebt sich, dass selbe eine Rotationsfläche ist, deren erzeugende Curve die Gleichung hat

$$\varrho^2 \mp \varrho \cdot \frac{2.F(\varphi)}{a} \cos\varphi - F(\varphi) = 0,$$

also ein Paar von Curven darstellt. Es ist a eine constante Strecke, die Function $F(\varphi)$ nur durch die Bedingung bestimmt, dass die Curve rings um den Anfangspunkt geschlossen sein und symmetrisch zur Abscissenaxe liegen muss. Es werden die möglichen Fälle discutirt, doch lässt sich keine bestimmte Entscheidung treffen, weil das zweite für das magnetische Feld von Cornu aufgestellte Gesetz

$$v' + v'' = 2v$$

auf eine Curve mit unendlichen Aesten führt. Fasst man dieses Gesetz nur als eine Annäherung auf, so erhält man, wenn man es durch

$$v'^2 + v''^2 = 2v^2$$

ersetzt (Theorie von v. Lang), eine brauchbare Curve, ebenso durch

$$v'v'' = v^2,$$

welcher Annahme zwei gegen einander verschobene Rotationsellipsoide von sehr kleiner Excentricität entsprechen.

Wien. MAX STERNBERG.

(Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1886, XVI.)

XII.

Ueber gleichzeitige Bewegungen eines ebenen Systems.

Von

Prof. Ferdinand Wittenbauer

in Graz.

Hierzu Taf. III Fig. 1—8.

Der Bewegungszustand eines ebenen Systems ist in jedem Augenblicke durch Angabe des momentanen Drehpunktes O und der Winkelgeschwindigkeit ω für das nächste Zeitelement vollkommen bestimmt.

Um diesen Bewegungszustand auch für das zweite der darauffolgenden Zeitelemente zu erkennen, ist unter der Voraussetzung, dass in der Intensität der Drehung selbst keine Aenderung erfolgt, die Angabe des Wendepoles J hinreichend. Man versteht unter demselben bekanntlich den andern Endpunkt des durch O gehenden Durchmessers des Wendekreises und unter letzterem den geometrischen Ort aller Systempunkte, welche in dem betreffenden Augenblick Wendepunkte ihrer Bahnen passiren.*

Besitzt ein ebenes System eine beliebige Anzahl gleichzeitiger Bewegungen mit den momentanen Drehpunkten $O_1, O_2, \ldots, O_n$ und den Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, so ist der resultirende Bewegungszustand für das nächste Zeitelement bestimmt durch Angabe des resultirenden Drehpunktes O und der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ω, von denen letztere durch die Beziehung $\omega = \Sigma\omega_n$ und ersterer als Schwerpunkt der Punkte $O_1, O_2, \ldots, O_n$ zu finden ist, wenn in denselben die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten als Gewichte angebracht werden. Nach der Ausdrucksweise des baryoentrischen Calculs wird also zu schreiben sein

$$\omega . O = \omega_1 . O_1 + \omega_2 . O_2 + \cdots + \omega_n . O_n$$

oder abgekürzt

$$\omega . O = \Sigma\, \omega_n . O_n .$$

Handelt es sich jedoch um Erkenntniss des resultirenden Bewegungszustandes des Systems für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente, wie dies z. B. für die Angabe der Krümmungsverhältnisse nothwendig ist, so ent-

* Vergl.: Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, I; Burmester, Lehrbuch der Kinematik, I; Mannheim, Cours de Géométrie descriptive u. A.

steht die Aufgabe, aus den Wendepolen $J_1, J_2, \ldots, J_n$ der gleichzeitigen Bewegungen auf den Wendepol J der resultirenden Bewegung zu schliessen, ein Problem, mit dessen Lösung und deren Anwendung sich die folgende Untersuchung beschäftigen soll.

Hierbei wurde durchwegs die für diesen Zweck besonders erspriesslich scheinende Handhabe des barycentrischen Calculs, benützt.

Als vereinfachende Voraussetzung wurde angenommen, dass die Intensitäten der Drehungen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sich im ersten Zeitelemente nicht ändern.

1. Um zunächst den resultirenden Wendepol J zweier gleichzeitigen Bewegungen eines ebenen Systems zu finden, welche durch Angabe der momentanen Drehpunkte O_1, O_2, der Wendepole J_1, J_2 und der Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 bestimmt sind (Fig. 1), beachte man, dass die resultirende Bewegung im ersten Zeitelement eine Drehung um den resultirenden Drehpunkt O mit der resultirenden Winkelgeschwindigkeit ω ist, wofür gilt

$$\omega . O = \omega_1 . O_1 + \omega_2 . O_2 .$$

Durch dieselbe gelangt O_1 nach O'_1, O_2 nach O'_2. Ueberdies tritt gleichzeitig ein Wechsel des Drehpunktes in beiden Bewegungen ein, so zwar, dass am Ende des ersten Zeitelementes O''_1 und O''_2 die Drehpunkte der gleichzeitigen Bewegungen sein werden. Hierbei ist

$$O'_1 O''_1 = d_1 \omega_1 . \partial t, \quad O'_2 O''_2 = d_2 \omega_2 . \partial t,$$

wenn ∂t das Zeitelement und $d_1 = O_1 J_1$, $d_2 = O_2 J_2$ die Durchmesser der beiden Wendekreise, kurz gesagt, die Wendedurchmesser der gleichzeitigen Bewegungen sind. Ueberdies ist

$$\angle J'_1 O'_1 O''_1 = 90^0, \quad \angle J'_2 O'_2 O''_2 = 90^0.$$

Der resultirende Drehpunkt O'' für das zweite Zeitelement ist demnach durch den Ausdruck gegeben

$$\omega . O'' = \omega_1 . O''_1 + \omega_2 . O''_2 .$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_1 um O''_1 kann nun ersetzt werden durch die gleiche Winkelgeschwindigkeit ω_1 um O_1 und durch die elementaren Translationsgeschwindigkeiten

$$\begin{array}{lll} \omega_1 . O_1 O'_1 & \text{in der Richtung} & O_1 O \text{ und} \\ \omega_1 . O'_1 O''_1 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & O_1 J_1; \end{array}$$

ebenso kann die Winkelgeschwindigkeit ω_2 um O''_2 ersetzt werden durch die elementaren Translationsgeschwindigkeiten

$$\begin{array}{lll} \omega_2 . O_2 O'_2 & \text{in der Richtung} & O_2 O \text{ und} \\ \omega_2 . O'_2 O''_2 & \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & O_2 J_2 . \end{array}$$

Die Translationsgeschwindigkeiten $\omega_1 . O_1 O'_1$ und $\omega_2 . O_2 O'_2$ tilgen sich, denn sie sind einander gleich und entgegengesetzt, und es bleiben die elementaren Translationsgeschwindigkeiten

$$\omega_1 . O'_1 O''_1 = d_1 \omega_1^2 . \partial t, \quad \omega_2 . O'_2 O''_2 = d_2 \omega_2^2 . \partial t$$

in den Richtungen der beiden Wendedurchmesser. Dieselben sind identisch mit der elementaren Translationsgeschwindigkeit

$$\omega . OO' = d\omega^2 . \partial t,$$

d. h. letztere ist die geometrische Summe der ersteren, oder es ist nach Division durch den gemeinsamen Factor ∂t

1) $$d\omega^2 = \overline{d_1 \omega_1^2} + \overline{d_2 \omega_2^2}.$$

Diese Untersuchung lässt sich sofort auf n gleichzeitige Bewegungen des Systems ausdehnen und liefert das Resultat

2) $$d\omega^2 = \Sigma \overline{d_n \omega_n^2}.$$

Bezeichnet man das Product des Wendedurchmessers in das Quadrat der zugehörigen Winkelgeschwindigkeit als reducirten Wendedurchmesser und bemerkt, dass durch diese Reduction die Richtung OJ des Wendedurchmessers nicht geändert wird, so gilt nach Obigem der Satz:

Der reducirte Wendedurchmesser der resultirenden Bewegung ist die geometrische Summe der reducirten Wendedurchmesser der gleichzeitigen Bewegungen des Systems.

Man kann demnach die reducirten Wendedurchmesser genau so behandeln wie die gleichzeitigen Translationsgeschwindigkeiten oder Beschleunigungen eines ebenen Systems; im Grunde genommen sind sie auch nur ein Maass der letzteren.

2. Die Ableitung des obigen Satzes lässt sich in der That merklich vereinfachen, wenn man die Theorie des Beschleunigungscentrums zu Hilfe nimmt. Für den hier vorausgesetzten Fall nämlich, dass die Winkelgeschwindigkeiten im ersten Zeitelemente keinen Veränderungen ausgesetzt sind, ist der Wendepol das Beschleunigungscentrum der betreffenden Bewegung; der resultirende Wendepol darf also keinerlei Beschleunigung erleiden. Dieser Wendepol besitzt nun die Centripetalbeschleunigung $-d\omega^2$ nach dem resultirenden Drehpunkt O und die Translationsbeschleunigungen $d_1 \omega_1^2$ bez. $d_2 \omega_2^2$ in Richtung der Wendedurchmesser der gleichzeitigen Bewegungen; diese drei Beschleunigungen werden sich tilgen, wenn sie die Gleichung 1) befriedigen.

3. Die resultirende von n gleichzeitigen Bewegungen eines ebenen Systems wird zwei Zeitelemente hindurch um denselben Drehpunkt erfolgen, d. h. in eine eigentliche Rotation übergehen, wenn der resultirenee Wendedurchmesser verschwindet, d. h. wenn

$$\Sigma \overline{d_n \omega_n^2} = 0$$

wird, in welchem Falle sich das Polygon der reducirten Wendedurchmesser schliesst.

Hält man diese Definition der Rotation fest, so folgt im Besondern: Besitzt ein System zwei gleichzeitige Bewegungen mit verschiedenen Drehpunkten und entgegengesetzt gerichteten Wendedurchmessern und verhalten sich letztere verkehrt wie die Quadrate der zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten, so ist die resultirende Bewegung des Systems eine Rotation.

Umgekehrt lässt sich jede Rotation des Systems in zwei allgemeine Bewegungen desselben zerlegen, von denen die eine beliebig angenommen werden kann. (Vergl. Art. 8.)

4. Die resultirende von n gleichzeitigen Bewegungen des Systems geht im Allgemeinen in eine Translation über, wenn

$$\Sigma \omega_n = 0.$$

In diesem Falle liegen sowohl O wie J in unendlicher Entfernung.

Da nach Art. 2 die reducirten Wendedurchmesser die Translationsbeschleunigungen der gleichzeitigen Bewegungen darstellen, so erhält man hier in der Schlusslinie des Polygons der reducirten Wendedurchmesser die Translationsbeschleunigung Γ des Systems der Grösse und Richtung nach.

Ist diese Schlusslinie zur Richtung des unendlich fernen Punktes O parallel, so ändert die Translation des Systems in den beiden aufeinanderfolgenden Zeitelementen nur ihre Richtung.

Steht hingegen die Schlusslinie senkrecht auf der Richtung des unendlich fernen Punktes O, so besitzt die Translation des Systems in beiden Zeitelementen dieselbe Richtung und ändert höchstens die Grösse ihrer Geschwindigkeit; alle Punkte des Systems durchschreiten dann gleichzeitig Wendepunkte ihrer Bahnen; die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten O und J stehen aufeinander senkrecht.

Aendert die Translationsgeschwindigkeit des Systems weder Grösse, noch Richtung, so wird $\Gamma = 0$ und das Polygon der reducirten Wendedurchmesser ist geschlossen.

Im Besondern kann gesagt werden: Besitzt ein System zwei gleichzeitige Bewegungen mit verschiedenen Drehpunkten, gleichgrossen und entgegengesetzt gerichteten Winkelgeschwindigkeiten und sind die Projectionen der Wendedurchmesser auf die Verbindungslinie der Drehpunkte ebenfalls gleichgross und entgegengesetzt gerichtet oder, was dasselbe ist, steht die Verbindungslinie der Halbirungspunkte von $O_1 O_2$ und $J_1 J_2$ auf $O_1 O_2$ senkrecht, so ist die resultirende Bewegung des Systems eine durch beide Zeitelemente gleichgerichtete Translation.

Sind überdies die Wendedurchmesser gleich und entgegengesetzt gerichtet, so ändert sich die Geschwindigkeit der resultirenden Translation auch der Grösse nach nicht.

5. Die Gleichung 2) besitzt auch dann volle Giltigkeit, wenn beliebig viele der n gleichzeitigen Bewegungen Translationen sind. Nur treten bei letzteren an die Stelle der reducirten Wendedurchmesser die Translationsbeschleunigungen.

Besitzt das System z. B. eine allgemeine durch $O_1 J_1 \omega_1$ gegebene Bewegung (Fig. 2) und eine durch V und Γ gekennzeichnete Translation, so liefert die geometrische Summe von $O_1 J_1 = d_1$ und $J_1 C = \frac{\Gamma}{\omega^2}$ den Wendedurchmesser $O_1 C = d$ der resultirenden Bewegung. Den Drehpunkt O der letzteren findet man durch die Bemerkung, dass

$$O_1 O = \frac{V}{\omega} \text{ und } O_1 O \perp V$$

ist. Aendert die Translationsgeschwindigkeit V weder Richtung, noch Grösse in beiden Zeitelementen und besteht sie gleichzeitig mit einer allgemeinen Bewegung des Systems, so bringt sie nur eine Parallelverschiebung des Wendekreises der letzteren hervor.

Umgekehrt kann jede Translation des Systems in zwei allgemeine gleichzeitige Bewegungen von gleichen und entgegengesetzten Winkelgeschwindigkeiten zerlegt werden. Bezeichnet Γ die Beschleunigung der zu zerlegenden Translation und ω die gewählte Winkelgeschwindigkeit, so erübrigt nur, die Strecke $\frac{\Gamma}{\omega^2}$ in zwei beliebige geometrische Summanden zu zerlegen; dieselben sind bereits die Wendedurchmesser der gleichzeitigen Bewegungen; die Drehpunkte O_1, O_2 entsprechen hinsichtlich ihrer Lage und Entfernung wieder der obigen Bemerkung.

Im Besondern kann jede Translation des Systems für zwei Zeitelemente in eine Rotation um einen beliebigen Drehpunkt mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit ω und in eine allgemeine Bewegung von gleicher, aber entgegengesetzter Winkelgeschwindigkeit und einem Wendedurchmesser $d = \frac{\Gamma}{\omega^2}$ zerlegt werden.

6. Wenn die gleichzeitigen Bewegungen eines Systems zwar der Bedingung $\Sigma \omega_n = 0$ entsprechen, der resultirende Drehpunkt jedoch nicht unendlich fern liegt, bleibt das System im Stillstande. Als Kennzeichen für den Stillstand des Systems durch zwei Zeitelemente dient, dass sich das Polygon der reducirten Wendedurchmesser schliesst und jeder der n gegebenen Drehpunkte mit dem resultirenden der $n-1$ übrigen zusammenfällt.

So tilgen sich z. B. zwei gleichzeitige Bewegungen durch zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente, wenn sie denselben Drehpunkt, sowie gleiche und entgegengesetzte Winkelgeschwindigkeiten und Wendedurchmesser besitzen.

7. Der Gleichung 1) lässt sich ein bemerkenswerther barycentrischer Ausdruck geben. Nennt man nämlich p_1, p_2, p, q_1, q_2, q die Abstände der Punkte O_1, O_2, O, J_1, J_2, J von einer beliebigen Geraden der Ebene, so ist

$$p\,\omega = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2$$

und mit Benützung der Gleichung 1)

$$(q-p)\,\omega^2 = (q_1 - p_1)\,\omega_1^2 + (q_2 - p_2)\,\omega_2^2,$$

woraus folgt

$$q\,\omega^2 = q_1 \omega_1^2 + q_2 \omega_2^2 + p_1 \omega_1 \omega_2 + p_2 \omega_1 \omega_2 .$$

Da diese Relation für jede Gerade der Ebene gilt, so kann geschrieben werden

$$\omega^2 . J = \omega_1^2 . J_1 + \omega_2^2 . J_2 + \omega_1 \omega_2 . O_1 + \omega_1 \omega_2 . O_2 . \tag{3}$$

In analoger Weise findet man den barycentrischen Ausdruck des resultirenden Wendepoles von drei gleichzeitigen Bewegungen

$$\begin{aligned} 4)\qquad \omega^2 . J = \omega_1^2 . J_1 + \omega_2^2 . J_2 + \omega_3^2 . J_3 \\ + \omega_1(\omega_2 + \omega_3) . O_1 + \omega_2(\omega_3 + \omega_1) . O_2 + \omega_3(\omega_1 + \omega_2) . O_3 \end{aligned}$$

und den abgekürzten barycentrischen Ausdruck des resultirenden Wendepoles von n gleichzeitigen Bewegungen:

$$\omega^2 . J = \Sigma[\omega_n^2 . J_n + \omega_n(\omega - \omega_n) . O_n],$$

worin $\omega = \Sigma \omega_n$ die resultirende Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

Wir entnehmen hieraus den Satz:

Der resultirende Wendepol von n gleichzeitigen Bewegungen ist der Schwerpunkt aller Wendepole J_n und aller Drehpunkte O_n, wenn in ersteren ω_n^2, in letzteren $\omega_n(\omega - \omega_n)$ als Gewichte angebracht werden.*

8. Die lineare Construction des resultirenden Wendepoles J aus den Punkten O_1, O_2, J_1, J_2 zweier gleichzeitigen Bewegungen und aus dem resultirenden Drehpunkt O ist in Fig. 3 ersichtlich gemacht. Zieht man nämlich

$$OK_1 \| O_1 J_1, \quad OK_2 \| O_2 J_2, \quad K_1 L_1 \| K_2 L_2 \| O_1 O_2,$$

so liefert der Schnitt der Linien $K_1 K_2$ und $L_1 L_2$ den Punkt J. Denn beachtet man, dass

$$\omega . O = \omega_1 . O_1 + \omega_2 . O_2,$$

so geben obige Constructionen

$$\omega . K_1 = \omega_1 . J_1 + \omega_2 . O_2, \quad \omega . K_2 = \omega_1 . O_1 + \omega_2 . J_2,$$
$$\omega . L_1 = \omega_1 . J_1 + \omega_2 . O_1, \quad \omega . L_2 = \omega_1 . O_2 + \omega_2 . J_2,$$

woraus mit Berücksichtigung des Ausdruckes 3)

$$\omega^2 . J = \omega_1 . K_1 + \omega_2 . K_2 = \omega_1 . L_1 + \omega_2 . L_2 .$$

Ist eine der beiden Bewegungen, z. B. jene um O_2, eine eigentliche Rotation, so wird $d_2 = 0$ und die Construction vereinfacht sich, wie aus Fig. 4 ersichtlich ist. Man zieht $OK_1 \| O_1 J_1$, $K_1 L_1 \| O_1 O_2$, so liefert der Schnitt der Linien OK_1 und $O_2 L_1$ den Punkt J.

Hieraus erhellt auch sofort, wie man eine allgemeine Bewegung des Systems oder eine Rotation desselben constructiv in zwei gleichzeitige Bewegungen zerlegt, wenn eine derselben gegeben ist. Soll z. B. in Fig. 3 die durch $O_1 J_1 \omega_1$ gegebene Bewegung in zwei andere zerlegt werden, von denen die eine durch $O_2 J'_2$ und $-\omega_2$ gegeben ist, so bringe man die der letzteren entgegengesetzte Bewegung $O_2 J_2 \omega_2$ an (Art. 6) und suche die resultirende aus ihr und der gegebenen Bewegung $O_1 J_1 \omega_1$; diese resultirende Bewegung $OJ\omega$ ist dann die gesuchte gleichzeitige Bewegung.

Ebenso hat man vorzugehen, wenn eine Rotation $O_2 \omega_2$ (Fig. 4) in zwei Bewegungen zerlegt werden soll, von denen die eine durch $O_1 J'_1$ und $-\omega_1$ gegeben ist.

---

* Sitzungsbericht der kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien, 1. Juli 1886.

9. Die Lage des resultirenden Wendepoles J zweier gleichzeitigen Bewegungen, welche durch die Punkte $O_1 J_1$, $O_2 J_2$ gekennzeichnet sind, hängt wesentlich von der Grösse des Verhältnisses $\omega_1 : \omega_2$ ab. Ertheilt man demselben alle möglichen Werthe, so füllen die resultirenden Wendepole J eine Parabel, welche durch J_1 und J_2 geht und deren Tangenten in diesen Punkten sich im Halbirungspunkte O_m der Strecke $O_1 O_2$ schneiden.*

Wählt man nämlich $J_1 J_2 O_m$ als Fundamentaldreieck und setzt $\omega_1 : \omega_2 = x$, so übergeht wegen

$$2 . O_m = O_1 + O_2$$

der barycentrische Ausdruck 3) in

$$J \equiv x^2 . J_1 + J_2 + 2x . O_m .$$

Dieser Ausdruck gehört einer Parabel an, welche die Fundamentalseiten $J_1 O_m$, $J_2 O_m$ in den Fundamentalpunkten J_1, J_2 berührt.**

Wird im Besondern die Strecke $O_1 O_2$ durch die Gerade $J_1 J_2$ halbirt, so liegen die resultirenden Wendepole J für alle Werthe des Verhältnisses $\omega_1 : \omega_2$ auf dieser Geraden.

Bezeichnet man mit G den Punkt (Fig. 5), welcher dem Ausdrucke

$$G \equiv x^2 . J_1 + J_2$$

entspricht, so wird

$$J \equiv (1 + x^2) . G + 2x . O_m .$$

Kehrt man die Richtung der einen der beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 um, so geht x über in $-x$ und J in

$$J' \equiv (1 + x^2) . G - 2x . O_m .$$

Die Wendepole JJ', welche den Verhältnissen $\pm \frac{\omega_1}{\omega_2}$ zugehören, liegen mit O_m auf einer Geraden und theilen die Strecke $O_m G$ harmonisch. Für $x = 1$ fällt J' in unendliche Entfernung; der unendlich ferne Punkt der Parabel ist der Wendepol der Translation des Systems. (Vergl. Art. 4.)

10. Besitzt das System drei gleichzeitige Bewegungen, welche durch die Punkte $O_1 J_1$, $O_2 J_2$, $O_3 J_3$ gekennzeichnet sind, so kann jeder Punkt der Ebene zum Wendepol der resultirenden Bewegung werden. Jedem derselben entspricht ein bestimmtes Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$.

Um dieses Verhältniss derart zu bestimmen, damit ein bestimmter Punkt der Ebene zum Wendepol der resultirenden Bewegung werde, wähle man $O_1 O_2 O_3$ als Fundamentaldreieck; in Bezug auf dasselbe sei

$$J_1 = a_1 . O_1 + b_1 . O_2 + c_1 . O_3 ,$$
$$J_2 = a_2 . O_1 + b_2 . O_2 + c_2 . O_3 ,$$
$$J_3 = a_3 . O_1 + b_3 . O_2 + c_3 . O_3 ,$$

worin

$$a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3 = 1 .$$

Der gegebene Wendepol habe den Ausdruck

* Sitzungsbericht der kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien, 1. Juli 1886.

** Vergl. Möbius, Ges. Werke, I. Bd. S. 84 und 338.

$$J = a.O_1 + b.O_2 + c.O_3,$$

worin ebenfalls

$$a + b + c = 1.$$

Setzt man nun

$$\frac{\omega_1}{\omega} = x, \quad \frac{\omega_2}{\omega} = y, \quad \frac{\omega_3}{\omega} = z,$$
$$x + y + z = 1,$$

so geht der barycentrische Ausdruck 4) über in

$$J = x^2.J_1 + y^2.J_2 + z^2.J_3 + x(y+z).O_1 + y(z+x).O_2 + z(x+y).O_3$$

oder mit Benützung der Ausdrücke für J_1, J_2, J_3

$$J = [a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + x(y+z)].O_1 + [b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + y(z+x)].O_2 \\ + [c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + z(x+y)].O_3,$$

woraus durch Vergleich mit dem gegebenen Ausdruck von J hervorgeht

$$\begin{aligned} (a_1-1)x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 &= a - x, \\ b_1x^2 + (b_2-1)y^2 + b_3z^2 &= b - y, \\ c_1x^2 + c_2y^2 + (c_3-1)z^2 &= c - z, \end{aligned}$$

welche Gleichungen die Bestimmung von x, y, z und damit des Verhältnisses $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3$ gestatten.

11. Die resultirende aus drei gleichzeitigen Bewegungen eines Systems wird in eine Rotation ausarten, wenn die Punkte

$$J = a.O_1 + b.O_2 + c.O_3, \quad O = x.O_1 + y.O_2 + z.O_3$$

zusammenfallen; dies ist der Fall für

$$a = x, \quad b = y, \quad c = z,$$

wodurch die Schlussgleichungen des vorigen Artikels übergehen in

$$\begin{aligned} (a_1-1)x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 &= 0, \\ b_1x^2 + (b_2-1)y^2 + b_3z^2 &= 0, \\ c_1x^2 + c_2y^2 + (c_3-1)z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\frac{\omega_1}{\omega} = x, \quad \frac{\omega_2}{\omega} = y, \quad \frac{\omega_3}{\omega} = z$$

findet man hieraus das gesuchte Verhältniss jener Winkelgeschwindigkeiten, welche eine Rotation des Systems erzeugen

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \alpha : \beta : \gamma$$

und den Mittelpunkt der Rotation

$$O = J \equiv \alpha.O_1 + \beta.O_2 + \gamma.O_3,$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (1-b_2)(1-c_3) - b_3c_2, \\ \beta^2 &= (1-c_3)(1-a_1) - c_1a_3, \\ \gamma^2 &= (1-a_1)(1-b_2) - a_2b_1. \end{aligned}$$

Dem Doppelzeichen von α, β, γ entsprechend giebt es also vier Punkte des Systems, welche zu Mittelpunkten der aus drei gleichzeitigen Bewegungen resultirenden Rotation desselben werden können. Je zwei dieser vier Punkte liegen mit einem der drei gegebenen Drehpunkte O_1, O_2, O_3 auf derselben Geraden und ihre Strecke wird durch denselben und durch den Schnitt mit der Verbindungslinie der beiden anderen gegebenen Drehpunkte harmonisch getheilt.

12. Folgendes Beispiel möge die Anwendung des Vorgetragenen zeigen. Ein Kreis rolle gleichzeitig auf drei gegebenen Geraden (Fig. 6), von denen je zwei die Bewegung des Kreises gegen die dritte mitmachen. Die Winkelgeschwindigkeiten der drei Bewegungen seien ω_1, ω_2, ω_3. Wählt man vorerst die Schnittpunkte A, B, C der drei Geraden als Fundamentalpunkte und seien a, b, c die Längen der Fundamentalseiten, so sind die barycentrischen Ausdrücke für den Mittelpunkt M des Kreises und die drei Berührungspunkte O_1, O_2, O_3 desselben mit den Geraden

$$\delta.M = a.A + b.B + c.C,$$

$$2a.O_1 = \gamma.B + \beta.C, \quad 2b.O_2 = \alpha.C + \gamma.A, \quad 2c.O_3 = \beta.A + \alpha.B,$$

worin

$$\alpha = -a + b + c, \quad \beta = a - b + c,$$
$$\gamma = a + b - c, \quad \delta = a + b + c$$

bezeichnen. Geht man sodann auf das Fundamentaldreieck $O_1 O_2 O_3$ über, so wird

$$\delta.M = a.O_1 + b.O_2 + c.O_3.$$

Die Wendepole J_1, J_2, J_3 der drei gleichzeitigen Bewegungen fallen mit M zusammen, der Ausdruck 4) für den resultirenden Wendepol wird demnach

$$J \equiv (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2).M + \omega_1(\omega_2 + \omega_3).O_1 + \omega_2(\omega_3 + \omega_1).O_2 + \omega_3(\omega_1 + \omega_2).O_3$$

oder mit Benützung des obigen Ausdruckes für M

$$J \equiv [\delta\omega_1(\omega_2 + \omega_3) + a\varepsilon].O_1 + [\delta\omega_2(\omega_3 + \omega_1) + b\varepsilon].O_2 + [\delta\omega_3(\omega_1 + \omega_2) + c\varepsilon].O_3,$$

worin $\varepsilon = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ bedeutet. Ausserdem ist

$$O \equiv \omega_1.O_1 + \omega_2.O_2 + \omega_3.O_3$$

der resultirende Drehpunkt.

Sind die drei Winkelgeschwindigkeiten gleich, so wird

$$J \equiv (2\delta + 3a).O_1 + (2\delta + 3b).O_2 + (2\delta + 3c).O_3 \equiv 2.O + M,$$
$$O \equiv O_1 + O_2 + O_3.$$

Soll die resultirende Bewegung in eine Rotation des Kreises ausarten, so müssen die Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten in demselben Verhältnisse stehen wie die Fundamentalseiten abc, wie aus vorigem Artikel folgt.

13. Die folgenden Untersuchungen sollen sich mit den Krümmungsverhältnissen des ebenen Systems, welches mehrere gleichzeitige Bewegungen besitzt, beschäftigen. Bekanntlich spielt der Wendekreis eine hervorragende Rolle bei der Construction der Krümmungsmittelpunkte der Bahnen, die von den Punkten des Systems beschrieben werden.

Der Normalstrahl OM eines Systempunktes M trägt den Krümmungsmittelpunkt K der von M in den beiden aufeinander folgenden Zeitelementen beschriebenen Bahn und den Schnitt W mit dem Wendekreise; bezeichnet man

$$OM = R, \quad KM = P, \quad OW = \Delta,$$

so findet die Beziehung statt

$$5) \qquad R^2 = P(R - \Delta).$$

Hierbei werden P und Δ positiv zu nehmen sein, wenn die Richtungen von KM und OW mit jener von OM übereinstimmen. Der Krümmungsmittelpunkt besitzt demnach den barycentrischen Ausdruck

$$6) \qquad \frac{R^2}{P} \cdot K = R.O - \Delta.M.$$

Ist k der einem zweiten Systempunkt m zugehörige Krümmungsmittelpunkt und sind r, ϱ, δ analoge Bezeichnungen zu R, P, Δ, so gilt

$$\frac{r^2}{\varrho} \cdot k = r.O - \delta.m.$$

Hieraus folgt für den Schnitt S der Geraden Mm und Kk (Fig. 7) der Ausdruck

$$S \equiv r\Delta.M - R\delta.m.$$

Die Gerade OS ist die Collineationsaxe der auf den Normalstrahlen OM und Om gelagerten, in quadratischer Verwandtschaft stehenden Punktreihen MK und mk. Construirt man $\angle SOM = mOT'$, so ist OT' die Poltangente der Bewegung.* Der Schnitt T dieser Poltangente mit der Geraden Mm besitzt den Ausdruck

$$7) \qquad T \equiv R\Delta.m - r\delta.M,$$

wie eine einfache Betrachtung lehrt.

14. Wählt man den Drehpunkt O des Systems als Schnitt zweier zueinander senkrechten Geraden OX, OY (Fig 8), aus welchen der Wendekreis die Sehnen ξ, η herausschneidet, und bezeichnen X, Y, x, y die orthogonalen Projectionen von OM und Om auf diese Geraden, so gilt für jede Lage derselben

$$R\Delta = X\xi + Y\eta, \quad r\delta = x\xi + y\eta.$$

Wird speciell $OY \parallel Mm$ angenommen, so hat man wegen

$$X - x = 0, \quad Y - y = \overline{Mm} = l$$

$$R\Delta - r\delta = l\eta.$$

Beziehen sich diese Bezeichnungen auf die resultirende von n gleichzeitigen Bewegungen, von denen jede einzelne durch $R_n\, \Delta_n\, r_n\, \delta_n\, \omega_n\, \eta_n$ gegeben ist, so wird zunächst mit Berücksichtigung der Gleichung 2)

$$\eta\omega^2 = \Sigma\overline{\eta_n\omega_n^2}$$

und durch Verbindung mit obiger Gleichung

$$8) \qquad (R\Delta - r\delta)\omega^2 = \Sigma(R_n\Delta_n - r_n\delta_n)\omega_n^2.$$

Bezeichnet ferner α den Winkel der Poltangente mit der Geraden Mm, so ist

* Aronhold, Grundzüge der kinemat. Geometrie.

$$\xi = \eta . cotang\, \alpha$$

und da die Gleichung 2) auch die Beziehung

$$\xi \omega^2 = \Sigma \overline{\xi_n \omega_n^2}$$

liefert, so erhält man

9) $$(R \Delta - r \delta) \omega^2 \, cotang\, \alpha = \Sigma (R_n \Delta_n - r_n \delta_n) \omega_n^2 \, cotang\, \alpha_n .$$

15. Um die Fruchtbarkeit der Beziehungen 8) und 9) zu zeigen, setzen wir zunächst

10) $$(R_n \Delta_n - r_n \delta_n) \omega_n^2 = p_n ,$$

wodurch sie übergehen in

$$p = \Sigma p_n , \quad p \, cotang\, \alpha = \Sigma p_n \, cotang\, \alpha_n .$$

Wir benützen ferner folgenden leicht zu beweisenden Hilfssatz:

Bewegen sich n mit den Gewichten $p_1 \dots p_n$ behaftete Punkte in einer Ebene derart, dass sie stets in einer parallel zu sich fortrückenden Geraden verbleiben, jeder derselben aber eine beliebige, gegen die erstgenannte unter dem Winkel α_n geneigte Gerade beschreibt, so bewegt sich der Schwerpunkt dieser Punkte gleichfalls in einer Geraden, für deren Neigung α zur fortrückenden Geraden obige Beziehung besteht.

Hieraus entnehmen wir folgende Construction. Es seien die Poltangenten von n gleichzeitigen Bewegungen bekannt; ihre Schnittpunkte mit zwei zur Verbindungslinie Mm parallelen Geraden hiessen $T_1 \dots T_n$, $t_1 \dots t_n$; in diesen bringen wir die Gewichte $p_1 \dots p_n$ an und suchen die Schwerpunkte Π und π, so dass

$$p . \Pi = \Sigma p_n . T_n , \quad p . \pi = \Sigma p_n . t_n .$$

Dann ist die Poltangente der resultirenden Bewegung der Geraden $\Pi\pi$ parallel und geht überdies durch den resultirenden Drehpunkt O, für welchen der Ausdruck gilt

$$\omega . O = \Sigma \omega_n . O_n .$$

16. Die soeben angegebene Construction gestattet die Lösung folgender fundamentalen Aufgabe: Von den Bahnen zweier Punkte M und m eines ebenen Systems sind zu einer bestimmten Zeit die Krümmungsmittelpunkte $K_1 \dots K_n$, $k_1 \dots k_n$ für n gleichzeitige Bewegungen des Systems, sowie die zugehörigen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 \dots \omega_n$ bekannt. Es sind die Krümmungsmittelpunkte K und k für die resultirende Bewegung der Punkte M und m zu ermitteln.

Zunächst liefern die Schnitte der Geraden MK_n und mk_n die Drehpunkte O_n, in Bezug auf welche der resultirende Drehpunkt O den Ausdruck besitzt

$$O \equiv \Sigma \omega_n . O_n .$$

Man wähle nun MmO als Fundamentaldreieck, in Bezug auf welches jeder gegebene Drehpunkt einen Ausdruck von der Form haben möge

$$O_n \equiv \omega_n^2 . O + C_n . M + c_n . m .$$

Nimmt man für die im vorigen Artikel erwähnten beiden Parallelen die Gerade Mm selbst und die durch O gehende Parallele, so ist nach Gleichung 7)

$$(R_n \Delta_n - r_n \delta_n) . T_n = R_n \Delta_n . m - r_n \delta_n . M$$

oder abgekürzt nach 10)

$$p_n T_n = R_n \Delta_n \omega_n^2 . m - r_n \delta_n \omega_n^2 . M$$

und für den Schwerpunkt Π der Punkte T_n

$$p . \Pi = (\Sigma R_n \Delta_n \omega_n^2) . m - (\Sigma r_n \delta_n \omega_n^2) . M.$$

Die durch O gehende, zu Mm parallele Gerade g hat den Ausdruck

$$g \equiv x . O + M - m$$

und die Poltangente $O_n T_n$

$$O_n T_n \equiv y(\omega_n^2 + C_n + c_n) . O_n + p_n . T_n,$$

welcher durch Substitution der Ausdrücke von O_n und T_n übergeht in

$$O_n T_n \equiv y \omega_n^2 . O + (y C_n - r_n \delta_n \omega_n^2) . M + (y c_n + R_n \Delta_n \omega_n^2) . m.$$

Der Schnitt dieser Geraden mit g liefert den Punkt

$$t_n \equiv p_n . O + q_n . M - q_n . m,$$

worin

$$q_n = C_n R_n \Delta_n + c_n r_n \delta_n .$$

Hiernach ergiebt sich für den Schwerpunkt π der Punkte t_n

$$p . \pi = p . O + \Sigma q_n . M - \Sigma q_n . m.$$

Verbindet man die Punkte Π und π und zieht zu dieser Geraden eine Parallele durch O, so ist letztere die Poltangente der resultirenden Bewegung; sie hat den Ausdruck

$$OT \equiv x . O + \Pi - \pi$$

und ihr Schnitt mit der Geraden Mm

$$T \equiv \Sigma [q_n + R_n \Delta_n \omega_n^2] . m - \Sigma [q_n + r_n \delta_n \omega_n^2] . M.$$

Durch Vergleich mit dem Ausdrucke 7) folgt

$$R \Delta \omega^2 = \Sigma [q_n + R_n \Delta_n \omega_n^2], \quad r \delta \omega^2 = \Sigma [q_n + r_n \delta_n \omega_n^2],$$

woraus sich mit Beachtung von 6) für die gesuchten Krümmungsmittelpunkte K und k die Ausdrücke ergeben

$$K \equiv V^2 . O - \Sigma [(\omega_n^2 + C_n) R_n \Delta_n + c_n r_n \delta_n] . M,$$
$$k \equiv v^2 . O - \Sigma [(\omega_n^2 + c_n) r_n \delta_n + C_n R_n \Delta_n] . m,$$

und für die Krümmungsradien P und ϱ die Gleichungen

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{1}{V^2} \Sigma [(\omega_n^2 + C_n) R_n \Delta_n + c_n r_n \delta_n] \right],$$
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{v^2} \Sigma [(\omega_n^2 + c_n) r_n \delta_n + C_n R_n \Delta_n] \right],$$

wo V und v die resultirenden Geschwindigkeiten der Punkte M und m sind.

17. Wählt man statt des Punktes m den Drehpunkt O der resultirenden Bewegung, so geht die Gerade Mm über in den Normalstrahl des Punktes M; ersetzt man in diesem besondern Falle r_n, δ_n durch a_n, ε_n, so geht Gleichung 8) wegen $r = 0$ über in

11) $$R \Delta \omega^2 = \Sigma (R_n \Delta_n - a_n \varepsilon_n) \omega_n^2.$$

Der Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Punktes M für die resultirende Bewegung besitzt nach 6) den Ausdruck

$$\frac{R\omega}{P}\cdot K = \omega . O - \frac{\Delta\omega}{R}\cdot M$$

und ebenso jeder der Krümmungsmittelpunkte K_n der n gleichzeitigen Bewegungen den Ausdruck

$$\frac{R_n\omega_n}{P_n}\cdot K_n = \omega_n . O_n - \frac{\Delta_n\omega_n}{R_n}\cdot M,$$

woraus mit Beachtung von

$$\omega . O = \Sigma[\omega_n . O_n]$$

hervorgeht:

$$\frac{R\omega}{P}\cdot K = \frac{R_1\omega_1}{P_1}\cdot K_1 + \ldots + \frac{R_n\omega_n}{P_n}\cdot K_n + u . M,$$

worin mit Benützung der Gleichungen 5) und 11)

$$u = \frac{R\omega}{P} - \Sigma\left[\frac{R_n\omega_n}{P_n}\right] = \frac{1}{R^2\omega}\Sigma\left[\frac{\Delta_n\omega_n}{R_n}(R^2\omega - R^2_n\omega_n) + a_n\varepsilon_n\omega_n^2\right].$$

Bemerkt man noch, dass

$$\frac{R_n\omega_n}{P_n} = \varphi_n$$

die Winkelgeschwindigkeit des Punktes M um seinen jeweiligen Krümmungsmittelpunkt darstellt, so kann obiger Ausdruck geschrieben werden

$$\varphi . K = \Sigma[\varphi_n . K_n] - u . M,$$

worin

$$u = \varphi - \Sigma\varphi_n$$

den oben angegebenen Werth besitzt. Wir entnehmen hieraus:

Der Krümmungsmittelpunkt K der Bahn eines Systempunktes M für die resultirende aus n gleichzeitigen Bewegungen ist der Schwerpunkt der diesen Bewegungen entsprechenden Krümmungsmittelpunkte $K_1 \ldots K_n$ und des Punktes M selbst, wenn in ersteren die Krümmungs-Winkelgeschwindigkeiten $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, in letzterem der Ueberschuss $u = \varphi - \Sigma\varphi_n$ als Gewichte angebracht werden.

18. Ist die resultirende Bewegung des Systems eine Translation, so wird $\omega = \Sigma\omega_n = 0$ und der resultirende Drehpunkt liegt in unendlicher Entfernung. Dann ist

$$\frac{R_n}{R} = 0, \quad \frac{a_n}{R} = 1$$

und Gleichung 11) geht über in

$$\Delta\omega^2 = -\Sigma\varepsilon_n\omega_n^2 = -\Gamma_1,$$

wenn man mit Γ_1 die Projection des Polygons der reducirten Wendedurchmesser auf die Richtung des unendlich fernen Drehpunktes O bezeichnet. Der allen Punkten des Systems gemeinsame Krümmungshalbmesser ist dann mit Benützung obiger Relation

$$P = \frac{R^2}{R-\Delta} = \frac{V^2}{\Gamma_1},$$

worin V die Translationsgeschwindigkeit des Systems bezeichnet.

Steht die Schlusslinie des Polygons zur Richtung des unendlich fernen Drehpunktes O senkrecht, so ist $\Gamma_1 = 0$ und $P = \infty$; dann passiren alle Punkte des Systems gleichzeitig Wendepunkte ihrer Bahnen. (Art. 4.)

19. Nach Art. 17 ist der Krümmungsmittelpunkt der resultirenden aus zwei gleichzeitigen Bewegungen des Punktes M durch den Ausdruck gegeben

$$\frac{R\omega}{P} \cdot K = \frac{R_1 \omega_1}{P_1} \cdot K_1 + \frac{R_2 \omega_2}{P_2} \cdot K_2 + u . M.$$

Berücksichtigt man, dass in diesem speciellen Falle

$$V^2 = R^2 \omega^2 = R_1^2 \omega \omega_1 + R_2^2 \omega \omega_2 - a^2 \omega_1 \omega_2,$$

$$\frac{a_1}{\omega_2} = \frac{a_2}{\omega_1} = \frac{a}{\omega},$$

wobei V die resultirende Geschwindigkeit des Punktes M und $a = a_1 + a_2$ die Entfernung der beiden Drehpunkte bedeutet, so geht der in Art. 17 für u angegebene Werth über in

$$u = \frac{\omega_1 \omega_2}{V^2} (m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2),$$

worin

$$m_1 = \frac{1}{R_1 R_2} (\Delta_2 R_1^3 + \Delta_1 R_2^3) - \frac{a}{R_1} (\Delta_1 a - \varepsilon_1 R_1),$$

$$m_2 = \frac{1}{R_1 R_2} (\Delta_2 R_1^3 + \Delta_1 R_2^3) - \frac{a}{R_2} (\Delta_2 a - \varepsilon_2 R_2).$$

Setzt man wie in Art. 9 das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 : \omega_2 = x$, so geht obiger Ausdruck für den Krümmungsmittelpunkt über in

$$12) \qquad \frac{U^3}{P} \cdot K = \frac{U^2 R_1}{P_1} x . K_1 + \frac{U^2 R_2}{P_2} \cdot K_2 + x(m_1 x + m_2) . M,$$

worin

$$U^2 = \frac{V^2}{\omega_2^2} = (1+x)(R_1^2 x + R_2^2) - a^2 x.$$

Der Ausdruck 12) giebt in Bezug auf das Fundamentaldreieck $K_1 M K_2$ den geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte an, welche einem Systempunkte M für die resultirende aus zwei gleichzeitigen Bewegungen zugehören, wenn man dem Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1 : \omega_2$ alle möglichen Werthe ertheilt. Dieser Ort ist eine Curve dritter Ordnung, welche durch die beiden Fundamentalpunkte K_1 und K_2 geht ($x = \infty$, $x = 0$) und den dritten Fundamentalpunkt M als imaginären Doppelpunkt besitzt ($U^2 = 0$); denn es giebt keinen resultirenden Drehpunkt auf der Geraden $O_1 O_2$, welcher dem Punkte M die Geschwindigkeit $V = 0$ ertheilen könnte. Die unendlich ferne Gerade wird von dieser Curve im Allgemeinen in drei Punkten geschnitten; durch jeden Punkt des Systems M gehen also drei Wendekreise jener Schaar, welche durch $O_1 J_1$, $O_2 J_2$ bestimmt ist, oder jeder

Punkt des Systems kann für drei Werthe des Verhältnisses $\omega_1:\omega_2$ zum Wendepunkte seiner Bahn werden. Eine Ausnahme hiervon machen nur die Punkte der Geraden $O_1 O_2$; durch jeden Punkt dieser Geraden gehen zwar ebenfalls drei Wendekreise jener Schaar, allein nur für zwei derselben wird jener Punkt zum Wendepunkt, für den dritten ist er Rückkehrpunkt seiner Bahn.

Es giebt im Allgemeinen sechs Werthe des Verhältnisses $\omega_1:\omega_2$, für welche der Krümmungsradius der Bahn des Punktes M dieselbe Grösse erreicht; denn die betreffenden Krümmungsmittelpunkte liegen im Schnitte der Curve dritter Ordnung mit einem um M beschriebenen Kreise.

20. Zum Schlusse möge noch die Lösung folgender Aufgabe gegeben werden. Von zwei Punkten M und m des Systems seien die Krümmungsmittelpunkte ihrer Bahnen für drei gleichzeitige Bewegungen gegeben. Es sei das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1:\omega_2:\omega_3$ der Bewegungen zu ermitteln, bei welchem für die resultirende Bewegung m der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes M wird.

Wir wählen die Drehpunkte O_1, O_2, O_3 der gleichzeitigen Bewegungen als Fundamentalpunkte; in Bezug auf dieselben sei

$$M=A.O_1+B.O_2+C.O_3,\quad m=a.O_1+b.O_2+c.O_3,$$

wobei

$$A+B+C=1,\quad a+b+c=1.$$

Soll m der Krümmungsmittelpunkt der resultirenden Bewegung von M werden, so wird Mm zum Normalstrahl, auf welchem der resultirende Drehpunkt O liegt; es muss demnach sein

$$O\equiv(A+ua).O_1+(B+ub).O_2+(C+uc).O_3.$$

Ueberdies gilt

$$O=x.O_1+y.O_2+z.O_3,$$

wenn wieder

$$\frac{\omega_1}{\omega}=x,\quad \frac{\omega_2}{\omega}=y,\quad \frac{\omega_3}{\omega}=z$$

gesetzt wird. Die Vergleichung obiger beiden Ausdrücke liefert zunächst

13) $$x(Bc-Cb)+y(Ca-Ac)+z(Ab-Ba)=0.$$

Behält man die Bezeichnungen des Art. 13 bei, so wird im vorliegenden Falle

14) $$\Delta+\delta=0,\quad R+r=P,$$
$$R\Delta-r\delta=P\Delta=Rr$$

und Gleichung 8) geht über in

15) $$Rr=(R_1\Delta_1-r_1\delta_1)x^2+(R_2\Delta_2-r_2\delta_2)y^2+(R_3\Delta_3-r_3\delta_3)z^2.$$

Als Punkt der Geraden Mm hat O die Ausdrücke

$$O=r.M+R.m\quad\text{und}\quad O\equiv(bx-ay).M-(Bx-Ay).m,$$

woraus

16) $$R(bx-ay)+r(Bx-Ay)=0.$$

Beachtet man noch, dass mit Benützung der Gleichung 13) und der Relationen

$$x+y+z=1, \quad A+B+C=1, \quad a+b+c=1$$

gesetzt werden kann

$$(bx-ay)-(Bx-Ay)=Ab-Ba,$$

so folgen aus 13), 14), 15), 16) nach Elimination von R und r die Gleichungen

$$17) \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=0, \quad \alpha_1 x^2+\beta_1 y^2+\gamma_1 z^2=0,$$

worin

$$\alpha=Bc-Cb, \quad \beta=Ca-Ac, \quad \gamma=Ab-Ba,$$

$$\alpha_1=R_1^2\left(1-\frac{R_1}{P_1}\right)-r_1^2\left(1-\frac{r_1}{\varrho_1}\right)-P^2.\frac{Bc+Cb}{2\beta\gamma},$$

$$\beta_1=R_2^2\left(1-\frac{R_2}{P_2}\right)-r_2^2\left(1-\frac{r_2}{\varrho_2}\right)-P^2.\frac{Ca+Ac}{2\gamma\alpha},$$

$$\gamma_1=R_3^2\left(1-\frac{R_3}{P_3}\right)-r_3^2\left(1-\frac{r_3}{\varrho_3}\right)-P^2.\frac{Ab+Ba}{2\alpha\beta}.$$

Die Gleichungen 17) liefern das gesuchte Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten:

$$\omega_1:\omega_2:\omega_3=x:y:z.$$

21. Die vorliegende Theorie der gleichzeitigen unendlich kleinen Bewegungen eines ebenen Systems gestattet eine interessante Anwendung auf die Untersuchung der relativen Bewegungen von beliebig vielen übereinander gelagerten ebenen Systemen, von welchen jedes eine andere Bewegung besitzt. Die Resultate, welche die Untersuchung dieser relativen Bewegungen liefert, sollen einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben; einige derselben wurden bereits von Ph. Gilbert, wenn auch auf gänzlich verschiedenem Wege, gefunden und zum Gegenstand einer interessanten Studie* gemacht.

* Sur l'extension aux Mouvements plans relatifs de la méthode des normales et des centres de courbure. Soc. scient. de Bruxelles, 1878.

XIII.

Ueber die galvanische Induction in einem körperlichen Leiter.

Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der inducirten elektrischen Ströme.

Von

Dr. K. Otto Richter.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit fusst auf einer Formulirung des F. Neumann-schen Inductionsgesetzes, wie sie in einer noch ungedruckten Vorlesung von F. Neumann über Elektrodynamik enthalten ist und welche Herr Professor Dr. C. Neumann mir mitzutheilen die Güte hatte.

Die hierauf sich beziehenden Fundamentalgleichungen, welche als Grundlage unserer Untersuchungen dienen, sind im ersten Paragraphen angegeben. Auch eine Anzahl von Gleichungen des § 2, in welchem es sich zunächst um eine Transformation des mathematischen Ausdrucks des in Rede stehenden Gesetzes handelt, sind dem genannten Manuscript entnommen, nämlich die Gleichungen 10) bis 13) und dann 18) bis 22).

Was nun unsere eigenen Untersuchungen betrifft, so möge gleich von vornherein hervorgehoben werden, dass wir bei der Betrachtung der Induction in einem körperlichen Leiter erstens voraussetzen, die Induction werde durch einen geschlossenen, von Gleitstellen freien und von einem gleichförmigen Strome durchflossenen Draht bewirkt, bez. durch ein System solcher Ströme, z. B. auch ein Solenoid oder einen Magneten; dass wir zweitens uns durchweg auf stationäre Strömungen beschränken, d. h. nur solche inducirte Strömungszustände in Betracht ziehen, welche der Bedingung $\frac{\partial i_x}{\partial x}+\frac{\partial i_y}{\partial y}+\frac{\partial i_z}{\partial z}=0$ genügen, wenn i_x, i_y, i_z die Strömungscomponenten an irgend einer Stelle (x, y, z) des inducirten Conductors nach den drei Axen irgend eines rechtwinkligen Coordinatensystems bedeuten. Diese Beschränkung kommt in der Hauptsache auf die Voraussetzung hinaus, dass alle die Induction hervorrufenden Veränderungen mit Geschwindigkeiten vor sich gehen, welche gegenüber den Strömungsgeschwindigkeiten der dynamischen Elektricität verschwindend klein sind. Endlich werden wir drittens die Inductionswirkungen der im körperlichen Leiter inducirten Ströme aufeinander vernachlässigen, wie dies in den meisten bisherigen Untersuchungen dieser Art geschehen ist, und angesichts der Unsicherheit, welche noch gegenwärtig in der Elektrodynamik herrscht, wohl gerechtfertigt zu sein scheint.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Der erste Abschnitt (§ 1 bis § 3) ist wesentlich vorbereitender Natur. Ueber den Inhalt des ersten Paragraphen ist das Nöthige schon mitgetheilt. In § 2 werden diejenigen Bedingungs- und Differentialgleichungen entwickelt, welche das Problem der Induction bestimmen, sobald der inducirte Conductor in vollständiger Ruhe verharrt, und also die Inductionswirkungen lediglich von Veränderungen im inducirenden System herrühren; und zwar geschieht die Ableitung jener Bedingungen nach Massgabe der bekannten elektromotorischen Fundamentalgleichungen, welche für jede der drei Coordinatenaxenrichtungen die mit dem Widerstande multiplicirte Strömung als Summe der elektromotorischen Kraft und der aus der Spannung oder dem elektrostatischen Potentiale sich ergebenden Wirkung darstellen. Im dritten Paragraphen werden die entwickelten Gleichungen auf einige besonders einfache specielle Fälle angewendet. Der Uebergang von einem irgendwie beschaffenen System geschlossener inducirender Ströme zu einem Solenoid (oder Magneten) wird dabei jedesmal auf Grund der von C. Neumann aufgestellten Formeln bewerkstelligt, die sich auf die Ausführung von über unendlich kleine geschlossene Curven erstreckten Integralen beziehen.

Im zweiten Abschnitte (§ 4 bis § 8) ziehen wir den allgemeinen Fall in Betracht, dass der inducirte Leiter sich bewegt, während das inducirende System ruht.* Die beiden ersten Paragraphen dieses Abschnittes (nämlich § 4 und § 5) dienen demselben als Einleitung, und zwar handelt § 4 von den Werthen, welche dann die mathematischen Ausdrücke der elektromotorischen Kräfte annehmen, und § 5 enthält (auf Grund dieser Erörterungen) ein Beispiel, welches gleichsam den Uebergang von den Problemen des ersten Abschnittes zu denen des zweiten Abschnittes vermittelt. Darnach beschäftigen wir uns in § 6 mit der Entwickelung der allgemeinen Bedingungen, welche bei beliebiger Bewegung des inducirten Körpers für die inducirten Ströme gelten; und endlich bringen wir in § 7 und § 8 mehrere interessante Anwendungen der vorangegangenen Betrachtungen: § 7 behandelt die durch einen Magnetpol in einer unendlich grossen,

* Was den Unterschied des im ersten von dem im zweiten Abschnitte behandelten Problems betrifft, so beruht er nur in der mathematischen Formulirung, da es bei der Induction nur auf die relative Bewegung ankommt, ist also nur äusserlich. Indessen schien es mir zweckmässig, jene Eintheilung, welche in engem Zusammenhange mit der Entstehungsart dieser Arbeit steht, auch bei der Veröffentlichung beizubehalten.

von zwei Parallelebenen begrenzten Metallplatte inducirten Ströme, welche durch Rotation der Platte um eine auf ihr senkrechte Axe entstehen; in § 8 wird das Problem der Rotation einer Kugel unter dem Einflusse irgend eines in der Rotationsaxe befindlichen Magnetpoles durchgeführt.

Hierzu möge noch Folgendes bemerkt werden. Bekanntlich stimmt das F. Neumann'sche Gesetz mit dem W. Weber'schen Gesetze hinsichtlich der Inductionswirkung in linearen Leitern überein, so lange das inducirende System aus geschlossenen Strömen besteht. Da aber beim F. Neumann'schen Inductionsgesetze, wie beim Weber'schen, die in einem Raumelemente inducirte elektromotorische Kraft als Resultante derjenigen drei elektromotorischen Kräfte erscheint, welche gleichzeitig in drei an dem Orte dieses Elementes befindlichen, aufeinander senkrechten Drahtelementen inducirt werden würden (vergl. § 1), so müssen auch bei der Induction durch geschlossene Ströme in körperlichen Leitern die aus dem einen und dem andern Gesetze abgeleiteten Folgerungen miteinander übereinstimmen, so lange man die gegenseitigen Einwirkungen der Inductionsströme aufeinander ausser Acht lässt. Demgemäss stehen auch einige der Ergebnisse der §§ 6 bis 8 mit von Jochmann* auf Grund des Weber-schen Gesetzes unter gleichen Voraussetzungen gegebenen Resultaten in Einklang. In § 6 sind zwei verschiedene Formulirungen eines und desselben Problems enthalten (nämlich des Problems, welches sich auf ein ruhendes inducirendes System von beliebigen geschlossenen Strömen und auf einen in Bewegung begriffenen körperlichen Leiter bezieht). Die Specialisirung einer derselben für den Fall, dass die Induction nur durch Magnetpole bewirkt wird, stimmt mit der von Jochmann aus dem Weber'schen Gesetze abgeleiteten Formulirung dieses specielleren Problems, wie es sein muss, überein; aber gerade die andere ist es, welche in den Anwendungen, wie z. B. der in § 7 behandelte Fall zeigt, auf übersichtlicherem und kürzerem Wege zum Ziele führt. Auch das von uns in § 8 betrachtete Beispiel erwähnt schon Jochmann, ohne seine allgemeine Lösung in Angriff zu nehmen; wie unsere Betrachtungen zeigen, lässt es sich in der That mit Hilfe von nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwickelungen vollständig durchführen. — Ebenso wie dieser, scheint auch der von uns in § 5 behandelte Fall, so einfach und interessant er ist, bisher noch nicht in Betracht gezogen worden zu sein.

* Crelle's Journal, Bd. 63 S. 158 flg.

I. Abschnitt.

Inductionsströme, welche in einem ruhenden körperlichen Leiter erzeugt werden.

§ 1.

Das F. Neumann'sche Inductionsgesetz.

Zwei geschlossene lineare Leiter σ und s, deren Punkte die Coordinaten ξ, η, ζ, bez. x, y, z haben mögen, seien in beliebiger Bewegung begriffen. Ueberdies sei σ von einem elektrischen Strome durchflossen, dessen Stärke J von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändert. Bezeichnet man alsdann die von diesem Strome J in irgend einem Punkte (x, y, z) des Leiters s hervorgebrachte elektromotorische Kraft mit E, und die Componente dieser Kraft nach der Richtung s mit E_s, so hat E_s den Werth:

$$1)\quad E_s = -\varepsilon J \int \frac{d\sigma}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial s} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\int\frac{d\sigma}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial s},$$

wo die Integrationen über alle Elemente $(J, d\sigma)$ des gegebenen Stromes ausgedehnt sind und wo $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ den Abstand eines solchen Elementes vom Punkte (x, y, z) vorstellt. Dabei bezeichnet t die Zeit und ε eine Constante, die sogenannte Inductionsconstante.

Nimmt man statt des linearen Leiters s einen körperlichen Conductor, versteht man also unter (x, y, z) irgend einen Punkt innerhalb dieses Conductors, so wird nicht mehr die Componente E_s, sondern die ganze Kraft E zur Wirkung gelangen. Und zwar ergeben sich auf Grund der Formel 1) für die den Coordinatenaxen entsprechenden Componenten E_x, E_y, E_z jener Kraft E folgende Werthe:

$$2)\quad \begin{aligned}
E_x &= -\varepsilon J \int \frac{d\sigma}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\int\frac{d\sigma}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial x},\\
E_y &= -\varepsilon J \int \frac{d\sigma}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\int\frac{d\sigma}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial y},\\
E_z &= -\varepsilon J \int \frac{d\sigma}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial\sigma\,\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\int\frac{d\sigma}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Die Formel 1) repräsentirt das von F. Neumann aufgestellte Inductionsgesetz; vergl. die Abhandl. der Berliner Akademie von 1846 und 1848. Andererseits ist der Uebergang von 1) zu 2) einem bisher noch nicht veröffentlichten F. Neumann'schen Manuscripte entlehnt. Insbesondere sind die Formeln 2) buchstäblich dieselben wie in jenem Manuscripte.

Es mag hier noch auf einige Transformationen des Ausdrucks 1) aufmerksam gemacht werden, von welchen im Folgenden Gebrauch zu machen ist.

Führt man $\sqrt{r}$ statt r ein, so nimmt jener Ausdruck 1) die Gestalt an:

$$3)\qquad E_s = \varepsilon \int d\sigma \left\{ -J.4 \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s\, \partial \sigma} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t} + \frac{dJ}{dt}.2 \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial \sigma} \right\},$$

und diese Formel kann, wie sich mit Hilfe der identischen Gleichung

$$4)\qquad 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s\, \partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)$$

leicht ergiebt, auch so geschrieben werden:

$$5)\quad E_s = 2\varepsilon \int d\sigma \left\{ J\left[-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial \sigma}\right)\right] + \frac{dJ}{dt} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial \sigma} \right\},$$

oder auch folgendermassen:

$$6)\quad E_s = 2\varepsilon \int d\sigma \left\{ J\left[-\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial t}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left(J \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial \sigma}\right) \right\},$$

oder endlich so:

$$7)\quad E_s = \frac{\varepsilon}{2} \int d\sigma \left\{ -\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{J}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{J}{r} \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial r}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\right) \right\}.$$

Auf ähnliche Weise würden sich die Ausdrücke 2) umgestalten lassen.

Endlich sei noch bemerkt, dass die an der Stelle (x, y, z) des körperlichen Leiters in die Richtung s mit den Richtungscosinus

$$8)\qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \gamma$$

fallende Componente E_s der **ganzen** inducirten elektromotorischen Kraft zufolge 2) den Werth hat:

$$9)\qquad E_s = \alpha E_x + \beta E_y + \gamma E_z.$$

§ 2.

Formulirung des Problems der Induction, falls der inducirte Leiter ruht.

Wir schreiten nun zur Formulirung des Problems der Induction, indem wir zunächst voraussetzen, dass das Axensystem (x, y, z) mit dem inducirten Leiter starr verbunden sei, wobei wir uns (blos der Einfachheit wegen) vorstellen, der letztere sei unbewegt. Wir nehmen also an, dass x, y, z, die Coordinaten irgend eines Punktes des Leiters, von der Zeit t nicht abhängen.

Wir setzen fest, dass das Coordinatensystem rechtwinklig und zwar positiv sei. Die Induction wird durch Veränderungen im inducirenden Stromkreise bewirkt.

Ein beliebiger Punkt des Inducenten habe, bezogen auf das zu Grunde gelegte Coordinatensystem, die Coordinaten ξ, η, ζ.

Da nach der gegenwärtigen Voraussetzung x, y, z, t coordinirte Variable sind, so gilt jetzt die Identität 4) unverändert, wenn man darin s durch x oder y oder z ersetzt;* mithin werden E_x, E_y, E_z dadurch erhalten, dass man gleich in 7) x, y, z nacheinander an Stelle von s setzt, so dass E_x, E_y, E_z sich wie folgt gestalten:

$$10)\quad E_x = \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \left(-J\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial t}\right) - J\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{J}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right) d\sigma,$$

$$E_y = \text{etc. etc.}$$

Da nach unserer Annahme J von σ unabhängig ist (vergl. die Einleitung S. 209) und der Inducent ein geschlossener Strom ohne Gleitstellen (ebendas. S. 209), so fällt in 10) bei Ausführung der Integration jedesmal das erste Glied fort, und man erhält, wenn man

$$11)\quad -J\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{\partial r}{\partial t}d\sigma = U,$$

$$12)\quad J\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma = V_x,\quad J\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma = V_y,$$
$$J\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma = V_z$$

setzt, die folgenden Formeln:

$$13)\quad E_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial t},\quad E_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial t},\quad E_z = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t}.$$

Bezeichnet man ferner die Potentialfunction der gesammten infolge der Induction sich in und auf dem inducirten Conductor verbreitenden freien Elektricität mit φ, und die Leitungsfähigkeit des Conductors an der Stelle (x, y, z) mit $\frac{1}{\varkappa}$, so werden die inducirten Strömungscomponenten i_x, i_y, i_z an der Stelle (x, y, z) durch die Gleichungen gegeben sein:

$$14)\quad \varkappa i_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + E_x,\quad \varkappa i_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + E_y,\quad \varkappa i_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + E_z,$$

oder also, wenn man die Werthe von E_x, E_y, E_z in 13) beachtet und die Bezeichnung

$$15)\quad \varphi - U = \psi$$

einführt:

$$16)\quad \varkappa i_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial t},\quad \varkappa i_y = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial t},\quad \varkappa i_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial t}.$$

Da ferner mit Beibehaltung der Bezeichnungen s, α, β, γ (S. 213)

$$17)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

ist, so folgt aus 9) und 14)

* Man vergl. hierzu § 4.

18)
$$i_s = \alpha i_x + \beta i_y + \gamma i_z,$$
wobei natürlich unter i_s die in Richtung von ds inducirte Strömungscomponente an der betrachteten Stelle verstanden ist. Ferner hat man, wenn man zur Abkürzung

19)
$$v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial \sigma}, \quad v_y = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial \sigma}, \quad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial \sigma}$$
setzt, d. h.

20)
$$v_x = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\frac{\partial(r^2)}{\partial \sigma}, \quad v_y = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\frac{\partial(r^2)}{\partial \sigma}, \quad v_z = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\frac{\partial(r^2)}{\partial \sigma},$$
zufolge 12)

21)
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = J\frac{\varepsilon}{2}\int_\sigma\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)d\sigma$$
oder, da nach 20)
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial \zeta}\right)\right] = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \sigma}$$
ist,

22)
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Variablen x, y, z, t wird daher gegenwärtig
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right),$$
und somit nach 22)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right) = 0$$
sein, so dass nunmehr die Bedingung des stationären Strömungszustandes* nach 16) $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ wird oder, indem wir uns für die Differentialoperation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ des üblichen Zeichens Δ bedienen:

23)
$$\Delta\psi = 0.$$
Dazu kommt noch die Grenzbedingung, welche aussagt, dass überall an der Oberfläche des inducirten Leiters, den wir uns von einem isolirenden Medium umgeben denken, die zur Oberfläche selbst senkrechte Strömungscomponente verschwindet. Weil nach 12)
$$\alpha V_x + \beta V_y + \gamma V_z = J\frac{\varepsilon}{2}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial \sigma}d\sigma$$
ist und die rechte Seite der vorstehenden Gleichung analog der Schreibweise in 12) mit V_s bezeichnet werden kann:

---

* Vergl. die Einleitung S. 209.

$$\alpha V_x + \beta V_y + \gamma V_z = V_s,$$

so hat man nach 18) und 16)

$$24) \qquad \varkappa i_s = -\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{\partial V_s}{\partial t};$$

bezeichnet man daher in irgend einem Oberflächenpunkte des inducirten Leiters die äussere Flächennormale mit n, so ist der mathematische Ausdruck der vorhin genannten Oberflächenbedingung

$$25) \qquad \overline{\varkappa i_n} = -\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial n} + \frac{\partial \overline{V_n}}{\partial t} = 0,$$

worin die horizontalen Striche andeuten, dass die Werthe der Functionen, über welchen sie stehen, an der Oberfläche des Conductors zu nehmen sind.

Da U, sowie V_x, V_y, V_z gegeben, nämlich von der Lage, Gestalt, Intensität, Bewegung und Intensitätsänderung des inducirenden Stromes abhängige Functionen sind, so handelt es sich bei der Berechnung von i_x, i_y, i_z um die Ermittelung der Potentialfunction φ; ist diese nämlich bekannt, so findet man $\varkappa i_x$, $\varkappa i_y$, $\varkappa i_z$ durch blosse Differentiation in der durch 16) und 15) vorgeschriebenen Weise. Jedoch kann man, da U bekannt ist, statt φ auch die Function ψ [vergl. 15)] als Unbekannte einführen, und hat dann für diese die Hauptgleichung 23) und die Grenzbedingung 25). Die letztere sagt aus, dass $\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial n}$ an jeder Stelle der Oberfläche des gegebenen Conductors einen vorgeschriebenen Werth, nämlich den Werth $\frac{\partial \overline{V_n}}{\partial t}$ besitzt; die erstere Gleichung, 23), dagegen muss in jedem Punkte des Innenraumes des Leiters erfüllt sein.

Durch die Gleichungen 23) und 25) wird ψ zunächst nur im Innern des körperlichen Leiters bestimmt. Auch reichen diese beiden Bedingungen zur Ermittelung von ψ an und für sich noch nicht aus; vielmehr muss noch hinzugefügt werden, dass

26) ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ überall im Innern des Leiters stetig

bleiben sollen. Dass diese Forderung mit der allgemeinen Bedeutung von ψ in Einklang steht, erkennt man leicht; denn da φ die Potentialfunction von Massen bedeutet, welche theils innerhalb, theils auf der Oberfläche jenes Raumes ausgebreitet sein können, so genügen φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ daselbst sicher der Forderung der Stetigkeit; und aus der Bildungsweise von U ergiebt sich [vergl. 11)], dass diese Function nicht nur nebst ihren ersten, sondern sogar sammt allen ihren Ableitungen nach x, y, z stetig ist überall im Bereiche des Conductorvolumens, vorausgesetzt allerdings, dass alle Veränderungen, welche die Induction bewirken, mit endlichen Geschwindigkeiten vor sich gehen, und dass der Inducent beständig durch irgendwelche Zwischenräume von dem körperlichen Leiter getrennt bleibt.* — Auf Grund einer bekannten Methode mit Hilfe des Green'schen Satzes

$$\iiint_{\mathfrak{R}} \varDelta \Psi \, dx \, dy \, dz = \iint_{\mathfrak{O}} \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial n} do,$$

welcher sich auf den Innenraum $\mathfrak{R}$ und die Oberfläche $\mathfrak{O}$ eines Raumes (hier unseres Conductors) bezieht, weist man dann nach, dass ψ nunmehr [d. h. durch die Bedingungen 23), 25), 26)] bis auf eine willkürliche additive Constante eindeutig bestimmt ist.

Wendet man denselben Green'schen Satz auf ψ selbst an, so erhält man zufolge 23)

$$\iint_{\mathfrak{O}} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial n} do = 0.$$

Unsere Aufgabe ist mithin nur dann lösbar, wenn die vorgeschriebenen Oberflächenwerthe $\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial n}$, nämlich $\frac{\partial \overline{V_n}}{\partial t}$ [vergl. 25)] gerade so eingerichtet sind, dass sie die Bedingung $\iint_{\mathfrak{O}} \frac{\partial \overline{V_n}}{\partial t} do = 0$ erfüllen oder, was dasselbe sagt, wenn die vorgeschriebene Function $\overline{V_n}$ so beschaffen ist, dass sie der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathfrak{O}} \overline{V_n} \, do = 0$$

Genüge leistet. Dass dies stets der Fall ist, ergiebt sich leicht aus der Bedeutung von V_n (S. 215 und 216), nämlich

$$V_n = J \frac{\varepsilon}{2} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \sigma} d\sigma. \tag{27}$$

Da nämlich $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2} \frac{\partial (r^2)}{\partial n} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \sigma}$ ist, so hat man nach Ausführung einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} V_n &= J \frac{\varepsilon}{4} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial n \, \partial \sigma} d\sigma \\ &= -J \frac{\varepsilon}{2} \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right] d\sigma, \end{aligned}$$

oder, da $\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} + \cdots$ den Cosinus des Winkels zwischen der Flächennormale n und dem Inducentenelement $d\sigma$ bedeutet:

$$V_n = -J \frac{\varepsilon}{2} \int_{\sigma} \frac{\cos(n, \sigma)}{r} d\sigma. \tag{28}$$

* Man übersieht unmittelbar, dass das durch 23), 25), 26) formulirte Problem genau denselben Ausdruck behält, falls der eine geschlossene Inducent (J, σ) durch eine Reihe verschiedener solcher Ströme (J, σ), (J_1, σ_1), (J_2, σ_2), ... ersetzt wird.

Hiernach wird $\int\!\!\int_{\mathfrak{O}} \overline{V}_n\, do = -J\frac{\varepsilon}{2}\int_\sigma d\sigma \int\!\!\int_{\mathfrak{O}} \frac{\cos(n,\sigma)}{r}\, do$; bezeichnet aber p eine beliebige Richtung im Raume, so ist bekanntlich $\int\!\!\int_{\mathfrak{O}} f\cos(n,p)\, do$ $= \int\!\!\int\!\!\int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial f}{\partial p}\, dx\, dy\, dz$, wenn f eine beliebige, aber nebst ihren ersten Ableitungen im Raume $\mathfrak{R}$ stetige Function von x, y, z ist. Im vorliegenden Falle ist demgemäss $\int\!\!\int_{\mathfrak{O}} \frac{\cos(n,\sigma)}{r}\, d\sigma = \int\!\!\int\!\!\int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\sigma}\, dx\, dy\, dz$, hiernach

$$\int_\sigma d\sigma \int\!\!\int_{\mathfrak{O}} \frac{\cos(n,\sigma)}{r}\, do = \int_\sigma d\sigma \int\!\!\int\!\!\int_{\mathfrak{R}} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\sigma}\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int_{\mathfrak{R}} dx\, dy\, dz \int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{d\sigma}\, d\sigma = 0,$$

und bei jeder Lage und Gestalt des Inducenten folglich (natürlich mit Einhaltung der schon S. 216, 217 getroffenen Bestimmungen) $\int\!\!\int_{\mathfrak{O}} \overline{V}_n\, do = 0$, also auch nach dem Vorigen $\int\!\!\int_{\mathfrak{O}} \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial n}\, do = 0$. — q. e. d.

Genau ebenso, wie vorhin [Gl. 27) und 28)] V_n umgeformt wurde, lassen sich auch V_x, V_y, V_z behandeln, und es ergiebt sich

$$29)\quad V_x = -J\frac{\varepsilon}{2}\int_\sigma \frac{1}{r}\cos(x,\sigma)\, d\sigma = -J\frac{\varepsilon}{2}\int_\sigma \frac{1}{r}\,\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\, d\sigma, \text{ u. s. w.}$$

§ 3.

Anwendungen der in § 2 entwickelten Formeln.

Erstes Beispiel. Der Conductor sei zuerst ein beliebiger Rotationskörper und der Inducent ein mit seiner Rotationsaxe coaxialer Kreisstrom, welcher längs der Rotationsaxe verschoben werden kann, jedoch nur so bewegt werde, dass seine Ebene beständig auf der Rotationsaxe senkrecht steht.

Die x-Axe des Coordinatensystems falle mit der Rotationsaxe zusammen und es werde vorausgesetzt, dass der Strom im Inducenten, J, im ersten Quadranten der (yz)-Ebene von der y-Axe zur z-Axe fliesse.

Der Radius des (nach Voraussetzung also der yz-Ebene parallelen) Kreisstromes sei ϱ, der Winkel, welchen der nach irgend einem Punkte

(ξ, η, ζ) desselben von seinem Mittelpunkte $(x=\xi,\ y=z=0)$ gezogene Radius vector mit der y-Axe bildet, werde ω genannt und der Winkel, welchen die Oberflächennormale n irgend eines Oberflächenpunktes des Conductors mit der x-Axe bildet, mit ϑ bezeichnet. Ferner sei der Abstand irgend eines innern Punktes des Conductors von der x-Axe $\mathfrak{r}=\sqrt{y^2+z^2}$, der eines Oberflächenpunktes $\mathfrak{R}$, und der Winkel, welchen irgend ein $\mathfrak{r}$ oder $\mathfrak{R}$ mit der y-Axe bildet, $\tilde{\omega}$.

Dann ist, was den Inducenten betrifft,

$$30)\quad \begin{cases} \eta=\varrho\cos\omega, \quad \zeta=\varrho\sin\omega, \quad d\sigma=\varrho\, d\omega, \\ \cos(\eta,\sigma)=\dfrac{\partial\eta}{\partial\sigma}=-\sin\omega, \quad \cos(\zeta,\sigma)=\dfrac{\partial\zeta}{\partial\sigma}=\cos\omega; \end{cases}$$

was den inducirten Leiter betrifft,

$$31)\quad \begin{cases} y=\mathfrak{r}\cos\tilde{\omega}, \quad z=\mathfrak{r}\sin\tilde{\omega} \quad (\text{bez. } \bar{y}=\mathfrak{R}\cos\tilde{\omega}, \quad \bar{z}=\mathfrak{R}\sin\tilde{\omega}), \\ r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}=\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}^2-2\varrho\mathfrak{r}\cos(\omega-\tilde{\omega})} \\ \quad (\text{bez. } \bar{r}=\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{R}^2-2\varrho\mathfrak{R}\cos(\omega-\tilde{\omega})}), \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$32)\quad \xi-x=X$$

gesetzt ist; endlich hat man wegen $\cos(\xi,\sigma)=0$ und nach 30)

$$33)\quad \cos(n,\sigma)=-\sin\vartheta\sin(\omega-\tilde{\omega}).$$

Um jetzt V_n zu berechnen, haben wir nach 28) den Werth von $\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma=-\int\limits_\sigma\frac{\cos(n,\sigma)}{r}d\sigma$ zu ermitteln, wobei unter r die von einem beliebigen, aber festen Oberflächenpunkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ oder $(\mathfrak{R}, \tilde{\omega})$ nach dem variablen Punkte (ξ, η, ζ) oder (ξ, ω) des Inducenten σ gezogene Entfernung zu verstehen ist. Nach 31) und 33) ist

$$-\int\limits_\sigma\frac{\cos(n,\sigma)}{r}d\sigma=\sin\vartheta\int\limits_\sigma\frac{\sin(\omega-\tilde{\omega})}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{R}^2-2\varrho\mathfrak{R}\cos(\omega-\tilde{\omega})}}d\sigma,$$

oder wenn man den Werth von $d\sigma$ einsetzt und dazu statt ω, über welches dann von 0 bis 2π zu integriren ist, die neue Integrationsvariable

$$34)\quad \Omega=\omega-\tilde{\omega}$$

einführt:

$$-\int\limits_\sigma\frac{\cos(n,\sigma)}{r}d\sigma=\frac{\sin\vartheta}{\mathfrak{R}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial r}{\partial\Omega}d\Omega=0$$

bei jedem Werthe von ξ; mithin auch

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\sigma\frac{\cos(n,\sigma)}{r}d\sigma=-\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\int\limits_\sigma\frac{\cos(n,\sigma)}{r}d\sigma=0$$

(denn nach Voraussetzung soll der Inducent so bewegt werden, dass allein ξ sich ändert). Nach 28) ist also im vorliegenden Falle $\overline{V_n}=0$, $\frac{\partial\overline{V_n}}{\partial t}=0$, mithin muss zufolge 25) auch

$$35) \qquad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} = 0 \text{ für jeden Oberflächenpunkt}$$

sein. Aus den beiden Bedingungen 23) und 35) bestimmt sich ψ als eine überall im Innern des Rotationskörpers constante Grösse

$$36) \qquad \psi = C.$$

Somit ergiebt sich aus 16) und 15)

$$37) \qquad \varkappa i_x = \frac{\partial V_x}{\partial t}, \quad \varkappa i_y = \frac{\partial V_y}{\partial t}, \quad \varkappa i_z = \frac{\partial V_z}{\partial t}, \quad \varphi = U + C,$$

folglich auch $\Delta\varphi = \Delta U$.

Was U betrifft, so ist jetzt $\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{X}{r}\frac{d\xi}{dt}$, also nach 11), da X und $\frac{d\xi}{dt}$ für alle Elemente $d\sigma$ constant bleiben,

$$38) \qquad U = -J\frac{\varepsilon}{2}X\frac{d\xi}{dt}\int_\sigma \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \sigma}d\sigma = J\frac{\varepsilon}{2}X\frac{d\xi}{dt}\int_\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\sigma}d\sigma = 0,$$

und zwar ganz unabhängig davon, wo der Punkt (x, y, z) im Conductor liegt, so dass auch sämmtliche Differentialquotienten von U nach x, y, z verschwinden. Aus 37) folgt nunmehr

$$39) \qquad \varphi = C, \quad \Delta\varphi = 0.$$

Die letzte Gleichung sagt bekanntlich aus, dass im Innern des Conductors keine freie statische Elektricität vorhanden ist. Denn bezeichnet man die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern des Conductors mit ε, die Dichtigkeit der freien Oberflächenelektricität mit $\bar{\varepsilon}$, so ist

$$40) \qquad -4\pi\varepsilon = \Delta\varphi,$$

$$41) \qquad -4\pi\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{\varphi}_a}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial n},$$

wenn a und i zwei auf der Normale n gelegene Punkte bedeuten, a an der Aussenseite, i an der Innenseite der Oberfläche.

Was gegenwärtig die freie Oberflächenelektricität betrifft, so hat φ nach 39) auch an der Oberfläche des Conductors den Werth C und überall im Unendlichen den Werth Null; mithin gilt* für jeden Werth von φ in irgend einem Punkte des Aussenraumes $0 \gtrless \varphi \gtrless C$, je nachdem $C \lessgtr 0$ ist, und mithin ist überall an der Oberfläche $\frac{\partial \bar{\varphi}_a}{\partial n} \gtrless 0$, je nachdem $C \lessgtr 0$, und da nach 39) gleichzeitig $\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial n} = 0$ sein muss, so ist nach 41) die Belegung jedenfalls **monogen**. C selbst bestimmt sich aus dem gegebenen Anfangszustande; ist von Anfang an keine freie Elektricität vorhanden, so ist $\varphi = C = 0$.

---

* Nach einem bekannten Satze der Potentialtheorie; vergl. z. B. C. Neumann, Untersuchungen über d. log. und Newton'sche Potential, S. 30.

Wir kommen nun zu den in dem Conductor inducirten Strömen. Um sie zu ermitteln, haben wir nach 37) zunächst V_x, V_y, V_z zu berechnen. Nach 29) ist wegen $\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = 0$ längs des ganzen Inducenten auch $V_x = 0$ und da nach Voraussetzung der letztere nur sich selbst parallel verschoben wird, auch $\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$, mithin nach 37)

$$42) \qquad i_x = 0$$

allenthalben im Innern des Conductors; d. h. alle Strömungen finden parallel der yz-Ebene statt.

Weiter hat man nach 29) und 30)

$$V_y = J\frac{\varepsilon}{2}\varrho\int_0^{2\pi}\frac{\sin\omega\, d\omega}{r}, \quad V_z = -J\frac{\varepsilon}{2}\varrho\int_0^{2\pi}\frac{\cos\omega\, d\omega}{r}$$

$$\left(r = \sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}^2-2\varrho\mathfrak{r}\cos(\omega-\tilde{\omega})}\right),$$

oder, wenn man wieder Ω als Integrationsvariable einführt [vergl. 34)]:

$$43) \quad \begin{aligned} V_y &= J\frac{\varepsilon}{2}\varrho\sin\tilde{\omega}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}^2-2\varrho\mathfrak{r}\cos\Omega}}, \\ V_z &= -J\frac{\varepsilon}{2}\varrho\cos\tilde{\omega}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}^2-2\varrho\mathfrak{r}\cos\Omega}}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir allgemein

$$44) \quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega\, d\Omega}{r^n} = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}^2-2\varrho\mathfrak{r}\cos\Omega}^{\,n}} \equiv f_n(X,\mathfrak{r}) = f_n,$$

dann wird

$$45) \quad V_y = J\frac{\varepsilon}{2}\varrho f_1.\sin\tilde{\omega}, \quad V_z = -J\frac{\varepsilon}{2}\varrho f_1.\cos\tilde{\omega};$$

und diese Gleichungen sagen aus, dass an jeder Stelle (x, y, z) im Innern des Conductors die Strömung auf dem Radiusvector $\mathfrak{r}$ senkrecht steht. Denn aus 37) folgt unmittelbar

$$46) \quad \varkappa i_y = \left[\frac{\varepsilon}{2}\varrho\frac{\partial(Jf_1)}{\partial t}\right]\sin\tilde{\omega}, \quad \varkappa i_z = -\left[\frac{\varepsilon}{2}\varrho\frac{\partial(Jf_1)}{\partial t}\right]\cos\tilde{\omega}.$$

Alle Strömungscurven sind demnach Kreise, und zwar ist nach 46) die peripherische Strömung selbst (positiv gerechnet in der Richtung von der y-Axe zur z-Axe) gegeben durch

$$47) \quad \varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\varrho\frac{\partial(Jf_1)}{\partial t}.$$

Dieses Ergebniss enthält keinerlei Element, das sich auf die Art der Begrenzung des Rotationskörpers, auf die Gestalt der begrenzenden Rotationsfläche bezöge. Der Grund hiervon ist offenbar der, dass wir den Einfluss der inducirten Ströme aufeinander vernachlässigt haben.

Das Resultat 47) muss also z. B. bestehen bleiben, wenn man sich den Conductor zu einem einfachen kreisförmigen Draht zusammengezogen denkt, dessen mittelsenkrechte Axe die x-Axe ist. Wirklich verificirt man leicht, dass direct nach dem J. Neumann'schen Gesetze [vergl. 1)] die durch Induction von einem Kreisstrome (mit der Stromintensität J und dem Radius ϱ) in einem coaxialen Kreisstrome s vom Radius $\mathfrak{r}$, dessen Ebene von der Ebene jenes Kreisstromes den Abstand X hat, hervorgerufene Strömung i_s durch

$$\varkappa i_s = -\frac{\partial (J . f_1(X, \mathfrak{r}))}{\partial t}$$

gegeben ist.

Ebenso leicht zeigt man, dass dieses Resultat mit dem bekannten Lenz-schen Gesetze (über die Richtung der Inductionsströme) in Einklang steht; man braucht nur zu beachten, dass

$$\frac{\partial (J . f_1)}{\partial t} = \frac{dJ}{dt}\int_0^{2\pi} \frac{\cos \Omega}{r} d\Omega - JX \frac{d\xi}{dt}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\Omega}{r^3} d\Omega \quad \text{[vergl. 44)]}$$

ist, oder nach 44)

$$\frac{\partial (J . f_1)}{\partial t} = f_1 \cdot \frac{dJ}{dt} - JX f_3 \cdot \frac{d\xi}{dt},$$

mithin nach 47)

$$48)\qquad \varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\varrho f_1 \frac{dJ}{dt} + J\frac{\varepsilon}{2}\varrho X f_3 \frac{d\xi}{dt},^{*}$$

und ferner, dass f_1 ebenso wie f_3, ja überhaupt f_n eine positive Grösse ist, wie man leicht nachweist.

Um sich eine bestimmte Vorstellung von der Vertheilung der inducirten Kreisströme zu machen, ist es zweckmässig, $\varkappa i_{\tilde{\omega}}$ erst bei constantem X (indem man also sämmtliche in einer bestimmten, auf der x-Axe senkrechten Ebene inducirten Kreisströme miteinander vergleicht) für hinreichend grosse Werthe von $\mathfrak{r}$ nach Potenzen von $\frac{1}{\mathfrak{r}}$, dann bei constantem $\mathfrak{r}$ (indem man alle längs eines Kreiscylinders, dessen Axe die x-Axe ist, inducirten Kreisströme betrachtet) für hinreichend grosse Werthe von X nach Potenzen von $\frac{1}{X}$ zu entwickeln. Im ersten Falle hat man, wenn man nur die ersten Glieder beibehält, nahezu

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\Omega}{r} d\Omega = \frac{\pi\varrho}{\mathfrak{r}^2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Omega}{r^3} d\Omega = \frac{3\pi\varrho}{\mathfrak{r}^4},$$

also nach 48)

---

* Hierin entspricht offenbar das erste Glied der durch die Intensitätsänderung des inducirenden Stromes, das zweite der durch die Ortsveränderung desselben (Verschiebung längs der x-Axe) bewirkten Induction.

49) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{\pi\varrho^2}{\mathfrak{r}^2}\cdot\frac{dJ}{dt} + \frac{\varepsilon}{2}J\frac{3\pi\varrho^2 X}{\mathfrak{r}^4}\frac{d\xi}{dt}.$$

Im andern Falle dagegen hat man

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega}{r}\,d\Omega = \frac{\pi\varrho\mathfrak{r}}{X^3}+\cdots,\quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega}{r^3}\,d\Omega = \frac{3\pi\varrho\mathfrak{r}}{X^5}+\cdots,$$

mithin mit Beibehaltung nur der höchsten Glieder:

50) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{\pi\varrho^2\mathfrak{r}}{X^3}\frac{dJ}{dt} + \frac{\varepsilon}{2}J\frac{3\pi\varrho^2\mathfrak{r}}{X^4}\frac{d\xi}{dt}.$$

Die Stärke der im Conductor in einer auf der x-Axe senkrechten Ebene liegenden inducirten Kreisströme variirt also bei hinreichend grossem Radius derselben nahezu im umgekehrten Verhältniss des Quadrats dieses Radius, falls sie nur von der Intensitätsänderung des inducirenden Stromes herrühren, dagegen im umgekehrten Verhältnisse des Biquadrates ihres Radius, falls sie nur der Verschiebung des Inducenten ihren Ursprung verdanken; — und die Stärke der längs eines Kreiscylinders, dessen Axe die x-Axe ist, inducirten Ströme, falls sie nur durch die Intensitätsänderung bewirkt sind, ist bei hinreichend grossem X nahezu umgekehrt proportional der dritten, falls sie dagegen nur von der Verschiebung des Inducenten herrühren, ungefähr umgekehrt proportional der vierten Potenz von X.

Betrachten wir weiter die von der Intensitätsänderung allein herrührenden Inductionsströme für sich, d. h. setzen wir $\frac{d\xi}{dt}=0$, so wird nach 48)

51a) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\varrho f_1\frac{dJ}{dt}.$$

Da f_1 (wie überhaupt f_n) für $\mathfrak{r}=0$ verschwindet, so finden längs der x-Axe keine Strömungen statt. Da ferner f_1 (ebenso wie f_n) mit wachsendem X beständig abnimmt, so ist von allen inducirten Strömen, welche einen Kreiscylinder mit der x-Axe als Rotationsaxe bilden, der in der Ebene des Inducenten der stärkste. Vergleicht man dagegen die in einer und derselben (zur x-Axe senkrechten) Ebene gelegenen inducirten Ströme miteinander, so verschwindet $i_{\tilde{\omega}}$ für $\mathfrak{r}=0$ und auch für $\mathfrak{r}=\infty$; für irgend einen endlichen Werth von $\mathfrak{r}$, welcher natürlich je nach dem Werthe von X, d. h. je nach dem Abstande der betrachteten Ebene von der Ebene des Inducenten, verschieden ist, wird also der absolute Werth von $\varkappa i_{\tilde{\omega}}$ einen grössten Werth erreichen; nennen wir (den Conductor als homogen vorausgesetzt) um der bequemeren Ausdrucksweise willen den Strom, für welchen dies stattfindet, den Hauptstrom für Intensitätsänderung in der Ebene X, so ergiebt sich der Radius $\mathfrak{r}_0$ dieses Hauptstromes aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\Omega}{r}\,d\Omega\right)_{\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0}=0$$

oder

$$0 = -\mathfrak{r}_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}_0^2-2\varrho\mathfrak{r}_0\cos\Omega}^3} + \varrho \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}_0^2-2\varrho\mathfrak{r}_0\cos\Omega}^3}.$$

Da man $\mathfrak{r}$ hieraus nicht explicite als Function von X berechnen kann, so muss man sich durch Reihenentwickelungen eine Vorstellung von dieser Function $\mathfrak{r}_0(X)$ zu machen suchen. Es sei bemerkt, dass die Rotationsfläche, welche durch $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0(X)$ dargestellt wird, also die Fläche aller Hauptströme für Intensitätsänderung, ungefähr das Aussehen eines Katenoids hat; augenscheinlich muss sie zur Ebene des Inducenten symmetrisch sein und durch den Inducenten selbst gehen, denn in der Ebene $X=0$ erreicht f_1 seinen grössten Werth bei $\mathfrak{r}=\varrho$, nämlich den Werth ∞.

Denkt man sich andererseits die Induction nur durch Verschiebungen des Inducenten bewirkt $\left(\frac{dJ}{dt}=0\right)$, so wird nach 48)

51b) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2} J\varrho X f_3 \frac{d\xi}{dt},$$

und es lassen sich ganz analoge Betrachtungen wie vorhin anstellen. Es mag nur noch besonders hervorgehoben werden, dass, wie zu erwarten stand, diese Inductionsströme in der Ebene des Inducenten jedesmal sämmtlich verschwinden, und dass in jedem Augenblicke der Bewegung des Inducenten die Fläche der Hauptströme für Verschiebung des Inducenten eine ähnliche Gestalt wie vorhin die Fläche der Hauptströme für Intensitätsänderung hat, nur dass sie sich weniger von der x-Axe entfernt als diese; im Uebrigen geht sie ebenfalls durch den Inducenten und ist zur Ebene desselben symmetrisch. Ihre Gleichung ist $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{r}_0(X)$, wo $\mathfrak{r}_0$ als Function von X sich aus der Gleichung

$$0 = -\mathfrak{r}_0 \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}_0^2-2\varrho\mathfrak{r}_0\cos\Omega}^5} + \varrho \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\Omega\, d\Omega}{\sqrt{X^2+\varrho^2+\mathfrak{r}_0^2-2\varrho\mathfrak{r}_0\cos\Omega}^5}$$

bestimmt.

Einen Schritt weiter gehend, lassen wir nun den inducirenden Kreisstrom unendlich klein werden, wobei wir von Ortsveränderungen desselben zunächst absehen, also den Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dt}=0$ setzen. Dann haben wir also Gl. 51a) weiter zu behandeln, nämlich ϱf_1 für den Fall zu berechnen, dass ϱ unendlich klein ist. Nach den bekannten, von C. Neumann aufgestellten Formeln*

52a) $$\int_\sigma F(\eta,\zeta)\, d\eta = -\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)_{\substack{\eta=\eta_0 \\ \zeta=\zeta_0}},$$

52b) $$\int_\sigma F(\eta,\zeta)\, d\zeta = +\lambda \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\substack{\eta=\eta_0 \\ \zeta=\zeta_0}},$$

* Vergl. die Abhandlungen der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1873.

welche sich auf eine beliebige (natürlich stetige) Function F beziehen und in welchen die Integrale über irgend eine ebene, der $\eta\zeta$-Ebene parallele unendlich kleine geschlossene Curve in positiver Richtung zu erstrecken sind, in welchen ferner λ den Flächeninhalt dieser Curve, und η_0, ζ_0 die η- und ζ-Coordinate ihres Mittelpunktes bedeuten, — nach diesen Formeln 52b) erhalten wir, da in unserem Falle $\eta_0 = \zeta_0 = 0$ ist (übrigens $\lambda = \varrho^2\pi$):

$$\varrho f_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho . \cos\Omega . d\Omega}{\sqrt{X^2 + \varrho^2 + \mathfrak{r}^2 - 2\varrho\mathfrak{r}\cos\Omega}} = \int_\sigma \frac{d\mathfrak{z}}{\sqrt{X^2 + \varrho^2 + \mathfrak{r}^2 - 2\mathfrak{r}\mathfrak{y}}}$$

$$= +\lambda \left(\frac{\partial \dfrac{1}{\sqrt{X^2 + \varrho^2 + \mathfrak{r}^3 - 2\mathfrak{r}\mathfrak{y}}}}{\partial \mathfrak{y}} \right)_{\mathfrak{y} = \mathfrak{z} = 0} = \frac{\lambda\mathfrak{r}}{\sqrt{X^2 + \mathfrak{r}^2}^3},$$

indem man nämlich $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die η- und ζ-Coordinate desjenigen Peripheriepunktes des Inducenten σ nennt, dessen Radius ϱ mit der xy-Ebene ($\xi\eta$-Ebene) den Winkel Ω bildet, mithin $\mathfrak{y} = \varrho\cos\Omega$, $\mathfrak{z} = \varrho\sin\Omega$ setzt, woraus folgt

$$\varrho\cos\Omega\, d\Omega = d\mathfrak{z}, \quad \varrho^2 = \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2.$$

Hiernach wird also aus Gl. 51a)

53a) $$\varkappa i_{\bar\omega} = -\frac{\varepsilon}{2}\lambda \frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{X^2 + \mathfrak{r}^2}^3} \cdot \frac{dJ}{dt} \quad (\lambda = \varrho^2\pi);$$

dabei ist offenbar $\sqrt{X^2 + \mathfrak{r}^2}$ die Entfernung des betrachteten Conductorpunktes (X, $\mathfrak{r}$, $\bar\omega$) von dem Mittelpunkte des Inducenten, oder, wie wir uns jetzt ausdrücken können, da ja der Inducent unendlich klein ist, von dem Orte, an welchem sich der Inducent befindet. Die Fläche der „Hauptströme" ergiebt sich aus $\dfrac{\partial}{\partial\mathfrak{r}}\left(\dfrac{\mathfrak{r}}{\sqrt{X^2 + \mathfrak{r}^2}}\right) = 0$, also ist ihre Gleichung

53b) $$X^2 - 2\mathfrak{r}^2 = 0,$$

d. h. sie ist ein Kreiskegel, dessen Spitze mit dem Orte des Inducenten zusammenfällt. In diesen Kegel also geht die S. 224 genannte Fläche der Hauptströme für Intensitätsänderung über, falls der Radius des Inducenten fortgesetzt verkleinert wird.

Denkt man sich statt dieses einen Inducenten eine ganze Anzahl von gleich grossen, dicht übereinander längs eines Elementes $d\xi$ der x-Axe liegenden Kreisströmen von derselben Intensität J (vergl. die Anmerkung S. 217), welche also alle zusammen einen kleinen Kreiscylinder von der Höhe $d\xi$ bilden, und nennt man ihre Dichtigkeit δ, so dass ihre Anzahl $\mathfrak{A} = \delta d\xi$ ist, so wird für die durch ihre Gesammtheit bei gleichmässiger Intensitätsänderung an der Stelle (X, $\mathfrak{r}$, $\bar\omega$) des Conductors erzeugte Strömung nach 53a) die Gleichung gelten

$$\varkappa i_{\bar\omega} = -\frac{\varepsilon}{2}\lambda\delta\frac{dJ}{dt} \cdot \mathfrak{r}\frac{d\xi}{\sqrt{X^2 + \mathfrak{r}^2}^3},$$

und folglich für die von einem ganzen Solenoide, dessen Axe mit der x-Axe zusammenfällt und dessen Pole die x-Coordinaten ξ und ξ' haben, erzeugte Strömung, wenn, analog wie $\xi - x = X$, so $\xi' - x = X'$ gesetzt wird, dazu $J\lambda\delta = M$, $-J\lambda\delta = M'$:

$$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{r}}\left(\frac{X}{\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2}}\,\frac{dM}{dt} + \frac{X'}{\sqrt{X'^2+\mathfrak{r}^2}}\,\frac{dM'}{dt}\right).$$

Denkt man sich den einen Pol unendlich fern ($\xi' = \infty$), so dass nur der andere wirkt, so ergiebt sich

53c) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{dM}{dt}\cdot\frac{\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2} - X}{\mathfrak{r}\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2}}.$$

Die dieser Induction entsprechende Fläche der Hauptströme ist wiederum ein Rotationskegel,

53d) $$X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\mathfrak{r}^2 = 0;$$

die Spitze desselben fällt mit dem inducirenden Solenoidpol zusammen.

Nehmen wir nun den andern Fall, wo die Induction nur durch die Verschiebung des Inducenten verursacht wird, setzen wir also $\frac{dJ}{dt} = 0$, und lassen dann in 51b) ϱ unendlich klein werden, so ergiebt sich nach 52b) und 51b)

54a) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = \frac{\varepsilon}{2} J\lambda\frac{d\xi}{dt}\cdot\mathfrak{r}\cdot\frac{3X}{\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2}^5}.$$

Die Fläche der Hauptströme wird

54b) $$X^2 - 4\mathfrak{r}^2 = 0.$$

Für die durch Verschiebung eines unendlich kurzen Solenoides (an Stelle des einen unendlich kleinen Kreisstromes) verursachte Induction hat man (ähnlich wie oben)

$$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = \frac{\varepsilon}{2} J\lambda\delta\frac{d\xi}{dt}\cdot\mathfrak{r}\cdot\frac{3X\,d\xi}{\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2}^5},$$

und für die durch ein Solenoid, dessen Pole die Coordinaten $x = \xi$, $y = z = 0$, bez. $x = \xi'$, $y = z = 0$ haben, bewirkte Induction, falls wir wiederum die Bezeichnungen X', M und M' gebrauchen:

$$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{d\xi}{dt}\mathfrak{r}\left(\frac{M}{\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2}^3} + \frac{M}{\sqrt{X'^2+\mathfrak{r}^2}^3}\right).$$

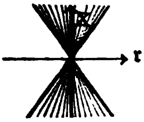
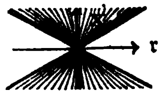
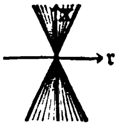
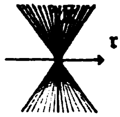
Ziehen wir, wie vorhin, nur einen Pol in Betracht, indem wir $\xi' = \infty$ setzen, so erhalten wir

54c) $$\varkappa i_{\tilde{\omega}} = -\frac{\varepsilon}{2} M\frac{d\xi}{dt}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{\sqrt{X^2+\mathfrak{r}^2}^3}.$$

Die einer derartigen Induction entsprechende Fläche der Hauptströme hat als Gleichung

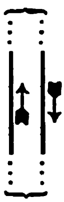
54d) $$X^2 - 2\mathfrak{r}^2 = 0.$$

Dieser Rotationskegel hat seine Spitze, wie der Kegel 53d), in dem inducirten Pole; und die Spitze des Kegels 54q) liegt, wie die des Kegels 53b), an dem Orte des inducirenden Stromes.

	Unendlich kurzes Solenoid.	Solenoidpol.
Intensitäts-änderung	$X^2 - 2r^2 = 0$ 	$X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} r^2 = 0$ 
Ver-schiebung	$X^2 - 4r^2 = 0$ 	$X^2 - 2r^2 = 0$ 

Die vier Gleichungen $\left\{\begin{matrix} 53\,b, & d \\ 54\,b, & d \end{matrix}\right\}$ ergeben das Resultat, erstens dass die einem Solenoidpol entsprechende Fläche der Hauptströme weniger spitz zuläuft als die entsprechende Fläche für einen einzelnen unendlich kleinen inducirenden Strom oder, was dasselbe besagt, als die einem unendlich kurzen Solenoid entsprechende Fläche, gleichviel, ob man Induction durch Intensitätsänderung oder durch Verschiebung vor sich hat; und zweitens, dass die der Induction durch Intensitätsänderung entsprechende Kegelfläche weniger spitz zuläuft als die der Induction durch Verschiebung zugehörende Fläche, gleichviel, ob die Induction von einem unendlich kurzen Solenoid oder von einem Solenoidpol ausgeht. Mit dem letzteren Ergebnisse harmonirt die Bemerkung S. 224, dass bei der Induction durch einen endlichen Kreisstrom die Fläche der Hauptströme, welche der durch Intensitätsänderung bewirkten Induction entspricht, die andere Fläche, welche der durch Verschiebung bewirkten Induction zugehört, umschliesst. Etwas ganz Aehnliches ergiebt sich aus unserem zweiten Beispiele, zu welchem wir jetzt übergehen.

Zweites Beispiel. Der Conductor sei zu zweit eine unendlich grosse ebene Platte von beliebiger Dicke, und der Inducent σ eine unendlich lang ausgezogene, der Platte parallele Ellipse, d. h. er bestehe aus zwei einander und der Platte parallelen, in gleichem Abstande über derselben hinlaufenden geradlinigen Drähten, welche jederseits im Unendlichen ineinander übergehen. Sollen diese Drähte einem einzigen geschlossenen Strome als Leiter dienen, so müssen die sie einzeln durchfliessenden Ströme entgegengesetzte Richtung haben.



Die yz-Ebene sei der Platte parallel, die x-Axe also auf ihr senkrecht; die beiden Drähte seien der y-Axe parallel, und zwar gehe der eine durch den Punkt $x=\xi$, $y=0$, $z=-a$, der andere durch den Punkt $x=\xi$, $y=0$, $z=+a$ der xz-Ebene, so dass ihr gegenseitiger Abstand $2a$ beträgt.

Dann besteht zunächst die Begrenzung des Conductors aus zwei der yz-Ebene parallelen Ebenen; folglich ist die Oberflächennormale n durchweg der x-Axe parallel (und also auf dem Inducenten senkrecht). Somit ist, welchen Oberflächenpunkt man auch betrachtet, nach 27) und 28)

$$\overline{V}_n = J\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial r}{\partial \sigma}\,d\sigma = -J\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma \frac{\cos(n,\sigma)}{r}\,d\sigma = 0$$

wegen $\cos(n,\sigma)=0$. Bleibt daher der Inducent beständig der Platte parallel, so ist auch $\frac{\partial \overline{V}_n}{\partial t}=0$, und also muss nach 25) auch durchweg

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial n}=0$$

sein. Diese Bedingung im Verein mit 23) und 26) macht ψ im Innern der Platte zu einer Constanten; und da nach 29) auch V_x gegenwärtig verschwindet, welchen Punkt (x, y, z) im Innern man auch ins Auge fasse, und auch Null bleibt $\left(\text{d. h. } \frac{\partial V_x}{\partial t}=0 \text{ ist}\right)$, falls, wie wir fernerhin voraussetzen, der Inducent der Platte parallel bleibt, so folgt nunmehr aus 16), dass durchweg $i_x=0$ ist, d. h., dass alle inducirten Strömungen in der yz-Ebene parallelen Ebenen stattfinden; und weiter $\varkappa i_y=\frac{\partial V_y}{\partial t}$, $\varkappa i_z=\frac{\partial V_z}{\partial t}$.

Dies Alles gilt, welche Gestalt auch der Inducent habe, wenn er nur in einer der Platte parallelen Ebene gelegen ist und stets der Platte parallel bleibt.

Betrachten wir, zu dem vorhin beschriebenen Inducenten uns wendend, zunächst V_z. Wir setzen voraus, dass jener Inducent nicht nur beständig der Platte parallel bleibt, sondern auch nur sich selbst und nur der xy-Ebene parallel bewegt werde. Weil dann längs des ganzen Inducenten $\cos(z,\sigma)=0$ ist und bleibt, so ist nach 29) sowohl V_z als $\frac{\partial V_z}{\partial t}$ gleich Null, mithin nach dem Vorigen auch durchgehends

$$i_z=0.$$

Sonach finden alle inducirten Strömungen in zur y-Axe (oder zum Inducenten) parallelen Geraden statt.

Es bleibt nun noch i_y zu berechnen. Setzen wir voraus, dass der den Inducenten durchfliessende Strom längs desjenigen Drahtes, welcher durch den Punkt $x=\xi$, $y=0$, $z=-a$ geht, die Richtung der positiven y-Axe, in demjenigen Draht, welcher durch den Punkt $x=\xi$, $y=0$, $z=+a$ geht, die Richtung der negativen y-Axe habe, so ist im ersten Draht $d\sigma$ identisch mit $d\eta$, im zweiten mit $-d\eta$, und gleichzeitig im ersten

$cos(y, \sigma) = cos\, 0 = 1$, im zweiten $cos(y, \sigma) = cos\, \pi = -1$. Folglich wird nach 29)

$$V_y = -J\frac{\varepsilon}{2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(a+z)^2}}\right.$$
$$\left.+\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(a-z)^2}}\right\},$$

oder, wenn man statt η als Integrationsvariable $\eta+y$ einführt und, wie im ersten Beispiele, $\xi - x = X$ setzt:

$$V_y = -J\frac{\varepsilon}{2}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2+X^2+(a+z)^2}} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2+X^2+(a-z)^2}}\right\}$$
$$= -J\frac{\varepsilon}{2}\, lg\left(\frac{X^2+(z-a)^2}{X^2+(z+a)^2}\right).$$

Da $\varkappa i_y = \frac{\partial V_y}{\partial t}$ ist, und im vorstehenden Ausdrucke sich nach Voraussetzung nur J und ξ ändern, so ergiebt sich durch Differentiation nach der Zeit, dass für die durch Intensitätsänderung allein erzeugten Ströme

55a) $$'\varkappa i_y = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\cdot lg\left(\frac{X^2+(z-a)^2}{X^2+(z+a)^2}\right),$$

für die von der Verschiebung allein herrührenden aber

55b) $$\varkappa i_y = -\varepsilon . J X\frac{d\xi}{dt}\left(\frac{1}{X^2+(z-a)^2} - \frac{1}{X^2+(z+a)^2}\right)$$

ist.

Wir wollen aus diesen Gleichungen noch die Flächen der „Hauptströme" ableiten, wenn wir wieder als Hauptströme einer der yz-Ebene parallelen Ebene im Innern der Platte die relativ stärksten Inductionsströme verstehen. Die genannten Flächen müssen offenbar, der Gestalt der Inductionsströme entsprechend, Cylinder sein, welche auf der xz-Ebene senkrecht stehen.

Der Gleichung 55a) gemäss ergiebt sich die Flächengleichung [von der Form $z = z(X)$] aus der Bedingung $\frac{\partial}{\partial z} lg\left(\frac{X^2+(z-a)^2}{X^2+(z+a)^2}\right) = 0$ oder also, die Flächengleichung ist

56a) $$X^2 = z^2 - a^2;$$

aus 55b) ergiebt sich analog die Flächengleichung

56b) $$(X^2+z^2+a^2)^2 - 4z^2(X^2+z^2) = 0,$$

welche sich, wenn man Polarcoordinaten einführt: $r^2 = X^2 + z^2$, $z = r\, cos\vartheta$, in die einfache Gestalt

$$r = \frac{a}{\sqrt{2\, cos\vartheta - 1}}$$

versetzen lässt.

Die Basis des Cylinders 56a) ist eine gleichseitige Hyperbel, welche die Asymptoten $X = \pm z$ besitzt, und die Basis des Cylinders 56b) eine Curve vierter Ordnung, ebenfalls mit zwei Asymptoten, nämlich für $\pm\vartheta = arccos \frac{1}{3}$. Beide Flächen gehen, wie die Hauptflächen, welche wir im vorigen Beispiele bei der Induction durch einen endlichen Kreisstrom erwähnten, durch den Inducenten selbst hindurch. Uebrigens erkennt man sofort, wenn man die Asymptotengleichungen der Flächen betrachtet ($X = \pm z$ im ersten, $X = \pm \sqrt{3}\, z$ im zweiten Falle), dass die der Intensitätsänderung entsprechende Fläche sich weiter von der xy-Ebene entfernt, als die der Verschiebung entsprechende, was in Einklang steht mit den Bemerkungen S. 227.

Es ist leicht, auf ähnliche Weise die bei einer seitlichen Verschiebung (d. h. parallel der yz-Ebene) unseres Inducenten entstehenden Inductionsströme zu behandeln u. s. w.

Was im zweiten Beispiele die freie Elektricität betrifft, so ergiebt sich, wie man leicht erkennt, aus 11) $U = 0$; und da auch $\psi = const.$ sich ergeben hat, so gilt hier dasselbe, was im ersten Beispiel S. 220 ausgeführt wurde.

(Schluss folgt.)

XIV.

Ueber die Form der logarithmischen Integrale einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung.

Von

C. Koehler

in Heidelberg.

Wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\text{A)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdot\cdot + P_m y = q,$$

in welcher $P_1, .., P_m, q$ algebraische Functionen von x bedeuten, gegeben ist und man ein Integral y derselben, das eine willkürliche Constante μ enthält, kennt, so ist jede Ableitung von y nach μ ein Integral der zu A) gehörigen reducirten Differentialgleichung

$$\text{B)} \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdot\cdot + P_m y = 0,$$

wie man direct sieht, wenn man die Gleichung A) nach dem von x unabhängigen μ beliebig oft differentiirt und die Reihenfolge der Differentiationen nach x und nach μ ändert.

Besitzt nun die Differentialgleichung A) ein Integral

$$1) \qquad y = f(x, \vartheta_1, .., \vartheta_n),$$

in welchem f eine algebraische Function von $x, \vartheta_1, \vartheta_2, .., \vartheta_n$ ist und die Grössen $\vartheta_1, \vartheta_2, .., \vartheta_n$ algebraisch voneinander unabhängige Logarithmen bedeuten, deren Ableitungen algebraische Functionen von x sind, so ist auch der Ausdruck

$$Y = f(x, \vartheta_1 + \mu_1, .., \vartheta_n + \mu_n)$$

mit den willkürlichen Constanten μ_i ein Integral dieser Differentialgleichung. Der Beweis dieses Satzes ist für die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung von Herrn Liouville (Liouv. Journ. t. 4 S. 423 flgg.), für die lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in meiner Doctorarbeit (Leipzig, 1879), für eine beliebige algebraische Differentialgleichung von Herrn Königsberger (Journ. für Math. 1886, Bd. 99 S. 10 flgg.) gegeben.

Wenn wir nun Y nach den Constanten $\mu_1, \mu_2, .., \mu_n$ beliebig oft differentiiren, also den Ausdruck bilden

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} Y}{\partial \mu_1^{\alpha_1}\partial \mu_2^{\alpha_2}\cdots\partial \mu_n^{\alpha_n}},$$

in welchem die positiven ganzen Zahlen α_i bis auf eine auch alle gleich Null sein können, so ist nach den obigen Auseinandersetzungen dieser Ausdruck stets ein Integral der reducirten Differentialgleichung B). Setzen wir nun die willkürlichen Constanten μ_i sämmtlich gleich Null, so ist demnach auch jeder Ausdruck von der Form

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} y}{\partial \vartheta_1^{\alpha_1}\partial \vartheta_2^{\alpha_2}\cdots\partial \vartheta_n^{\alpha_n}}$$

ein Integral der Differentialgleichung B), wir haben also folgenden Satz bewiesen:

I. Wenn man ein Integral der Differentialgleichung A), welches die Form 1) besitzt, beliebig oft nach den in ihm enthaltenen Logarithmen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ differentiirt, so ist jede auf diese Weise gebildete Ableitung ein Integral der reducirten Differentialgleichung B).

Mit Hilfe dieses Satzes, der für die Theorie der hier von uns betrachteten Integrale von grundlegender Bedeutung ist, lässt sich die Form, welche dieselben immer besitzen müssen, leicht feststellen. Bilden wir nämlich durch Differentiation nach ϑ_1 die $m+1$ Integrale der Differentialgleichung B)

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta_1}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m+1} y}{\partial \vartheta_1^{m+1}}$$

und nehmen an, dass keines derselben identisch verschwindet, so muss zwischen ihnen jedenfalls eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, d. h. eine Gleichung von der Form

$$a_0\frac{\partial^{m+1} y}{\partial \vartheta_1^{m+1}} + a_1\frac{\partial^m y}{\partial \vartheta_1^m} + \cdots + a_m\frac{\partial y}{\partial \vartheta_1} = 0$$

bestehen, in welcher sicher nicht alle Constanten a_i gleich Null sind.

Da diese Gleichung eine in ϑ_1 identische sein muss, weil sie sonst eine algebraische Beziehung zwischen den Logarithmen ϑ_i ergäbe, so können wir sie als lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten für y als Function von ϑ_1 betrachten. Nun ist nach Voraussetzung y eine algebraische Function von ϑ_1; die Integrale einer solchen Differentialgleichung sind aber Exponentialfunctionen von ϑ_1, die noch mit ganzen rationalen Functionen dieser Grösse multiplicirt sein können; sie selbst kann demnach nur, wenn die Gleichung

$$a_0 r^{m+1} + a_1 r^m + \cdots + a_m r = 0$$

$r=0$ als mehrfache Wurzel besitzt, also die Coefficienten $a_m = a_{m-1} = \cdots = a_{m-p+1} = 0$ sind, durch eine algebraische, nämlich durch eine ganze rationale Function p^{ten} Grades von ϑ_1 befriedigt werden. Es muss somit, da p höchstens gleich m sein kann, jedenfalls, wenn nicht schon eine niederere Ableitung von y nach ϑ_1 verschwindet, die $(m+1)^{te}$ Ableitung dieser Function nach ϑ_1 identisch gleich Null sein, d. h. y selbst muss eine ganze rationale Function von ϑ_1 sein und kann diesen Logarithmus höchstens in der m^{ten} Potenz enthalten. Da diese Betrachtung ebenso für jeden der übrigen in y vorkommenden Logarithmen $\vartheta_2, \vartheta_3, .., \vartheta_n$ bestehen bleibt, so gilt folgender Satz:

II. Die Differentialgleichung A) kann durch ein Integral y von der Form 1) nur dann befriedigt werden, wenn dieses eine ganze rationale Function aller in ihm vorkommenden Logarithmen ist, welche keinen derselben in einem höheren als dem m^{ten} Grade enthält. Die Coefficienten der einzelnen Glieder dieser ganzen rationalen Function sind algebraische Functionen von x oder, wenn y die Variable x nicht explicite enthält, Constanten.

Hieraus ergiebt sich unter Zuziehung des Satzes I der weitere Satz:

III. Wenn ein Integral von der Form 1) der Differentialgleichung A) genügt, so besitzt die Differentialgleichung B) stets ein algebraisches Integral, das sich, falls $P_m=0$ ist, auf eine Constante reduciren kann.

Man kann jetzt ferner leicht zeigen, dass eine ganze rationale Function von Logarithmen, welche der Differentialgleichung A) genügen soll, nicht nur, wie der vorhin bewiesene Satz aussagt, in keinem der einzelnen Logarithmen den m^{ten} Grad überschreiten darf, sondern dass sie überhaupt von keiner höheren als der m^{ten} Dimension in den Logarithmen sein kann.

Sei nämlich

$$y=\psi_0\,\vartheta_1^{\alpha_1}\vartheta_2^{\alpha_2}..\,\vartheta_n^{\alpha_n}+\cdot\cdot$$

eine ganze rationale Function r^{ten} Grades von $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$, welche der Differentialgleichung A) genügt, und das angeschriebene Glied eines der in ihr vorkommenden Glieder r^{ter} Dimension, also $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=r$ und ψ_0 nicht gleich Null, dann bilden wir folgende Integrale der Differentialgleichung B):

$$\frac{\partial y}{\partial\vartheta_1},\ \frac{\partial^2 y}{\partial\vartheta_1^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha_1} y}{\partial\vartheta_1^{\alpha_1}},\ \frac{\partial^{\alpha_1+1} y}{\partial\vartheta_1^{\alpha_1}\partial\vartheta_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} y}{\partial\vartheta_1^{\alpha_1}\partial\vartheta_2^{\alpha_2}},$$
$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+1} y}{\partial\vartheta_1^{\alpha_1}\partial\vartheta_2^{\alpha_2}\partial\vartheta_3},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdot\cdot+\alpha_n} y}{\partial\vartheta_1^{\alpha_1}\ldots\partial\vartheta_n^{\alpha_n}}=\alpha_1!\,\alpha_2!\,..\,\alpha_n!\,\psi_0$$

und bezeichnen sie mit $y_1, y_2 .. y_r$. Diese Integrale, die alle voneinander und von Null verschieden sind, können durch eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten nicht verbunden sein; denn aus der Gleichung

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdot\cdot+c_ry_r=0$$

würde, da dieselbe eine in den Logarithmen identische sein müsste, jedes der Integrale aber von einer um eine Einheit niedrigeren Dimension in den

Grössen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ ist als das vorhergehende, successive folgen $c_1=0$, $c_2=0, \ldots, c_r=0$. Daraus ergiebt sich aber, da zwischen mehr als m In- Integralen der Differentialgleichung B) eine solche Relation immer bestehen muss, dass r höchstens gleich m sein kann, y also als Function von $\vartheta_1 \ldots \vartheta_n$ höchstens vom m^{ten} Grade ist. Satz II lässt sich demnach jetzt folgendermassen aussprechen:

IIa. Der Differentialgleichung A) kann durch ein Integral von der Form 1) jedenfalls nur dann genügt werden, wenn dasselbe eine ganze rationale Function sämmtlicher in ihm enthaltenen Logarithmen ist. Die Dimension dieser Function darf die Ordnungszahl der Differentialgleichung keinenfalls überschreiten.*

Im Folgenden soll nun speciell die Form derjenigen logarithmischen Integrale der Differentialgleichung A), welche von der höchsten möglichen, also von der m^{ten} Dimension in den Logarithmen sind, noch genauer festgestellt werden.

---

* Es sei beiläufig bemerkt, dass die bewiesenen Sätze sämmtlich ihre Giltigkeit behalten, wenn das Integral y der Differentialgleichung A) ausser den Logarithmen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ auch noch eine Anzahl algebraisch von diesen und voneinander unabhängiger Abel'scher Integrale enthält, deren Grenzen algebraische Functionen von x sind.

Wendet man dann diese Sätze z. B. auf die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=q$$

an, so sagen sie aus, dass, falls die Differentialgleichung ein Integral von der Form 1) besitzt, dieses eine lineare Function der darin enthaltenen Transcendenten sein muss, deren Coefficienten Integrale der reducirten Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=0$, also constante Grössen sind; sie ergeben somit den bekannten Satz über den Zusammenhang zwischen $\int q\,dx$, Logarithmen und anderen Abel'schen Integralen. (Vergl. auch die oben citirte Abhandlung des Herrn Königsberger, S. 16.)

Ferner sei erwähnt, dass die gefundenen Sätze, falls die vorgelegte Differentialgleichung selbst schon eine lineare homogene ist, folgendermassen zu modificiren sind:

I. Wenn man ein Integral der Differentialgleichung B), welches die Form 1) besitzt, beliebig oft nach den in ihm enthaltenen Logarithmen differentiirt, so erhält man immer wieder ein Integral derselben Differentialgleichung.

IIa. Der Differentialgleichung B) kann durch ein Integral von der Form 1) jedenfalls nur dann genügt werden, wenn dasselbe eine ganze rationale Function aller in ihm enthaltenen Logarithmen ist. Die Dimension dieser Function darf die um eine Einheit verminderte Ordnungszahl der Differentialgleichung keinenfalls überschreiten.

III. Wenn ein Integral von der Form 1) der Differentialgleichung B) genügt, so besitzt dieselbe stets auch ein algebraisches Integral, welches sich, falls $P_m=0$ ist, auf eine Constante reduciren kann.

Ist

2)
$$y = \overset{m}{F}(x, \vartheta_1, \vartheta_2, .., \vartheta_n)$$

ein Integral der Differentialgleichung A), das — als Function der algebraisch voneinander unabhängigen Logarithmen betrachtet — den m^{ten} Grad wirklich erreicht, so muss mindestens einer dieser Logarithmen selbst diesen Grad erreichen. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = m$ und $\psi_0 \vartheta_1^{\alpha_1} \vartheta_2^{\alpha_2} .. \vartheta_n^{\alpha_n}$ eines derjenigen Glieder m^{ter} Dimension von y, welche die höchste Potenz von ϑ_1 enthalten. Die Integrale der Differentialgleichung B)

3)
$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta_1^2}, .., \frac{\partial^{\alpha_1} y}{\partial \vartheta_1^{\alpha_1}}, \frac{\partial^{\alpha_1+1} y}{\partial \vartheta_1^{\alpha_1} \partial \vartheta_2}, .., \frac{\partial^m y}{\partial \vartheta_1^{\alpha_1} \partial \vartheta_2^{\alpha_2} .. \partial \vartheta_n^{\alpha_n}}$$

können dann durch eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten nicht verbunden sein, sie bilden also ein Fundamentalsystem, und es müssen sich mithin durch sie die Integrale

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta_i} = \alpha_i \psi_0 \vartheta_1^{\alpha_1} .. \vartheta_i^{\alpha_i - 1} .. \vartheta_n^{\alpha_n} + ..$$
$$(i = 2, 3, .., n),$$

die ebenfalls dieser Differentialgleichung genügen, linear und homogen darstellen lassen.

Nun ist aber die höchste Potenz von ϑ_1, welche in den Gliedern höchster Dimension der Integrale 3) auftritt, die $(\alpha_1 - 1)^{\text{te}}$; da ψ_0 nicht gleich Null ist, so ist demnach eine solche Darstellung nur möglich, wenn $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$, also

$$\alpha_1 = m$$

ist; y enthält somit nothwendig das Glied $\psi_0 \vartheta_1^m$, d. h.:

Wenn die Differentialgleichung A) ein Integral von der Form 2) besitzt, so muss mindestens einer der darin enthaltenen Logarithmen im m^{ten} Grade auftreten.

Sei ϑ_1 dieser Logarithmus, also $y = \psi_0 \vartheta_1^m + \cdot\cdot$, dann bilden die Integrale

4)
$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta_1^2}, .., \frac{\partial^m y}{\partial \vartheta_1^m}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung B) und enthalten bis auf das letzte alle den Logarithmus ϑ_1, während

$$\frac{\partial^m y}{\partial \vartheta_1^m} = m!\, \psi_0$$

eine algebraische Function von x oder eine von Null verschiedene Constante ist. Durch dieses Fundamentalsystem müssen sich die Integrale $\frac{\partial y}{\partial \vartheta_\nu}$ $(\nu = 2, 3, .., n)$ der Differentialgleichung B) linear und homogen ausdrücken lassen; es müssen also die Gleichungen bestehen:

5)
$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta_\nu} = \overset{\nu}{c} \frac{\partial y}{\partial \vartheta_1} + \overset{\nu}{c_0} \frac{\partial^2 y}{\partial \vartheta_1^2} + c_1 \frac{\partial^3 y}{\partial \vartheta_1^3} + \cdots + \overset{\nu}{c}_{m-2} \frac{\partial^m y}{\partial \vartheta_1^m}$$
$$(\nu = 2, 3, .., n),$$

in welchen die $\overset{\nu}{c}_i$ constante Grössen bedeuten. Führen wir jetzt für ϑ_1 die neue Variable η ein durch die Gleichung

$$\vartheta_1 = \eta - \overset{2}{c}\vartheta_2 - \overset{3}{c}\vartheta_3 - \cdots - \overset{n}{c}\vartheta_n$$

und bezeichnen y als Function von $x, \eta, \vartheta_2 \ldots \vartheta_n$ vorläufig mit $\bar{y}$, so ist offenbar identisch

$$\frac{\partial^r y}{\partial \vartheta_1{}^r} = \frac{\partial^r \bar{y}}{\partial \eta_1{}^r}, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta_\nu} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta_\nu} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \vartheta_\nu} = \overset{\nu}{c}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \vartheta_\nu},$$

es gehen somit die Gleichungen 5) unter Berücksichtigung dieser beiden Gleichungen über in

5a) $$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \vartheta_\nu} = \overset{\nu}{c}_0 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \eta^2} + \overset{\nu}{c}_1 \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial \eta^3} + \cdots + \overset{\nu}{c}_{m-2} \frac{\partial^m \bar{y}}{\partial \eta^m}$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, n),$$

und es treten die Integrale

6) $$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \eta^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m \bar{y}}{\partial \eta^m}$$

an die Stelle des Fundamentalsystems 4).

Um die weiteren Ableitungen von $\bar{y}$, wofür wir von jetzt ab wieder y schreiben wollen, nach ϑ_ν durch die Integrale 6) auszudrücken, setzen wir

7) $$\sum \frac{\alpha!}{\lambda_0!\,\lambda_1!\ldots\lambda_r!}\, \overset{\nu}{c}_0{}^{\lambda_0}\, \overset{\nu}{c}_1{}^{\lambda_1} \ldots \overset{\nu}{c}_r{}^{\lambda_r} = \overset{\nu}{g}_r{}^{(\alpha)}$$
$$\left(\sum_0^r \lambda_\varrho = \alpha, \quad \sum_1^r \varrho\lambda_\varrho = r\right),$$

dann gilt für die so definirte Grösse die Gleichung

8) $$\overset{\nu}{c}_0 \overset{\nu}{g}_r{}^{(\alpha)} + \overset{\nu}{c}_1 \overset{\nu}{g}_{r-1}{}^{(\alpha)} + \cdots + \overset{\nu}{c}_r \overset{\nu}{g}_0{}^{(\alpha)} = \overset{\nu}{g}_r{}^{(\alpha+1)},$$

mit deren Hilfe man durch den Schluss von α auf $\alpha + 1$ beweist, dass

$$\frac{\partial^{\alpha_\nu} y}{\partial \vartheta_\nu{}^{\alpha_\nu}} = \sum_{r_\nu = 0}^{m - 2\alpha_\nu} \overset{\nu}{g}_{r_\nu}{}^{(\alpha_\nu)} \frac{\partial^{2\alpha_\nu + r_\nu} y}{\partial \eta^{2\alpha_\nu + r_\nu}}$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man

9) $$\sum_{r_2 + r_3 + \cdots + r_n = r} \overset{2}{g}_{r_2}{}^{(\alpha_2)}\, \overset{3}{g}_{r_3}{}^{(\alpha_3)} \ldots \overset{n}{g}_{r_n}{}^{(\alpha_n)} = G_r^{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}$$

setzt,

10) $$\frac{\partial^s y}{\partial \vartheta_2{}^{\alpha_2} \partial \vartheta_3{}^{\alpha_3} \ldots \partial \vartheta_n{}^{\alpha_n}} = \sum_{r=0}^{m-2s} G_r^{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n} \frac{\partial^{2s+r} y}{\partial \eta^{2s+r}}$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = s).$$

Sind alle α_i ausser α_ν gleich Null, so muss, wenn diese Gleichung Giltigkeit behalten soll,

$$G_r^{0,\ldots,\alpha_\nu,\ldots,0} = \sum_{r_2 + r_3 + \cdots + r_n = r} \overset{2}{g}_{r_2}{}^{(0)} \ldots \overset{\nu}{g}_{r_\nu}{}^{(\alpha_\nu)} \ldots \overset{n}{g}_{r_n}{}^{(0)}$$

in $\overset{\nu}{g}_r{}^{(\alpha_\nu)}$ übergehen; wir müssen deshalb festsetzen, dass $\overset{\varrho}{g}_t{}^{(0)}$ gleich Eins oder gleich Null sein soll, je nachdem t gleich oder grösser als Null ist.

Aus Gleichung 10), in welcher die Grössen $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ nur der Bedingung $\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = s$ unterworfen sind, folgt, wenn man in ihr s gleich der grössten in $\frac{m}{2}$ steckenden ganzen Zahl h $\left(h = \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ setzt, sie dann nach irgend einem der Logarithmen $\vartheta_2 \ldots \vartheta_n$ differentiirt und die Gleichungen 5a) berücksichtigt, dass jede Ableitung von y nach beliebigen dieser Grössen, deren Ordnungszahl grösser als h ist, identisch verschwindet. Es kann somit y selbst, nachdem die neue Variable η eingeführt ist, in den Logarithmen $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n$ höchstens von der h^{ten} Dimension sein. — Auch sei gleich hier bemerkt, dass sich aus Gleichung 9) durch Benützung von Gleichung 8) die für das Folgende wichtige Relation ergiebt:

$$11)\qquad G_r^{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n} = \sum_{\mu + \varrho = r}^{\nu} c_\mu \, G_\varrho^{\alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu - 1, \alpha_{\nu+1} \ldots \alpha_n}$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Wir entwickeln jetzt y nach Potenzen von $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n$ und deuten durch das Zeichen $(f)_0$ an, dass in dem Ausdrucke f $\vartheta_2 = \vartheta_3 = \cdots = \vartheta_n = 0$ gesetzt werden soll, dann wird

$$y = (y)_0$$
$$+ \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = s} \frac{s!}{\alpha_2! \, \alpha_3! \ldots \alpha_n!} \vartheta_2^{\alpha_2} \vartheta_3^{\alpha_3} \ldots \vartheta_n^{\alpha_n} \left(\frac{\partial^s y}{\partial \vartheta_2^{\alpha_2} \partial \vartheta_3^{\alpha_3} \ldots \partial \vartheta_n^{\alpha_n}} \right)_0$$

und geht unter Berücksichtigung von Gleichung 10) über in

$$12)\qquad y = (y)_0$$
$$+ \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = s} \frac{s!}{\alpha_2! \, \alpha_3! \ldots \alpha_n!} \vartheta_2^{\alpha_2} \vartheta_3^{\alpha_3} \ldots \vartheta_n^{\alpha_n} \sum_{r=0}^{m-2s} G_r^{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n} \left(\frac{\partial^{2s+r} y}{\partial \eta^{2s+r}} \right)_0 .$$

Wenn man nun $(y)_0$, welche Grösse eine ganze rationale Function m^{ten} Grades von η allein ist, deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind, mit z bezeichnet, also setzt

$$13)\qquad (y)_0 = \psi_0 \eta^m + \psi_1 \eta^{m-1} + \cdots + \psi_m = z,$$

und wenn man ausserdem noch, was erlaubt ist, in Gleichung 12) die beiden letzten Summenzeichen miteinander vertauscht und dann

$$14)\qquad \sum_{\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n = s} \frac{s!}{\alpha_2! \, \alpha_3! \ldots \alpha_n!} G_r^{\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n} \vartheta_2^{\alpha_2} \vartheta_3^{\alpha_3} \ldots \vartheta_n^{\alpha_n} = \pi_r^{(s)}$$

setzt, so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$15)\qquad y = z + \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{s!} \sum_{r=0}^{m-2s} \pi_r^{(s)} \frac{\partial^{2s+r} z}{\partial \eta^{2s+r}} .$$

Der Ausdruck $\pi_r^{(s)}$ enthält die $n-1$ Logarithmen $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n$ in wenig übersichtlicher Form; es lässt sich aber zeigen, dass er sich stets darstellen lässt als ganze rationale Function von $m-1$ neuen Logarithmen, die sich auf sehr einfache Weise aus $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_n$ zusammensetzen und deren Ableitungen ebenfalls algebraische Functionen von x sind.

Setzt man nämlich

16) $$\sigma_\mu = \overset{2}{c}_\mu \vartheta_2 + \overset{3}{c}_\mu \vartheta_3 + \cdots + \overset{n}{c}_\mu \vartheta_n \qquad (\mu = 0, 1, .., m-2)$$

und definirt die Grösse $\tau_r^{(s)}$ durch die Gleichung

17) $$\tau_r^{(s)} = \sum \frac{s!}{\lambda_0!\,\lambda_1!\,..\,\lambda_r!}\,\sigma_0^{\lambda_0}\sigma_1^{\lambda_1}\,..\,\sigma_r^{\lambda_r}$$
$$\left(\sum_0^r \lambda_\varrho = s, \quad \sum_1^r \varrho\lambda_\varrho = r\right),$$

so kann man beweisen, dass $\tau_r^{(s)}$ mit dem durch Gleichung 14) definirten $\pi_r^{(s)}$ identisch ist. Wie man sich direct überzeugt, gilt die Gleichung

18) $$\tau_r^{(s)} = \pi_r^{(s)}$$

bei beliebigen Werthen von r für $s = 1$; man hat deshalb nur zu zeigen, dass dieselbe — ihre Giltigkeit für den Index s vorausgesetzt — auch für den Index $s+1$ richtig bleibt.

Seiner Definition gemäss besteht für $\tau_r^{(s+1)}$ die Gleichung

$$\tau_r^{(s+1)} = \sigma_0\tau_r^{(s)} + \sigma_1\tau_{r-1}^{(s)} + \cdots + \sigma_r\tau_0^{(s)} = \sum_{\mu+\varrho=r}\sigma_\mu\tau_\varrho^{(s)},$$

also ist, da Gleichung 18) für den Index s als bewiesen angenommen wird,

$$\tau_r^{(s+1)} = \sum_{\mu+\varrho=r}\sigma_\mu\pi_\varrho^{(s)}.$$

Setzt man hierin für $\pi_\varrho^{(s)}$ aus Gleichung 14) seinen Werth und vertauscht, was erlaubt ist, die beiden vorkommenden Summenzeichen miteinander, so wird

$$\tau_r^{(s+1)} = \sum_{\alpha_2+\alpha_3+..+\alpha_n=s}\frac{s!}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,..\,\alpha_n!}\sum_{\mu+\varrho=r}\sigma_\mu G_\varrho^{\alpha_2\alpha_3..\alpha_n}\vartheta_2^{\alpha_2}\vartheta_3^{\alpha_3}\,..\,\vartheta_n^{\alpha_n}$$

oder unter Berücksichtigung von Gleichung 16)

$$\tau_r^{(s+1)} = \sum_{\alpha_2+\alpha_3+..+\alpha_n=s}\frac{s!}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,..\,\alpha_n!}\sum_{\mu+\varrho=r}G_\varrho^{\alpha_2\alpha_3..\alpha_n}\vartheta_2^{\alpha_2}\vartheta_3^{\alpha_3}\,..\,\vartheta_n^{\alpha_n}\sum_{\nu=2}^{n}\overset{\nu}{c}_\mu\vartheta_\nu.$$

Wenn man jetzt α_ν durch $\alpha_\nu - 1$ ersetzt, so erhält man

$$\tau_r^{(s+1)} = \sum_{\alpha_2+..+\alpha_n=s+1}\frac{s!}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,..\,\alpha_n!}\vartheta_2^{\alpha_2}\vartheta_3^{\alpha_3}\,..\,\vartheta_n^{\alpha_n}\sum_{\mu+\varrho=r}\sum_{\nu=2}^{n}\alpha_\nu\overset{\nu}{c}_\mu G_\varrho^{\alpha_2..\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu-1,\alpha_{\nu+1}..}$$
$$= \sum_{\alpha_2+..+\alpha_n=s+1}\frac{s!}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,..\,\alpha_n!}\vartheta_2^{\alpha_2}\vartheta_3^{\alpha_3}\,..\,\vartheta_n^{\alpha_n}\sum_{\nu=2}^{n}\alpha_\nu\sum_{\mu+\varrho=r}\overset{\nu}{c}_\mu G_\varrho^{\alpha_2..\alpha_{\nu-1},\alpha_\nu-1,\alpha_{\nu+1}..\alpha_n}$$

es wird also unter Berücksichtigung der Gleichungen 11) und 14), da $\sum_{\nu=2}^{n}\alpha_\nu = s+1$ ist:

$$\tau_r^{(s+1)} = \sum_{\alpha_2+..+\alpha_n=s+1}\frac{(s+1)!}{\alpha_2!\,\alpha_3!\,..\,\alpha_n!}G_r^{\alpha_2\alpha_3..\alpha_n}\vartheta_2^{\alpha_2}\vartheta_3^{\alpha_3}\,..\,\vartheta_n^{\alpha_n} = \pi_r^{(s+1)},$$

die allgemeine Giltigkeit der Gleichung 18) ist somit erwiesen, und y erhält nach Gleichung 15) jetzt die Form

$$\text{C)}\qquad y = z + \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{s!} \sum_{r=0}^{m-2s} \tau_r^{(s)} \frac{\partial^{2s+r} z}{\partial \eta^{2s+r}}.$$

Da die Grössen η, σ_0, σ_1, .., σ_{m-2} als lineare homogene Functionen der mit constanten Coefficienten versehenen Logarithmen ϑ_1, ϑ_2, .., ϑ_n selbst wieder Logarithmen sind, welche algebraische Functionen von x als Ableitungen besitzen, so haben wir mithin folgenden Satz bewiesen:

IV. Wenn die Differentialgleichung A) ein Integral von der Form 2) besitzt, in welchem die Logarithmen in irgendwelcher Anzahl n auftreten, so muss sich dieses immer auf die Form C) bringen lassen, — eine Form, welche höchstens m Logarithmen, deren Ableitungen algebraische Functionen von x sind, darunter nur einen einzigen η im m^{ten} Grade enthält, während sie in allen übrigen Logarithmen σ_0, σ_1, .., σ_{m-2} höchstens von der $\left[\frac{m}{2}\right]^{\text{ten}}$ Dimension ist.

Die in dem umgeformten Integral auftretenden Logarithmen σ_0, σ_1, .., σ_{m-2} können durch algebraische Gleichungen miteinander verbunden sein, der Logarithmus η dagegen kann mit ihnen niemals in algebraischem Zusammenhang stehen, da eine algebraische Gleichung, welche η enthielte, in ϑ_1 nicht identisch sein könnte, also eine algebraische Beziehung zwischen ϑ_1 und den übrigen ursprünglich gegebenen Logarithmen ϑ_2, ϑ_3, .., ϑ_n gegen Voraussetzung ergäbe.

Es lässt sich aber auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen, also zeigen, dass jeder Ausdruck von der Form C), in welchem η, σ_0, σ_1, .., σ_{m-2} beliebige Logarithmen bedeuten, deren Ableitungen algebraische Functionen von x sind und von denen der erste von den übrigen algebraisch unabhängig ist, einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten genügt.

Um diesen Beweis zu führen, soll zunächst die Ableitung $\dfrac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m} y}{\partial \eta^{\beta_1} \partial \sigma_0^{\beta_2} \cdots \partial \sigma_{m-2}^{\beta_m}}$ durch eine Ableitung von y nach η allein ausgedrückt werden. Da sich aus Gleichung 17) ergiebt, dass

$$\frac{\partial \tau_r^{(s)}}{\partial \sigma_\mu} = s\, \tau_{r-\mu}^{(s-1)}$$

ist, so folgt aus Gleichung C)

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma_\mu} = \frac{\partial^{\mu+2} y}{\partial \eta^{\mu+2}}$$

und weiter

$$\frac{\partial^{\beta} y}{\partial \sigma_{\mu}^{\beta}} = \frac{\partial^{(\mu+2)\beta} y}{\partial \eta^{(\mu+2)\beta}},$$

es wird somit

19) $$\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m} y}{\partial \eta^{\beta_1} \partial \sigma_0^{\beta_2} \ldots \partial \sigma_{m-2}^{\beta_m}} = \frac{\partial^{\beta_1+2\beta_2+\cdots+m\beta_m} y}{\partial \eta^{\beta_1+2\beta_2+\cdots+m\beta_m}}.$$

Wir ordnen jetzt den Ausdruck C) für y nach den algebraischen Functionen $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m$ von x, die sich auch auf Constante reduciren können und von denen ψ_0 jedenfalls nicht gleich Null sein darf, weil y den Logarithmus η im m^{ten} Grade enthalten soll, und führen die von x nicht explicite abhängende Function

20) $$w = \frac{1}{m!}\left[\eta^m + \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{s!} \sum_{r=0}^{m-2s} m(m-1)\ldots(m-2s-r+1)\tau_r^{(s)}\eta^{m-2s-r}\right]$$

ein, dann wird

21) $$y = m!\,\psi_0 w + (m-1)!\,\psi_1 \frac{\partial w}{\partial \eta} + \ldots + 1!\,\psi_{m-1}\frac{\partial^{m-1} w}{\partial y^{m-1}} + \psi_m \frac{\partial^m w}{\partial \eta^m}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch m-malige Differentiation nach η m neue Gleichungen, die wir mit ihr selbst zusammenstellen:

$$y = \sum_{i=0}^{m} (m-i)!\,\psi_i \frac{\partial^i w}{\partial \eta^i},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)!\,\psi_i \frac{\partial^{i+1} w}{\partial \eta^{i+1}},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \sum_{i=0}^{m-2} (m-i)!\,\psi_i \frac{\partial^{i+2} w}{\partial \eta^{i+2}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^m y}{\partial \eta^m} = m!\,\psi_0 \frac{\partial^m w}{\partial \eta^m}.$$

Diese $m+1$ Gleichungen erlauben, da ihre Determinante gleich

$$(m!)^{m+1}.\,\psi_0^{m+1}$$

ist, also nicht identisch verschwindet, die Grössen

$$w,\ \frac{\partial w}{\partial \eta},\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^m w}{\partial \eta^m}$$

als lineare homogene Functionen von

22) $$y,\ \frac{\partial y}{\partial \eta},\ \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^m y}{\partial \eta^m},$$

deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind, darzustellen. Unter Berücksichtigung von Gleichung 19) wird demnach auch jede Ableitung von der Form

$$\frac{\partial^{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_m} w}{\partial \eta^{\gamma_1} \partial \sigma_0^{\gamma_2} \ldots \partial \sigma_{m-2}^{\gamma_m}}$$

eine lineare homogene Function der Grössen 22), deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind.

Bildet man nun aus Gleichung 21) alle Ableitungen von y nach x bis zur m^{ten}, indem man y als Function von x, η, $\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-2}$ betrachtet, so stellen sich dieselben, weil die Function w die Variable x nicht explicite enthält, dar als lineare homogene Functionen von w und dessen Ableitungen nach η, $\sigma_0, \ldots, \sigma_{m-2}$ mit algebraischen Coefficienten. w selbst aber und alle seine Ableitungen nach diesen Logarithmen kann man nach den obigen Auseinandersetzungen als lineare homogene Functionen der Grössen 22) mit algebraischen Coefficienten darstellen und erhält somit für $\dfrac{d^k y}{\partial x^k}$ die Gleichung

$$\frac{d^k y}{d x^k} = \varrho_{k0}\, y + \varrho_{k1} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \cdots + \varrho_{km} \frac{\partial^m y}{\partial \eta^m},$$

in welcher sämmtliche Grössen ϱ algebraische Functionen von x sind. Setzt man $k = 1, 2, \ldots, m$ und berücksichtigt, dass $\dfrac{\partial^m y}{\partial \eta^m} = m!\, \psi_0$ ist, so gelten demnach die Gleichungen

$$\begin{gathered} y = y, \\ \frac{dy}{dx} - \varrho_{1m}\, m!\, \psi_0 = \varrho_{10}\, y + \varrho_{11} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \cdots + \varrho_{1\,m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial \eta_{m-1}}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} - \varrho_{2m}\, m!\, \psi_0 = \varrho_{20}\, y + \varrho_{21} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \cdots + \varrho_{2\,m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial \eta_{m-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{d^m y}{dx^m} - \varrho_{mm}\, m!\, \psi_0 = \varrho_{m0}\, y + \varrho_{m1} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \cdots + \varrho_{m\,m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial \eta_{m-1}}. \end{gathered}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $P_m, P_{m-1}, \ldots, P_0$, addirt sie und bestimmt dann die $m+1$ Grössen P_i so, dass in dem Additionsresultat die Coefficienten von y, $\dfrac{\partial y}{\partial \eta}, \ldots, \dfrac{\partial^{m-1} y}{\partial \eta^{m-1}}$ verschwinden, so ergeben sich für dieselben m lineare homogene Gleichungen mit algebraischen Coefficienten, die immer auflösbar sind, weil die Anzahl der Unbekannten um eine Einheit grösser ist als diejenige der Gleichungen. Man erhält demnach, wenn man

$$m!\, \psi_0 (\varrho_{1m} P_{m-1} + \varrho_{2m} P_{m-2} + \cdots + \varrho_{mm} P_0) = q$$

setzt, für y die lineare Differentialgleichung

$$P_0 \frac{d^m y}{dx^m} + P_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m y = q,$$

in welcher $P_0, P_1, \ldots, P_m$, q algebraische Functionen von x sind und P_0 und q nicht identisch gleich Null sein können, weil η von den übrigen Logarithmen algebraisch unabhängig ist. Es ist somit der Satz bewiesen:

V. Jeder Ausdruck von der Form C), in welchem η, σ_0, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-2}$ Logarithmen bedeuten, deren Ableitungen algebraische Functionen von x sind und von denen der erste in keinem algebraischen Zusammenhang mit den übrigen steht, genügt einer algebraischen linearen nicht homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung.

Von den Logarithmen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-2}$ dürfen auch beliebig viele gleich Null sein, ohne dass der ausgesprochene Satz seine Giltigkeit verliert oder sein Beweis Modificationen verlangt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass aus IV und V sich durch Specialisirung der folgende Satz ergiebt:

Eine Form m^{ten} Grades von algebraisch voneinander unabhängigen Logarithmen, deren Ableitungen und deren Coefficienten algebraische Functionen von x sind, wird nur dann und immer dann einer algebraischen linearen nicht homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung genügen, wenn sie übergeführt werden kann in das Product aus einer algebraischen Function von x oder einer Constanten in die m^{te} Potenz eines einzigen Logarithmus, dessen Ableitung eine algebraische Function von x ist.

Kleinere Mittheilungen.

XVII. Zur synthetischen Erzeugung der Cremona'schen Transformation vierter Ordnung.

(Hierzu Taf. III Fig. 9.)

In dem Aufsatze: „Ueber eine synthetische Erzeugung der Cremona-schen Transformationen dritter und vierter Ordnung", Heft 5, Jahrg. 1887 dieser Zeitschrift, habe ich bemerkt, dass von der Transformation vierten Grades blos der Fall mit drei Doppelpunkten und drei einfachen Punkten sich erzeugen lässt, wenigstens unter Benützung der dort angewandten geometrischen Gebilde, dass dagegen der andere Fall, wo die einer Geraden entsprechende Curve vierter Ordnung einen festen Punkt zum dreifachen Punkt und sechs andere als einfache Punkte enthält, durch das dort benutzte Strahlsystem nicht zu erhalten sei.

In der That muss man auch, um diesen Fall rein geometrisch abzuleiten, die andere Art von Strahlsystemen erster Ordnung benutzen, die es noch giebt. Kummer hat ja* gezeigt, dass die Strahlsysteme erster Ordnung entweder bestehen aus dem System der Secante einer Raumcurve dritter Ordnung oder aus der Gesammtheit aller Geraden, die gleichzeitig einer Raumcurve n^{ter} Ordnung und einer diese in $(n-1)$ Punkten treffenden Geraden begegnen. Die $n-1$ Strahlbündel in diesen Schnittpunkten bleiben hierbei als abgelöste Strahlsysteme ausser Betracht. Es ist dann klar, dass durch einen Punkt des Raumes im Allgemeinen nur ein einziger Strahl geht, indem ja die durch den Punkt und die Gerade gehende Ebene die Raumcurve nur noch in einem hier in Betracht kommenden Punkte schneidet.

I.

Es ist daraus sofort zu ersehen, wie sich die in Frage stehende Cremona'sche Beziehung zwei Ebenen herstellen lässt. Nehmen wir eine Raumcurve dritter Ordnung R^3 und eine ihrer Secanten G als Brenncurven und schneiden dieses Strahlsystem mit zwei Ebenen α und β. Die Schnittpunkte dieser Ebenen mit G und R^3 seien bezüglich A_3, A'_1, A''_1, A'''_1 und B_3, B'_1, B''_1, B'''_1; ferner sei S die Schnittlinie der beiden Ebenen (Fig. 9). Dann entspricht jedem Punkte der neuen Ebene ein Punkt der andern. Eine Ausnahme machen zunächst die obigen acht Punkte. Von dem Punkte A_3 aus z. B. projicirt sich die Curve dritter Ordnung durch einen Kegel

* Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866.

dritter Ordnung und jede seiner Erzeugenden ist, da sie ja auch G in A_3 schneidet, ein Strahl des Strahlsystems. Der genannte Kegel hat die G zur Doppelerzeugenden. Dem Punkte A_3 entspricht also in β eine Curve dritter Ordnung mit B_3 als Doppelpunkt, die auch durch B'_1, B''_1, B'''_1 läuft, und ähnlich verhält es sich mit dem Punkte B_3.

Nimmt man ferner etwa den Punkt A'_1, so gehört jede Gerade durch A'_1, welche G schneidet, zu unserem Strahlsystem. Alle diese Strahlen schneiden β in einer Geraden, die auch durch den Punkt B_1^1 geht, in welchem $A'_1 A_3$ die S trifft, und durch B_3. Dies ist also eine der Hauptlinien, die dem singulären Punkte A'_1 entspricht; ebenso erhält man noch zwei andere, nämlich $\overline{B_1^2 B_3}$ und $\overline{B_1^3 B_3}$, wenn B_1^2 und B_1^3 die Schnittpunkte der Geraden $A_3 A''_1$ und $A_3 A'''_1$ mit S sind. In gleicher Weise erhält man in α drei Gerade durch A_3, welche bezüglich den Punkten B'_1, B''_1, B'''_1 entsprechen.

II.

Die Punkte B_1^1, B_1^2, B_1^3 und A_1^1, A_1^2, A_1^3, welch' letztere in ganz ähnlicher Weise durch die Schnitte der Linien $B'_1 B_3$, $B''_1 B_3$, $B'''_1 B_3$ mit S erhalten werden, sind aber selbst wieder singuläre Punkte der Ebenen β und α. Denn dem Punkte B_1^1 gehört die einzige Secante $B_1^1 A'_1 A_3$ zu und diese liegt in der Ebene α, liefert also keinen bestimmten Schnittpunkt, so dass also dem Punkte B_1^1 die sämmtlichen Punkte von $A'_1 A_3$ entsprechen. In gleicher Weise sind B_1^2, B_1^3, A_1^1, A_1^2, A_1^3 Hauptpunkte der Transformation, denen (aus der Figur leicht zu entnehmende) Gerade entsprechen.

Man zeigt ferner leicht, dass alle Strahlen des Systems, die einer Geraden begegnen, eine Regelfläche vierter Ordnung bilden, und damit ist dann erwiesen, dass einer beliebigen Geraden in α eine Curve vierter Ordnung in β entspricht, die B_3 zum dreifachen Punkt hat und durch B'_1, B''_1, B'''_1, B_1^1, B_1^2, B_1^3 einfach hindurchläuft. Für eine Gerade in β spielen A_3, A'_1, A''_1, A'''_1, B_1^1, B_1^2, B_1^3 die entsprechende Rolle. Damit ist der Charakter der Transformation als einer Cremona'schen vierter Ordnung nachgewiesen. Nimmt man allgemein eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und eine Gerade, welche dieser in $n-2$ Punkten begegnet, so erhält man eine ähnliche Cremona-Transformation n^{ter} Ordnung.*

III.

Den Umstand, dass einer Curve n^{ter} Ordnung in einer der beiden Ebenen eine Curve $4n^{\text{ter}}$ Ordnung in der andern entspricht, kann man geometrisch in folgender Weise zum Ausdruck bringen:

„Hat man eine Raumcurve dritter Ordnung und eine ihrer Secanten, so bilden alle Strahlen, welche diesen beiden Linien begegnen und überdies eine ebene Curve C^n schneiden, eine Regelfläche von der Ordnung $4n$,

* Es ist dies der schon von De Jonquières studirte Typus. Compt. rend. 1859.

welche die Secante zur $(3n)$-fachen Erzeugenden, die Raumcurve selbst zur n-fachen Curve und die in der Ebene der C^n liegenden Strahlen des Systems zu n-fachen Erzeugenden hat."

Was ferner den Grad der Allgemeinheit der vorigen Transformation vierter Ordnung betrifft, so ist dieselbe aus zwei Gründen eine specielle oder wenigstens nicht die allgemeinste.

Für's Erste liegen nämlich drei von den sechs festen einfachen Punkten Curve vierter Ordnung immer in einer Geraden, nämlich auf S, so dass der also im Ganzen sechs der singulären Punkte auf einer Geraden liegen.

Ferner ist diese Gerade S überdies eine sich selbst entsprechende Gerade der Transformation, d. h. jeder Punkt derselben fällt mit dem ihm entsprechenden zusammen. Die gleiche specielle Eigenschaft haben überdies auch die Steiner'sche sogenannte schiefe Projection und die anderen in dem citirten Artikel erzeugten Transformationen dritten und vierten Grades, und es lässt sich dieselbe bei einer directen stereometrischen Erzeugung durch Strahlsysteme nicht vermeiden.

München, 13. Januar 1888.

Karl Doehlemann,
gepr. Lehramtscandidat.

XVIII. Herleitung der Mittelpunktscoordinaten und des Halbmessers eines Kreises aus seiner Gleichung in trimetrischen Punktcoordinaten.

Die Gleichung eines jeden Kreises kann man bekanntlich auf die Form bringen:

$$1)\qquad \begin{aligned}(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)(x_1\sin\alpha+x_2\sin\beta+x_3\sin\gamma)\\ +x_2x_3\sin\alpha+x_3x_1\sin\beta+x_1x_2\sin\gamma=0,\end{aligned}$$

wo α, β, γ die Winkel des Fundamentaldreiecks und a_1, a_2, a_3 die den Kreis bestimmenden Parameter sind (vergl. Salmon, Anal. Geom. d. Kegelschnitte, Art. 160, wo jedoch der zweite Hauptposten auf der linken Seite noch den Factor k hat, den wir in den a haben aufgehen lassen). Die Länge ϱ der von dem Punkte, dessen senkrechte Entfernungen von den Dreiecksseiten gleich x'_1, x'_2, x'_3 sind, auf die gerade Linie $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0$ gefällten Senkrechten ist (a. a. O. Art. 61) gegeben durch die Gleichung:

$$2)\qquad \begin{aligned}\varrho^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-2\xi_2\xi_3\cos\alpha-2\xi_3\xi_1\cos\beta-2\xi_1\xi_2\cos\gamma)\\ =(\xi_1x'_1+\xi_2x'_2+\xi_3x'_3)^2,\end{aligned}$$

welche man als die Gleichung eines Kreises in Liniencoordinaten betrachten kann, dessen Radius gleich ϱ und dessen Mittelpunktscoordinaten gleich x'_1, x'_2, x'_3 sind; seine Gleichung in Punktcoordinaten ist daher:

$$\begin{vmatrix} x_1'^2-\varrho^2 & x'_1x'_2-\varrho^2\cos\gamma & x'_1x'_3-\varrho^2\cos\beta & x_1\\ x'_1x'_2-\varrho^2\cos\gamma & x_2'^2-\varrho^2 & x'_2x'_3-\varrho^2\cos\alpha & x_2\\ x_1x_3-\varrho^2\cos\beta & x'_2x'_3-\varrho_3\cos\alpha & x_3'^2-\varrho^2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3 & 0\end{vmatrix}=0$$

oder entwickelt:

$$
\begin{aligned}
&\varrho^2(x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma)^2 \\
&= (x_2 x'_3 - x_3 x'_2)^2 + (x_3 x'_1 - x_1 x'_3)^2 + (x_1 x'_2 - x_2 x'_1)^2 \\
3)\qquad & - 2(x_3 x'_1 - x_1 x'_3)(x_1 x'_2 - x_2 x'_1) \cos\alpha \\
& - 2(x_1 x'_2 - x_2 x'_1)(x_2 x'_3 - x_3 x'_2) \cos\beta \\
& - 2(x_2 x'_3 - x_3 x'_2)(x_3 x'_1 - x_1 x'_3) \cos\gamma.
\end{aligned}
$$

Soll 1) mit 3) identisch sein, so müssen, wie man durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen und Producte der x findet, folgende Relationen bestehen:

$$
\begin{aligned}
a_1 \sin\alpha &= \lambda\{\varrho^2 \sin^2\alpha - (x_2'^2 + x_3'^2 + 2x'_2 x'_3 \cos\alpha)\}, \\
a_2 \sin\beta &= \lambda\{\varrho^2 \sin^2\alpha - (x_3'^2 + x_1'^2 + 2x'_3 x'_1 \cos\beta)\}, \\
a_3 \sin\gamma &= \lambda\{\varrho^2 \sin^2\gamma - (x_1'^2 + x_2'^2 + 2x'_1 x'_2 \cos\gamma)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2 \sin\gamma + a_3 \sin\beta + \sin\alpha \\
4)\quad &= 2\lambda\{\varrho^2 \sin\beta \sin\gamma + x'_2 x'_3 + x'_1(-x'_1 \cos\alpha + x'_2 \cos\beta + x'_3 \cos\gamma)\}, \\
&a_3 \sin\alpha + a_1 \sin\gamma + \sin\beta \\
&= 2\lambda\{\varrho^2 \sin\gamma \sin\alpha + x'_3 x'_1 + x'_2(x'_1 \cos\alpha - x'_2 \cos\beta + x'_3 \cos\gamma)\}, \\
&a_1 \sin\beta + a_2 \sin\alpha + \sin\gamma \\
&= 2\lambda\{\varrho^2 \sin\alpha \sin\beta + x'_1 x'_2 + x'_3(x'_1 \cos\alpha + x'_2 \cos\beta - x'_3 \cos\gamma)\},
\end{aligned}
$$

aus denen wir zunächst λ bestimmen wollen. Man sieht sofort, dass die Summe der ersten, zweiten und dritten Gleichung gleich ist der Summe der vierten, fünften und sechsten Gleichung, wenn man letztere vorher der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ multiplicirt hat, vermindert um $2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, dass man daher, wenn man berücksichtigt, dass $\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha + \sin\gamma \sin\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma = 1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ ist, erhält:

$$
\begin{aligned}
&\lambda\{2\varrho^2(1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) + x'_2 x'_3 \cos\alpha + x'_3 x'_1 \cos\beta + x'_1 x'_2 \cos\gamma\} \\
&\qquad + 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \\
&= 2\lambda\{\varrho^2(1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) + x'_2 x'_3 \cos\alpha + x'_3 x'_1 \cos\beta + x'_2 x'_1 \cos\gamma \\
&\qquad + x'_1 \cos\alpha(-x'_1 \cos\alpha + x'_2 \cos\beta + x'_3 \cos\gamma) \\
&\qquad + x'_2 \cos\beta(x'_1 \cos\alpha - x'_2 \cos\beta + x'_3 \cos\gamma) \\
&\qquad + x'_3 \cos\gamma(x'_1 \cos\alpha + x'_2 \cos\beta - x'_3 \cos\gamma)\}.
\end{aligned}
$$

Dies giebt:

$$
\begin{aligned}
\lambda\{x_1'^2 \sin^2\alpha + x_2'^2 \sin^2\beta + x_3'^2 \sin^2\gamma + 2x'_2 x'_3 \sin\beta \sin\gamma + 2x'_3 x'_1 \sin\gamma \sin\alpha \\
+ 2x'_1 x'_2 \sin\alpha \sin\beta\} = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma
\end{aligned}
$$

oder, wenn man bemerkt, dass

$$
5)\qquad x'_1 \sin\alpha + x'_2 \sin\beta + x'_3 \sin\gamma = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma
$$

ist, wo r den Halbmesser des um das Fundamentaldreieck beschriebenen Kreises bezeichnet,

$$
6)\qquad \lambda = \frac{1}{4r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}.
$$

Es kommt jetzt darauf an, aus den Gleichungen 4) eine andere zu bilden, die kein ϱ und nur ein x' enthält. Dies erreicht man, wenn die Summe der mit $\cos\beta$ multiplicirten fünften und mit $\cos\gamma$ multiplicirten sechsten von der doppelten ersten abgezogen wird; denn man bekommt dann:

$$2a_1 \sin\alpha - a_1 \sin\alpha - a_2 \sin\alpha \cos\gamma - a_3 \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\beta - \sin\gamma \cos\gamma$$
$$= 2\lambda\{\varrho^2 \sin^2\alpha - \varrho^2 \sin\gamma \sin\alpha \cos\beta - \varrho^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - (x_2'^2 + x_3'^2 + 2x_2' x_3' \cos\alpha)$$
$$- x_3' x_1' \cos\beta - x_1' x_2' \cos\gamma - x_2' \cos\beta (x_1' \cos\alpha - x_2' \cos\beta + x_3' \cos\gamma)$$
$$- x_3' \cos\gamma (x_1' \cos\alpha + x_2' \cos\beta - x_3' \cos\gamma)\}$$

oder

$$(a_1 - a_2 \cos\gamma - a_3 \cos\beta) \sin\alpha - \sin\alpha \cos(\beta - \gamma)$$
$$= 2\lambda\{- x_2'^2 \sin^2\beta - x_3'^2 \sin^2\gamma - 2x_2' x_3' \sin\beta \sin\gamma - x_3' x_1' \sin\gamma \sin\alpha$$
$$- x_1' x_2' \sin\alpha \sin\beta\}$$
$$= 2\lambda\{x_1'(x_1' \sin\alpha + x_2' \sin\beta + x_3' \sin\gamma) \sin\alpha - (x_1' \sin\alpha + x_2' \sin\beta + x_3' \sin\gamma)^2\}$$
$$= \frac{1}{2r}\{x_1' \sin\alpha - 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\},$$

folglich

7) $$x_1' = r(a_1 - a_2 \cos\gamma - a_3 \cos\beta + \cos\alpha)$$

und ebenso

$$x_2' = r(a_2 - a_3 \cos\alpha - a_1 \cos\gamma + \cos\beta),$$
$$x_3' = r(a_3 - a_1 \cos\beta - a_2 \cos\alpha + \cos\gamma),$$

wodurch der erste Theil unserer Aufgabe gelöst ist, die Mittelpunktscoordinaten durch a_1, a_2, a_3 auszudrücken.

Um einen einfachen Ausdruck für ϱ^2 zu erlangen, multiplicire man die fünfte der Gleichungen 4) mit x_3', die sechste mit x_2', die erste mit $2x_1'$ und addire, so erhält man:

$$a_1(x_1' \sin\alpha + x_2' \sin\beta + x_3' \sin\gamma) + (a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3') \sin\alpha + x_2' \sin\gamma + x_3' \sin\beta$$
$$= 2\lambda\varrho^2 (x_1' \sin\alpha + x_2' \sin\beta + x_3' \sin\gamma) \sin\alpha$$

oder wegen 5) und 6):

$$a_1 . 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + r(a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3') \sin\alpha + r x_2' \sin\gamma + r x_3' \sin\beta = \varrho^2 \sin\alpha.$$

Aehnlich kann man noch bilden:

$$a_2 . 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + r(a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3') \sin\beta + r x_3' \sin\alpha + r x_1' \sin\gamma = \varrho^2 \sin\beta,$$
$$a_3 . 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + r(a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3') \sin\gamma + r x_1' \sin\beta + r x_2' \sin\alpha = \varrho^2 \sin\gamma.$$

Multiplicirt man die drei letzten Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, so giebt die Addition derselben, wenn man berücksichtigt, dass $\sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta + \sin\gamma \cos\gamma = 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ ist, nach Weglassung des Factors $2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$:

8) $$\varrho^2 = r^2 \left\{1 + a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_3 \cos\gamma + \frac{1}{r}(a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3')\right\}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck für x_1', x_2', x_3' ihre Werthe aus 7) ein, so erhält derselbe die Form:

8a) $$\varrho^2 = r^2\{1 + 2(a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_3 \cos\gamma) + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$
$$- 2a_2 a_3 \cos\alpha - 2a_3 a_1 \cos\beta - 2a_1 a_2 \cos\gamma\},$$

womit auch der zweite Theil unserer Aufgabe erledigt ist. Von den beiden letzten Gleichungen kann man je nach den Umständen die eine oder die andere mit grösserem Vortheil benutzen. Die Gleichung 8a) dient übrigens auch zur Determination der a; denn wenn man dieselben willkürlich so wählt, dass die rechte Seite der Gleichung negativ wird, so ist ϱ imaginär, also bezeichnet mit diesen Werthen der a die Gleichung 1) einen imaginären Kreis, obschon die aus Gleichung 7) gebildeten Werthe der Mittelpunkts-coordinaten reell sind. Macht man z. B. $a_1 = a_2 = a_3 = -1$, so erhält man aus 7) $x'_1 = x'_2 = x'_3 = r(-1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$, also einen Werth, den der Halbmesser des Inkreises besitzt, und man könnte glauben, damit die Gleichung dieses Kreises gefunden zu haben; die Gleichung 8a) aber giebt in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= r^2\{1 - \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma - 3(-1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\} \\ &= -4r^2(-1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \end{aligned}$$

oder, wenn $\mathfrak{R}$ den Radius des Inkreises bezeichnet:

$$\varrho^2 = -4r\mathfrak{R},$$

woraus hervorgeht, dass diese Werthe der a unbrauchbar sind.

Aus den Gleichungen 7) folgt, dass **zwei Kreise concentrisch sind**, wenn folgende Bedingungen stattfinden:

$$\begin{aligned} (a_1 - a'_1) - (a_2 - a'_2)\cos\gamma - (a_3 - a'_3)\cos\beta &= 0, \\ -(a_1 - a'_1)\cos\gamma + (a_2 - a'_2) - (a_3 - a'_3)\cos\alpha &= 0, \\ -(a_1 - a'_1)\cos\beta - (a_2 - a'_2)\cos\alpha + (a_3 - a'_3) &= 0, \end{aligned}$$

welche erfüllt werden durch die Proportionen:

$$9)\qquad (a_1 - a'_1) : (a_2 - a'_2) : (a_3 - a'_3) = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,\text{*}$$

wofür man auch setzen kann:

$$a'_1 = a_1 - p\sin\alpha,\quad a'_2 = a_2 - p\sin\beta,\quad a'_3 = a_3 - p\sin\gamma.$$

Ist daher die Gleichung eines Kreises $S = 0$, so ist, wie hieraus und aus Gleichung 1) hervorgeht, die Gleichung eines mit ihm concentrischen Kreises:

$$S + p(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma)^2 = 0,$$

d. h. die zwei Kreise berühren sich in den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten. Ist für zwei concentrische Kreise der Werth von p bekannt, so erhält man aus Gleichung 8):

$$\varrho^2 - \varrho'^2 = r^2\left\{p(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma) + \frac{p}{r}(x'_1\sin\alpha + x'_2\sin\beta + x'_3\sin\gamma)\right\}$$

oder

$$10)\qquad \varrho^2 - \varrho'^2 = 4r^2 p\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Beispiel. Die Gleichungen des Brocard'schen und Tucker'schen Kreises sind in der Normalform:

$$\begin{aligned} &(x_1\sin\beta\sin\gamma + x_2\sin\gamma\sin\alpha + x_3\sin\alpha\sin\beta)(x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma) \\ &\quad - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)(x_2x_3\sin\alpha + x_3x_1\sin\beta + x_1x_2\sin\gamma) = 0 \end{aligned}$$

und

---

* Dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Chordale zweier concentrischer Kreise mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, also $(a_1 - a'_1)x_1 + (a_2 - a'_2)x_2 + (a_3 - a'_3)x_3 = 0$ mit $x_1\sin\alpha + x_2\sin\beta + x_3\sin\gamma = 0$ identisch sein muss.

$$\{x_1 \sin\beta \sin\gamma (\sin^2\beta + \sin^2\gamma) + x_2 \sin\gamma \sin\alpha (\sin^2\gamma + \sin^2\alpha)$$
$$+ x_3 \sin\alpha \sin\beta (\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\} (x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma)$$
$$- (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2 (x_2 x_3 \sin\alpha + x_3 x_1 \sin\beta + x_1 x_2 \sin\gamma) = 0;$$

daher ist:

$$a_1 = -\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma} \text{ etc. und } a'_1 = -\frac{\sin\beta\sin\gamma(\sin^2\beta + \sin^2\gamma)}{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2} \text{ etc.}$$

oder

$$a'_1 = a_1 + \frac{\sin^2\alpha \sin\beta \sin\gamma}{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2} \text{ etc.},$$

so dass die Bedingung 9) erfüllt ist, was beweist, dass beide Kreise concentrisch sind; p ist hier gleich $-\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)^2}$. Die erste Mittelpunktscoordinate des Brocard'schen Kreises ist nach 7):

$$x'_1 = r\left\{\cos\alpha + \frac{-\sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}\right\}$$
$$= r\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha - \sin\beta\sin\gamma + \sin\beta(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) + \sin\gamma(\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma)}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}$$
$$= r\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha + \sin\beta\sin\gamma}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}$$

oder, wenn man mit ϑ den Brocard'schen Winkel bezeichnet, für welchen

$$\sin^2\alpha \sin\vartheta = \sin\beta \sin\gamma \sin(\alpha - \vartheta)$$

und

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \cot\vartheta$$

ist,

$$x'_1 = r\frac{\cos\alpha\sin(\alpha - \vartheta) + \sin\vartheta}{2\sin\alpha\cos\vartheta} = r\frac{\cos(\alpha - \vartheta)}{2\cos\vartheta};$$

x'_2 und x'_3 sind ähnlich gebildet. Ferner ist nach 8):

$$\varrho^2 = r\left\{1 - \frac{\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}\right.$$
$$\left. - \frac{\sin\beta\sin\gamma\cos(\alpha - \vartheta) + \sin\gamma\sin\alpha\cos(\beta - \vartheta) + \sin\alpha\sin\beta\cos(\gamma - \vartheta)}{2\cos\vartheta(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}\right\}$$

oder, wenn man bedenkt, dass der Zähler des ersten Bruches gleich $1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cot\vartheta$ ist,

$$\varrho^2 = r^2\left\{1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\vartheta\left[\frac{\cos(\alpha - \vartheta)}{\sin\alpha\cos\vartheta} + \frac{\cos(\beta - \vartheta)}{\sin\beta\cos\vartheta} + \frac{\cos(\gamma - \vartheta)}{\sin\gamma\cos\vartheta}\right]\right\}$$
$$= r^2\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\vartheta(\cot\alpha + \operatorname{tg}\vartheta + \cot\beta + \operatorname{tg}\vartheta + \cot\gamma + \operatorname{tg}\vartheta)\}$$

oder, weil $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\vartheta$ ist,

$$\varrho^2 = r^2\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\vartheta(\cot\vartheta + 3\operatorname{tg}\vartheta)\} = \frac{r^2}{4}(1 - 3\operatorname{tg}^2\vartheta).$$

Für den Radius des Tucker'schen Kreises findet man nach Formel 10):

$$\frac{r^2}{4}(1-3\,tg^2\vartheta)-\varrho'^2=-4r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2}=-r^2\,tg^2\vartheta,$$

also

$$\varrho'^2=\frac{r^2}{4}(1-3\,tg^2\vartheta)+r^2\,tg^2\vartheta=\frac{r^2}{4}(1+tg^2\vartheta)=\frac{r^2}{4\cos^2\vartheta}.$$

Durch die Gleichung 8) und zwei der Gleichungen 7) wird nach bekannten Methoden die Aufgabe gelöst, aus den Mittelpunktscoordinaten und dem Radius eines Kreises seine Gleichung in Punktcoordinaten in der Normalform zu finden. Man kann jedoch das Resultat auch unmittelbar aus den drei ersten der Gleichungen 4) ablesen, wenn man darin den Werth von λ aus 6) substituirt, nämlich:

$$11)\qquad a_1=\frac{\varrho^2\sin^2\alpha-(x_2'^2+x_3'^2+2x_2'x_3'\cos\alpha)}{4r^2\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}\text{ etc.}$$

Beispiel. Für einen Kreis sei $x_1'=r(\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma-\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma)$ u. s. w. und $\varrho^2=r^2(\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)$. Wenn man die Relation $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$ beachtet, findet man nach leichter Rechnung: $a_1=-\sin\beta\sin\gamma\cos^2\alpha$ etc.

Verwandt mit dieser Aufgabe ist die andere, aus den Coordinaten der Endpunkte eines Durchmessers die Gleichung des Kreises zu finden. Sind nämlich $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3$ die absoluten Coordinaten dieser Endpunkte (ihre senkrechten Entfernungen von den Dreiecksseiten), so ist

$$4\varrho^2\sin^2\alpha=(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{y}_2)^2+(\mathfrak{x}_3-\mathfrak{y}_3)^2+2(\mathfrak{x}_2-\mathfrak{y}_2)(\mathfrak{x}_3-\mathfrak{y}_3)\cos\alpha$$

und

$$x_2'=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_2+\mathfrak{y}_2),\quad x_3'=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_3+\mathfrak{y}_3).$$

Dadurch gehen die Gleichungen 11) über in:

$$12)\qquad a_1=-\frac{\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2+\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3+(\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_3+\mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_2)\cos\alpha}{4r^2\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}\text{ etc.}$$

Beispiel. Man soll die Gleichung des Kreises finden, der über der Strecke zwischen Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt beschrieben ist. Man hat hier

$$\mathfrak{x}_2=\tfrac{4}{3}r\sin\gamma\sin\alpha,\quad \mathfrak{x}_3=\tfrac{4}{3}r\sin\alpha\sin\beta,\quad \mathfrak{y}_2=2r\cos\gamma\cos\alpha,\quad \mathfrak{y}_3=2r\cos\alpha\cos\beta,$$

also

$$a_1=-\frac{\tfrac{8}{3}r^2\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\gamma)}{4r^2\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}=-\tfrac{4}{3}\cos\alpha;$$

daher ist die Gleichung des Kreises:

$$2(x_1\cos\alpha+x_2\cos\beta+x_3\cos\gamma)(x_1\sin\alpha+x_2\sin\beta+x_3\sin\gamma)$$
$$-3(x_2x_3\sin\alpha+x_3x_1\sin\beta+x_1x_2\sin\gamma)=0.$$

Die von uns entwickelten Formeln genügen endlich vollständig, um ohne Zuziehung geometrischer Betrachtungen, wie dies bei Salmon a. a. O. Art. 164 geschieht, die Potenz eines beliebigen Punktes in Bezug auf einen Kreis aus seiner Gleichung allein herzuleiten. Ist nämlich e die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt des Kreises und sind $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ seine absoluten Coordinaten, so geht in der Gleichung 3) ϱ in e über, sobald man statt x_1, x_2, x_3 bezüglich $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ setzt, während die x' unverändert bleiben. Addirt man daher die Gleichungen 4), nachdem man sie vorher der Reihe nach mit $\mathfrak{x}_1^2, \mathfrak{x}_2^2, \mathfrak{x}_3^2, \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_3\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ multiplicirt hat, so erhält man rechts:

$$\lambda\{\varrho^2(\mathfrak{x}_1 \sin\alpha + \mathfrak{x}_2 \sin\beta + \mathfrak{x}_3 \sin\gamma)^2 - e^2(\mathfrak{x}_1 \sin\alpha + \mathfrak{x}_2 \sin\beta + \mathfrak{x}_3 \sin\gamma)^2\}$$

oder wegen der Gleichungen 5) und 6):

$$(\varrho^2 - e^2) \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Links erscheint aber das Resultat der Substitution von $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ statt x_1, x_2, x_3 in die Gleichung 1), das wir kurzweg mit $S_\mathfrak{x}$ bezeichnen wollen. Daher ist die Potenz des Punktes $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ in Bezug auf den Kreis oder

$$13) \qquad e^2 - \varrho^2 = -\frac{S_\mathfrak{x}}{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma},$$

d. h. in Worten:

Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis wird gefunden, wenn man die absoluten Coordinaten desselben in die Normalform der Kreisgleichung substituirt und das Resultat durch $-\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ dividirt.

Beispiel. Man soll die Entfernung der Mittelpunkte des Feuerbach-schen Kreises und des Inkreises finden. Wenn $\mathfrak{R}$ den Radius des letzteren bezeichnet, so ist $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_3 = \mathfrak{R}$ zu nehmen; ferner ist hier:

$$a_1 = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha, \quad a_2 = -\tfrac{1}{2}\cos\beta, \quad a_3 = -\tfrac{1}{2}\cos\gamma,$$

also nach Gleichung 8a):

$$\varrho^2 = r^2\{1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \tfrac{1}{4}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\}$$
$$= r^2\{1 - \tfrac{3}{4}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\} = r^2(1 - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{4}r^2.$$

Daher ist hier

$$(e^2 - \tfrac{1}{4}r^2)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathfrak{R}^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) - \mathfrak{R}^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

oder, weil $\mathfrak{R} = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$ und $\mathfrak{R}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2r\sin\alpha \sin\beta\sin\gamma$ ist:

$$e^2 - \tfrac{1}{4}r = \mathfrak{R}(\mathfrak{R} - r),$$

also

$$e^2 = \tfrac{1}{4}(4\mathfrak{R}^2 - 4\mathfrak{R}r + r^2) = \tfrac{1}{4}(r - 2\mathfrak{R})^2, \text{ d. h. } e = \tfrac{1}{2}r - \mathfrak{R}.$$

Bensheim, im März 1888.

Dr. Stoll,
Gymnasiallehrer.

XIX. Zur Einführung in die Theorie der dielektrischen Polarisation.

Befinden sich in einem dielektrischen Medium elektrische Massen, dann ist, wie bekannt, die Potentialfunction durch die Summe zweier Grössen bestimmt, von denen die eine die Potentialfunction der gegebenen elektrischen Massen, die andere die Potentialfunction der durch die Polarisation geweckten Elektricitäten ist. Von besonderer Wichtigkeit ist die Bildung des Ausdruckes für die letztere Grösse. Man berechnet sie gewöhnlich in derselben Weise, wie die Potentialfunction der gegebenen elektrischen Massen, indem man von der elektrischen Dichtigkeit in den einzelnen Punkten des polarisirten Raumes ausgeht, aber dieser Weg ist gewiss nicht immer der beste. Wohl ist in den meisten Fällen, namentlich dann, wenn das Medium krystallinisch ist, die Einführung der Dichtigkeit nicht zu umgehen, aber sie ist in vielen Fällen, insbesondere bei isotropen Substanzen sowohl einer einfachen Entwickelung der Potentialfunction, als auch einer klaren Anschauung über die Wirkungsweise der durch die Polarisation geweckten Elektricitäten hinderlich. Hier empfiehlt sich ein anderer Vorgang und dieser besteht darin, dass man jene elektrischen Massenschichten betrachtet, welche zwischen je zwei Niveauflächen durch die daselbst wirkenden elektromotorischen Kräfte hervorgerufen werden und als Belegungen auf der inneren Seite der äusseren und äusseren Seite der inneren Fläche erscheinen.

I.

Betrachten wir zunächst ein isotropes Dielektricum unter dem Einflusse eines elektrischen Massenpunktes. Die Niveauflächen desselben sind concentrische Kugelflächen mit dem elektrischen Punkte als Mittelpunkt und es sind ferner auch die zwischen je zwei unendlich nahen Niveauflächen durch Scheidung hervorgerufenen Massenschichten — wir wollen sie Niveauschichten nennen — Kugelschichten von gleichförmiger Dichtigkeit, welche ebenfalls den Massenpunkt zum Mittelpunkt haben. Solche Kugelschichten wirken bekanntlich nach aussen so, als wenn ihre gesammte Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, während die Kraftwirkung im Innern überall gleich Null ist. Betrachten wir also den Scheidungsvorgang zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen, so können wir sowohl von den äusseren, als auch von den inneren Niveauschichten absehen und brauchen demnach blos den elektrischen Punkt und die beiden zwischen den Niveauflächen gelegenen, durch die Polarisation getrennten Niveauflächen oder vielmehr, da auch von diesen Schichten die äussere in allen inneren Punkten, mögen dieselben ihr auch noch so nahe liegen, keine Kraft ausübt, ausser dem elektrischen Punkte nur noch die innere Niveauschichte zu berücksichtigen.

Ist $(+e)$ die Elektricitätsmenge in dem elektrischen Punkte, $(-\vartheta)$ die auf der Flächeneinheit der inneren Schichte gelegene Elektricitätsmenge, und r der Radius dieser Schichte, so ist die Kraft zwischen den beiden betrachteten Niveauflächen

$$1)\qquad \frac{e}{r^2}-\frac{4\pi r^2\vartheta}{r^2} \text{ oder } \frac{e}{r^2}-4\pi\vartheta.$$

Die Menge $(+\vartheta)$ setzen wir nun dieser Kraft proportional und nennen den Proportionalitätsfactor die elektrische Polarisationsconstante. Wir erhalten so

$$\vartheta=\varepsilon\left(\frac{e}{r^2}-4\pi\vartheta\right)$$

oder

2) $$\vartheta = \frac{\varepsilon e}{r^2(1+4\pi\varepsilon)}$$

und mithin für die Kraft zufolge Gleichung 1)

3) $$\frac{e}{r^2(1+4\pi\varepsilon)}.$$

Es wird also durch die Polarisation in allen Punkten des Raumes die Kraft und somit auch die Potentialfunction in dem Verhältniss $1:(1+4\pi\varepsilon)$ kleiner.

Bei einer Leydener Flasche, welche aus zwei concentrischen Kugelflächen besteht, existiren dieselben Verhältnisse; die Niveauschichten sind concentrische Kugelschichten, deren Wirkung auf die äussere Belegung gleich Null ist. Ist also $(+e)$ die Elektricitätsmenge auf der inneren Belegung und ist die äussere zur Erde abgeleitet, dann ist $(-e)$ die Elektricitätsmenge auf der äusseren Belegung, mag das Dielektricum zwischen den beiden Belegungen wie beschaffen immer sein. Es wird ferner auch die Kraft überall gerade so wie früher $(1+4\pi\varepsilon)$-mal kleiner sein, als wenn keine Polarisation vorhanden wäre, und da die Kraft nichts Anderes, als das Gefälle der Potentialfunction ist, so werden wir, wenn wir von der äusseren Belegung als dem Orte nullgleichen Potentials zur inneren Belegung übergehen, auf dieser einen Werth der Potentialfunction antreffen, welcher $(1+4\pi\varepsilon)$-mal kleiner ist, als wenn keine Polarisation vorhanden wäre, d. h. den Werth

$$-\frac{e(b-a)}{ab(1+4\pi\varepsilon)},$$

wo a und b den Radius der inneren bezw. äusseren Flächenbelegung bedeuten.

Ist ε_0 die Polarisationsconstante für Luft und ε jene für eine andere dielektrische Substanz, so giebt das Verhältniss der Capacitäten, nämlich

$$\frac{1+4\pi\varepsilon}{1+4\pi\varepsilon_0},$$

die Dielektricitätsconstante derletzteren Substanz nach **Faraday**'s Definition.

II.

Wir betrachten jetzt einen positiv elektrisch geladenen Leiter von beliebiger Gestalt. Wir nennen die Potentialfunction, welche von dieser Ladung und den im Dielektricum geschiedenen Elektricitätsmengen herrührt, Π und fassen wieder zwei unendlich nahe Niveauflächen N_1 und N_2 ins Auge, von denen N_1 die innere Fläche sein mag. Sind ds_1 und ds_2 zwei Elemente auf diesen Flächen, durch deren Randcurven dieselben Kraftlinien verlaufen, und $-dm_1$, $+dm_1$ die durch Scheidung hervorgerufenen Belegungen, dann können wir ähnlich wie oben

4) $$+dm_1 = \varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial n} ds_2$$

setzen, wo n die Richtung der nach aussen gezogenen Normale bezeichnet.

Die Potentialfunction in einem Punkte A, herrührend von der auf der inneren Seite von N_2 gelegenen Niveauschichte, ist

$$-\int\frac{dm_1}{r}$$

und die Potentialfunction, herrührend von der auf der äusseren Seite von N_1 gelegenen Niveauschichte,

$$\int\frac{dm_1}{r+\partial r},$$

mithin die Potentialfunction beider Schichten in A gleich

$$5)\qquad -\int\frac{dm_1\,\delta r}{r^2}.$$

Was die Richtung der Strecke r anbelangt, so ist dieselbe als vom Punkte A auslaufend anzusehen. Die Grösse δr bezieht sich auf die zugehörigen Elemente ds_1, ds_2, welche voneinander den Abstand ∂n haben, und kann daher auch durch

$$6)\qquad \delta r = \delta n\,cos(n, r)$$

ausgedrückt werden.

Substituiren wir die Beziehungen 4) und 6) in den Ausdruck 5) und bedenken wir, dass $\frac{\partial\Pi}{\partial n}\delta n = \delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$, d. i. die Potentialdifferenz der beiden Niveauflächen N_1, N_2, für alle Elemente des Integrals denselben Werth hat, so erhalten wir für die Potentialfunction der beiden Niveauschichten in dem Punkte A den Ausdruck

$$7)\qquad -\varepsilon(\Pi_1-\Pi_2)\int\frac{ds_2\,cos(n, r)}{r^2}.$$

Wir haben hier nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich der Punkt A in Bezug auf N_1, N_2 ein äusserer oder ein innerer Punkt ist. Beide Flächen N_1, N_2 sind geschlossene Flächen, weil eine Niveaufläche, auf welcher die Potentialfunction einen von Null verschiedenen Werth hat, nicht ins Unendliche gehen kann. Ist also A ein äusserer Punkt, dann ist* das Integral 7) gleich Null; ist dagegen A ein innerer Punkt, so ist das Integral gleich 4π. Mit anderen Worten: Die Potentialfunction der betrachteten Niveauschichten ist in allen äusseren Punkten gleich Null, dagegen in allen inneren Punkten

$$-4\pi\varepsilon(\Pi_1-\Pi_2).$$

Selbstverständlich gilt dieser Satz immer, mag der Punkt A den Flächen N_1, N_2 auch noch so nahe rücken. Punkte der Fläche N_2 sind äussere Punkte, Punkte der Fläche N_1 innere Punkte.

Der soeben ausgesprochene Satz führt unmittelbar zu der Folgerung, dass die Potentialfunction Π in irgend einem Punkte A des Raumes sich aus der Potentialfunction V, welche von der Ladung des Leiters herrührt,

* Nach einem Satze von Gauss.

und aus jener Potentialfunction zusammensetzt, welche von den den Punkt A einschliessenden Niveauschichten herrührt, oder dass

$$\Pi = V - 4\pi\varepsilon\Sigma(\Pi_1 - \Pi_2)$$

ist, wobei diese Summe sich auf alle jene Niveauflächen bezieht, welche zwischen der Niveaufläche $\Pi = 0$ und der durch den Punkt A gehenden Niveaufläche (Π) liegen. Da nun aber diese Summe gleich Π ist, so ist

$$\Pi = V - 4\pi\varepsilon\Pi$$

oder

8) $$\Pi = \frac{V}{1 + 4\pi\varepsilon}.$$

Die Polarisation macht also in allen Punkten des Raumes die Potentialfunction und somit auch die Kraft $(1 + 4\pi\varepsilon)$-mal kleiner.

Natürlich gilt dies auch für den Leiter selbst; es wird demnach die Capacität desselben $(1 + 4\pi\varepsilon)$-mal grösser.

Das soeben gewonnene Resultat gilt, wie leicht einzusehen, auch dann, wenn wir es nicht mit einem, sondern mit mehreren räumlich voneinander getrennten elektrisch geladenen Leitern zu thun haben. Da die Polarisation die Potentialfunction in allen Punkten des Raumes in demselben constanten Verhältniss ändert, so hat sie auf den Verlauf der Niveauflächen nicht den geringsten Einfluss.

Prag. Dr. O. Tumlirz.

XX. Einfluss der Versenkung von Maassstäben in eine Flüssigkeit auf die scheinbare Länge derselben.

Angesichts der grossen Schwierigkeit, welche die genaue Bestimmung der Temperatur eines in freier Luft liegenden Maassstabes darbietet, werden gegenwärtig bei genauen Maassvergleichungen die Stäbe in vielen Fällen in eine Flüssigkeit versenkt. Aus den Publicationen derartiger Arbeiten ist aber nicht zu ersehen, dass man hierbei auf die Veränderung Rücksicht genommen hätte, welche die scheinbare Länge eines Stabes durch Einsenkung in eine Flüssigkeit erleidet, obwohl in vielen Fällen diese Veränderung erheblich grösser sein kann, als die zu erzielende Genauigkeit der Längenmessung.

Liegt ein Stab von der Länge a, dem Querschnitte Q und dem absoluten Gewichte w, auf zwei im Abstande $2b = 2\beta a$ liegenden Punkten auf und bezeichnet man mit

T das Trägheitsmoment seines Querschnittes, bezogen auf die neutrale Axe,

E den Elasticitätscoefficienten des Materials, aus welchem der Stab verfertigt ist,

w_l den Auftrieb des Stabes in Luft,

w_f den Auftrieb des Stabes in der Flüssigkeit,

α die Ausdehnung des Stabes durch einen Zug gleich w,

so ist

$$\alpha = \frac{a w}{E Q}$$

und wenn

$$u_l = \frac{\alpha Q}{2 a T} \frac{w - w_l}{w}, \quad u_f = \frac{\alpha Q}{2 a T} \frac{w - w_f}{w}, \quad x = a \xi$$

gesetzt wird, bis auf Glieder dritter Ordnung, die Gleichung der neutralen Faser, bezogen auf durch das Centrum des Stabes gelegte Coordinaten,

$$\frac{y}{\mu a^3} = -\frac{\beta^2}{48}(24\beta - 4\beta^2 - 6) + \frac{1}{8}(4\beta - 1)\xi^2 - \frac{1}{12}\xi^4$$

in dem Theile zwischen den Auflagepunkten, und

$$\frac{y}{\mu a^3} = -\frac{\beta^2}{48}(32\beta - 4\beta^2 - 6) + \frac{\beta^2}{2}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{6}\xi^3 - \frac{1}{12}\xi^4$$

in dem Theile ausserhalb der Auflagepunkte.

Die horizontale Projection des Stabtheiles, welcher zwischen zwei bei $-x$ und $+x$ im verticalen Abstande H von der neutralen Axe gezogenen Strichen liegt, ist kürzer als der entsprechende Theil der neutralen Faser um

$$1) \qquad s_x - 2x = \frac{1}{a}\int_0^{\beta}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi + \frac{1}{a}\int_{\beta}^{\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi$$

und die Striche werden ausserdem infolge der Biegung um den Betrag

$$2) \qquad e = -2\frac{H}{a}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)_{\xi}$$

voneinander entfernt.

Die Differenz $e - (s_x - 2x)$ der Aenderungen e und $s_x - 2x$ giebt die totale Aenderung der scheinbaren Länge des Stabes infolge der Biegung, und diese Grösse kann erheblich verschieden ausfallen, je nachdem deren Werth mit μ_l oder μ_f berechnet wird.

So hat man z. B. für den Stab H der k. k. Normal-Aichungscommission in Wien, der in den „Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures" (Tome II et IV) mit H_A bezeichnet ist,

$$a = 1028{,}3\,\text{mm}, \quad Q = 219{,}44\,\text{mm}^2, \quad T = 1977{,}88\,\text{mm}^4, \quad b = 256{,}6\,\text{mm},$$
$$x = 500{,}0\,\text{mm}, \quad H = 5{,}20\,\text{mm}, \quad w = 1{,}927\,\text{kg},$$

ferner $E = 9271\,\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ und $w_l = 0{,}000$, $w_f = 0{,}225$ kg für Wasser mittlerer Temperatur anzunehmen. Hiermit ergiebt sich:

$$e - (s_x - 2x) \text{ in Luft} = 6{,}018\,\mu, \quad e - (s_x - 2x) \text{ in Wasser} = 5{,}321\,\mu;$$

die Differenz dieser beiden Werthe erreicht $0{,}7\mu$ und übersteigt daher etwa 14mal die Genauigkeitsgrenze moderner Metervergleichungen.

Wien. W. Marek.

(Aus d. Sitzungsber. d. Wiener Akad.)

XV.

Die Axonometrie als Orthogonalprojection.*

Von
Dr. A. Weiler
in Zürich.

Hierzu Taf. IV, V u. VI Fig. 1—31.

Die Auffassung der Axonometrie als Orthogonalprojection liefert die natürlichen Messungsmethoden für Strecken und Winkel, auch giebt sie genauen Aufschluss über die sichtbaren und unsichtbaren Theile der Bilder. Die Constructionen der Senkrechten lassen sich mit elementaren Hilfsmitteln in übersichtlicher und einheitlicher Weise durchführen.

1. Ein Object im Raume werde auf drei rechtwinklige Ebenen, die durch den Scheitel (Ursprung) O gehen, projicirt. Jene Ebenen schneiden sich in den drei Axen x, y, z aus O und es werden die drei Projectionen auf xy, xz und yz bezüglich als Grund-, Auf- und Seitenriss bezeichnet und durch obere Indices $'$, $''$, $'''$ oder untere $_1$, $_2$, $_3$ unterschieden. Hierauf projicire man das Object und die drei Risse auf eine Bildebene P (die Zeichnungsfläche oder eine mit ihr parallele Ebene), so entstehen das axonometrische Bild und die axonometrischen Risse.

Alle Constructionen muss man mit Hilfe von zweien dieser Bilder ausführen können und unter denselben soll das axonometrische Bild selbst vorkommen. Man wird also bei den auszuführenden Constructionen sich des axonometrischen Bildes und eines axonometrischen Risses bedienen. In der Folge ist der Einfachheit in der Darstellung wegen stets der Grundriss gebraucht worden. Aber es sind die Resultate derart, dass die directe Uebertragung auf alle übrigen möglichen Fälle geschehen kann. — Selbstverständlich werden bei Ebenen die Bilder aller drei Spuren im Wesentlichen gleichmässig benutzt.

Bezüglich der eingeführten Bezeichnung muss im Voraus hervorgehoben werden, dass A, B, ... ebensowohl Punkte des Raumes, als auch deren axonometrische Bilder bezeichnen; A', B', ... können ebensowohl deren

* Eine kurze Ankündigung dieses Aufsatzes ist im Januar 1888 in der Züricher Vierteljahrsschrift erschienen (Seite 3 des Umschlages für das 2. und 3. Heft des 32. Jahrganges).

Grundrisse, als auch die axonometrischen Bilder der Grundrisse sein. Punkt und Gerade werden hier und da als Punkt P, P' oder Gerade g, g' bezeichnet, weil nach dem Vorigen für die Fixirung eines solchen Elementes die Angabe dieser beiden Bilder vorgeschrieben ist. — Es erweist sich weiterhin als nützlich, die Projection des Scheitels O des Axenkreuzes auf die Bildebene mit N (Normalenfusspunkt) zu bezeichnen.

2. An einem darzustellenden technischen Objecte werden in der Regel mehrere rechtwinklige Ecken vorkommen, deren Kanten Hauptrichtungen x, y, z sind. Auf P projicirt, geben sie parallele Systeme $N.x, y, z$. Das einmal verzeichnete Bild eines Axenkreuzes wird nach Bedürfniss parallel mit sich selbst verschoben.

Aber auch die Bildebene P wird als nicht festliegend behandelt. Ihre Parallelverschiebung ändert die axonometrischen Bilder nicht. Parallele Ebenen P, P_1, P_2, ... schneiden aus demselben Axenkreuze $O.x, y, z$ Spurendreiecke mit parallelen Seiten heraus, die sich als ebensolche projiciren. Es gilt dies auch für die durch O gelegte Bildebene P_0.

In Fig. 1 sind $X_1 Y_1 Z_1$, $X_2 Y_2 Z_2$, ... die Ecken der Spurendreiecke der Bildebenen P_1, P_2, ...; $p_1^1 p_2^1 p_3^1$, $p_1^2 p_2^2 p_3^2$, ... ihre Seiten. Diese Dreiecke sind ähnlich und in perspectiver Lage. Sie haben insgesammt $N.x, y, z$ zu Höhen.*

Die ersten Spuren p_1^0 (durch O) $p_1^1 p_1^2$ ... sind auf z senkrecht, die zweiten $p_2^0 p_2^1 p_2^2$ ... auf y und die dritten $p_3^0 p_3^1 p_3^2$ ... auf x. Die Ebene P_0 ist vor allen übrigen Ebenen P dadurch ausgezeichnet, dass sich ihr Spurendreieck auf den Punkt N reducirt.

Man beachte, dass die Seiten $p_1^0 p_1^1$ ... mit ihren Grundrissen zusammenfallen, dass die p_2 ihre Grundrisse in x, die p_3 die ihrigen in y haben. Dadurch kann man zu einer Geraden g, die in einer Bildebene liegt, leicht den Grundriss g' verzeichnen und umgekehrt, siehe Fig. 2. Daselbst sind die Spurpunkte der Geraden g (in xy, xz, yz) mit G_1, G_2, G_3 bezeichnet, wie in Zukunft im Allgemeinen für jede Gerade geschehen soll. — Wird g (in P) parallel mit p_1, p_2, p_3, so wird bezüglich g' parallel zu p_1, x, y und umgekehrt, vergl. die Geraden 1, 2, 3 dieser Figur (welche später in derselben Bezeichnung und Bedeutung wiederkehren). — Dieselbe Figur zeigt auch, wie man die durch einen Punkt A, A' gehende Bildebene P construirt: man legt am einfachsten durch A, A' die auf z senkrechte Gerade 1, 1', bestimmt deren zweite oder dritte Spur und erhält p_2, senkrecht zu y, durch die zweite Spur oder p_3, senkrecht zu x, durch die dritte Spur (darauf die übrigen Spuren durch Benutzung der Axenschnitte).

* Der gemeinsame Höhenschnittpunkt N liegt im Innern dieser Dreiecke; die rechten Winkel XOY etc. projiciren sich als stumpfe Winkel XNY etc., weil sie durch die Falllinien ihrer Ebenen getheilt werden.

3. Die Abstände der Ebenen P_1, P_2, ... von P_0 und ihre Abstände unter sich werden in folgender Weise bestimmt (Fig. 1):

Man denkt sich der Reihe nach diese Ebenen als mit der Zeichnungsebene zusammenfallend, zunächst also P_1, die Ebene der drei Punkte $X_1 Y_1 Z_1$. In N errichtet man eine projicirende Linie und wählt auf ihr den Punkt O so, dass das Trieder $O.X_1, Y_1, Z_1$ orthogonal ist. Dann ist aber auch $Z_1 O U_1$ ein rechter Winkel (OU_1 ist die Falllinie der Ebene xy). Dieses Dreieck $Z_1 O U_1$ wird um seine Spur $Z_1 U_1$ in die Zeichnungsfläche umgelegt, O gelangt hierbei nach D_1 und es ist ND_1 die Entfernung der Bildebene P_1 von O, also auch von P_0.

Um allgemein die Entfernung der Ebenen P, P_0 zu erhalten, hat man über der in z liegenden Höhe ZU des Spurendreiecks von P einen Halbkreis zu beschreiben und damit p_1^0 zu schneiden. Der Schnittpunkt D hat von N die gesuchte Entfernung, er soll fortan der Distanzpunkt der Bildebene P genannt werden. Für P_0 fällt D_0 nach N. — Der Abstand zwischen den Bildebenen P_1, P_2 ist die algebraische Differenz der Distanzen ND_1, ND_2.

Ueber die Distanzpunkte D will ich noch folgende Bemerkungen beifügen. Würde über ZU als Diameter der ganze Kreis verzeichnet, so würden auf p_1^0 zwei zu N symmetrische Punkte D auftreten, was seine naturgemässe Erklärung darin findet, dass der Punkt O stets um die Distanz ND vor oder hinter N liegend gedacht werden kann. Im Zusammenhange damit lässt sich denn auch jedes axonometrische Bild doppelt auffassen: das Axenkreuz und das Object lassen sich jedesmal in zwei orthogonal symmetrischen Stellungen zu P denken, wodurch die sichtbare und die unsichtbare Oberflächenhälfte vertauscht werden (vergl. Nr. 18). — Es ist aber zweckmässig, jedesmal nur den einen Halbkreis zu verzeichnen, wie in Fig. 1; diese Halbkreise haben N zum äusseren, resp. inneren, Aehnlichkeitspunkt. Die Benutzung dieser Halbkreise bietet nämlich den Vortheil, dass die Linien $Z_1 D_1$, $Z_2 D_2$, ... oder $U_1 D_1$, $U_2 D_2$, ... u. s. f. je parallel sind, wodurch die Maassbestimmung eindeutig wird.* Hiernach genügt es, für eine einzige Ebene P den Distanzpunkt D mit Hilfe des Halbkreises zu construiren; es ergeben sich sodann alle übrigen Distanzpunkte (eindeutig) durch Ziehen von Parallelen. (Fällt etwa Z ausserhalb des Blattes, so ziehe man aus der Mitte der Strecke UX eine Parallele zu p_2, der Durchschnittspunkt mit z wird der Mittelpunkt des Halbkreises sein.)

In ebenso einfacher Weise liesse sich die Reihe der Distanzpunkte auf p_2^0 oder p_3^0 construiren, indessen wird hier bei der ins Auge gefassten Construction aus axonometrischem Grundriss und Bild die Reihe auf p_1^0 vorzuziehen sein. — Verbindet man endlich alle zu P gehörigen Distanzpunkte

* (Die Strecke $D_1 D_2$ stimmt nun mit dem Abstande der Ebenen P_1, P_2 jederzeit direct überein.)

durch einen Kreis, so hat man den Distanzkreis dieser Ebene P, dessen Anwendung für die Behandlung gewisser Probleme nützlich ist (Nr. 16, 17).

4. Es soll die Umlegung der Geraden g, g' in irgend eine Bildebene vollzogen werden, speciell bestimme man die Entfernung zweier Punkte A, B.

In Fig. 3 sind durch die Punkte A, B der Geraden g die Bildebenen P_1, P_2 gelegt worden und es sind D_1, D_2 deren Distanzpunkte. In A, B werden diese Distanzen ND_1, ND_2 rechtwinklig zu g abgetragen, so entstehen die Umlegungen $(A)_0$, $(B)_0$ der beiden Punkte in die Ebene P_0. Ihre Verbindungslinie $(g)_0$ ist die Umlegung der Geraden g in die Ebene P_0. Der von $(g)_0$ und g eingeschlossene Winkel ist die wahre Grösse des Neigungswinkels β der Geraden g mit den Bildebenen. — Hätte man die Strecke D_1D_2 bei A gleich $A(A)_2$ (rechtwinklig zu g) abgetragen, so hätte man damit die Umlegung der Strecke AB in die durch B gehende Bildebene P_2 gefunden.* — Die Umlegung der Strecke kann ebenso gut in die beliebige Bildebene P vom Distanzpunkt D ausgeführt werden, indem man DD_1, DD_2 in A und B abträgt und zwar nach gleicher oder entgegengesetzter Richtung, je nachdem diese Strecken in p_1^0 gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

In Fig. 3 hat weiterhin die Bildebene P_3 des ersten Spurpunktes G_1 von g den Distanzpunkt D_3. Derselbe liegt in Bezug auf N auf der entgegengesetzten Seite wie D_1 und D_2, weshalb $G_1(G_1)_0$ von der Länge ND_3 mit $A(A)_0$ und $B(B)_0$ entgegengesetzt parallel abzutragen ist. — Der Schnittpunkt von g mit $(g)_0$ ist der Spurpunkt G_0 der Geraden g in der Ebene P_0. Durch ihn geht die mit m_0 bezeichnete Schnittlinie der horizontal-projicirenden Ebene $m_1 m_2$ von g, mit P_0.

Fig. 4 giebt nochmals die Construction der Distanz zweier Punkte A, B und des Winkels β ihrer Verbindungslinie mit den Bildebenen. Der Scheitel des Axenkreuzes ist nach A verlegt worden. Die durch diese Transformation veränderte Lage gewisser Elemente ist durch den beigefügten * angedeutet. — Die Umlegung geschieht hier in die durch B gehende Bildebene, es ist $(A)B$ die wahre Entfernung beider Punkte und (β) der Winkel von g mit den Bildebenen.

5. Eine beliebige Ebene E des Raumes schneidet aus den drei Coordinatenebenen xy, xz, yz die drei Seiten e_1, e_2, e_3 ihres Spurendreiecks. Wird E mit allen Bildebenen P geschnitten, so entsteht die Schaar der unter sich parallelen Hauptlinien h. Fig. 5 giebt die in P_0 liegende $h_0 = e_0$ mit ihrem Grundrisse h'_0 (die Spurpunkte in xy, xz, yz sind H_1^0, H_2^0, H_3^0). — Die zu den Hauptlinien h in der Ebene selbst und auch im

* Die Distanz zweier Punkte ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete das axonometrische Bild der Strecke und dessen andere Kathete der Abstand der durch die beiden Punkte gelegten Bildebenen ist.

axonometrischen Bilde senkrechten Linien f sind die **Falllinien** der Ebene. Der Neigungswinkel α einer Falllinie mit den Bildebenen ist zugleich der Neigungswinkel von E mit den Ebenen P. Unter allen Geraden in E haben die f die grösste Neigung zu P. (Die Systeme h, f, ... und h', f', ... sind affin mit der Axe e_1 und der Richtung s der Affinitätsstrahlen.)

Geraden, die auf E senkrecht stehen, decken sich im Bilde mit den Falllinien. Ihre Neigungswinkel β sind das Complement des genannten Winkels α. Man könnte somit durch Umlegungen von projicirenden Ebenen Linien construiren, die auf E senkrecht stehen.

Durch Angabe einer Falllinie f, f' ist die Ebene E völlig bestimmt. Durch P auf f (Fig. 6) lege man die Bildebene P(p_1, p_2, p_3), darin wird h senkrecht zu f gezogen, es ergeben sich die Spurpunkte H_1, H_2, H_3 von h. Diese, mit den Spurpunkten F_1, F_2, F_3 verbunden, ergeben sofort die Spuren e_1, e_2, e_3 der Ebene E.

Die Haupt- und Falllinien können auch ohne Benutzung der Spuren construirt werden. In Fig. 7 werden für das Dreieck ABC, $A'B'C'$ die Linien h und f durch die Ecke A gelegt. Erst zieht man durch A die Geraden 1, 2, 3, welche in der durch A gehenden Bildebene P liegen. Darauf schneide man 1, 2, 3 mit $BC = m$, lothe auf 1′, 2′, 3′ herab und erhält drei Punkte von m'. Dabei ist m die Hilfslinie in P, deren Bild mit BC zusammenfällt. Zum Schnittpunkt H' von m' mit $B'C'$ bestimme H auf BC, so sind $AH = h$, $A'H' = h'$, womit die Hauptlinie gefunden ist. Endlich ziehe man f in A senkrecht zu h, verzeichne F, F' und hat $A'F' = f'$. (Diese Construction kann in mehrfacher Weise abgeändert werden.)

Anm. Diese Construction wird oft überflüssig. Sind nämlich a, b die Bilder von zwei sich schneidenden Geraden, die beide auf der Geraden vom Bilde c senkrecht stehen, so sind die Bilder der Falllinien der Ebene ab mit c parallel, die der Hauptlinien auf c senkrecht. — Für jede zu xy parallele Ebene sind die Hauptlinien zu s senkrecht, die Falllinien mit s parallel; die Spuren p der Bildebene P sind die Hauptlinien der Coordinatenebenen.

6. Unter der **Umlegung einer Ebene** E versteht man die Drehung derselben um eine Hauptlinie h und um den Winkel α oder $180^0 - \alpha$, bis die Ebene mit der durch h gehenden Bildebene zusammenfällt. Das axonometrische Bild und die Umlegung sind orthogonal-affine Figuren mit der Axe h. Es wird genügen, zu einem Punkte A in E die Umlegung (A) zu finden. Zu diesem Zwecke ziehe durch A (im Bilde) die Gerade f, es mag B der Fusspunkt in h sein. Macht man dann $B(A)$ auf $f = (f)$ gleich der Distanz der Punkte A, B im Raum, so ist diese Umlegung im Princip allgemein ausgeführt.

In Fig. 8 ist die wahre Gestalt des Dreiecks ABC ermittelt worden. Vorerst hat man hier den Scheitel O des Axenkreuzes nach A verlegt, dann ist der neue axonometrische Grundriss $A'B'C'$ mit dem ursprünglichen congruent und in paralleler Lage. Die Hauptlinie h_0 der Ebene ABC, durch A, ist hier in folgender Weise gefunden worden: Die horizontal-projicirende Ebene $m_1 m_2 m_3$ von BC schneidet P_0 in m_0, daraufhin ist der Schnittpunkt P_0 von m_0 mit BC zugleich der Schnitt von BC mit P_0, also $AP_0 = h_0$ (und $AP'_0 = h'_0$). — Zur Ausführung der Umlegung um h_0 in P_0 ziehe man CR senkrecht zu h_0, mache CS (parallel mit h_0) gleich ND, wobei D der Distanzpunkt der durch C gehenden Bildebene ist, und $R(C) = RS$. Dann ergiebt sich (B) durch Benutzung der Affinität und es ist $A(B)(C)$ die gesuchte Umlegung. (Der Winkel $CRS = \alpha$ ist der Winkel der Ebene ABC mit den Bildebenen.) — Diese Umlegung mag in noch zwei speciellen Fällen ausgeführt werden.

Fig. 9 stellt die Umlegung der Ebene xy in P_0 dar. Die Construction wird dadurch vereinfacht, dass man in dem rechtwinkligen Dreieck XOY die Hypotenuse XY und auf ihr den Höhenfusspunkt U kennt; die Höhe wird gleich $N(U)$ sein. (Es ist die durch O gehende Gerade g mit um gelegt worden.) — Die Umlegung der Ebene xy in P durch $XY = h$, anstatt in P_0, ist in analoger Weise noch ein wenig einfacher auszuführen.

Fig. 10 giebt die Umlegung einer durch O gehenden Ebene $E(e_1, e_2, e_3)$ in $P(p_1, p_2, p_3)$. Es gelangt O nach (O) und es sind (e_2), (e_3) die Umlegungen der zweiten und dritten Spur.

7. Es sollen hier und in der folgenden Nummer constructive Hilfsmittel für die Darstellung von Linien und Ebenen in senkrechter Lage hergeleitet werden. Ich behandle dieses Problem in folgenden Abstufungen:

a) In einer zu xy parallelen Ebene soll auf der Geraden g im Punkte A die Senkrechte g_1 errichtet werden.

Das Axenkreuz werde nach A verlegt (Fig. 11). Darauf verzeichne man die willkürliche Bildebene $P(p_1, p_2, p_3)$ und gehe zu drei neuen Axen x^*, y^*, z^* über, wobei $z^* = z$, $x^* = g$ sein soll. Es entsteht ein neues Spurendreieck mit A als Höhenschnitt, für dieselbe Bildebene, nämlich $X^* Y^* Z^*$. Dasselbe ist durch die Ecken Z^*, X^* und den Höhenschnitt A bestimmt und es ergeben sich zwei Möglichkeiten für die Construction von $g_1 = y^*$: man ziehe g_1 senkrecht zu $Z^* X^*$, oder $Z^* Y^*$ senkrecht zu g.

In neuer Auffassung dieser Figur sind nun $X^* Z^* = k$ und $Y^* Z^* = l$ die beiden Geraden der Bildebene P, deren axonometrische Grundrisse k' und l' mit g und g_1 zusammenfallen (unabhängig von der Verlegung des Axenkreuzes). Daher der Satz:

Sind g, g_1 zwei senkrechte Linien in einer zu xy parallelen Ebene und sind sie zugleich die Grundrisse $g = k'$, $g_1 = l'$ der beiden in irgend einer Bildebene P liegenden Geraden k, l, so sind gegenseitig g und l, g_1 und k im axonometrischen Bilde aufeinander senkrecht.

b) Dieser eben gegebene Satz kann stereometrisch direct erwiesen werden. In xy (oder parallel mit dieser Ebene) sollen g und g_1 in senkrechter Lage sich befinden (Fig. 12). Legt man durch g die auf xy senkrechte (mit z parallele) Ebene K, so schneide sie P in k, wobei $k' = g$ ist (oder es ist k' mit g parallel). Weil nun g_1 zu K senkrecht stehen muss, so ist in unserer Orthogonalprojection, mit P als Bildebene, das axonometrische Bild g_1 senkrecht auf der Spur k der Normalebene K. — Die Vertauschung von g und g_1 liefert den zweiten Theil des Satzes.

Anm. Für die räumliche Anschauung mag es oft bequem sein, in derartigen Fällen an Stelle einer beliebigen Bildebene P die Ebene P_0 durch O einzuführen; man hat sich dann mit vier Ebenen durch einen Punkt zu beschäftigen.

In Fig. 13 hat man in einer zu xy parallelen Ebene aus dem Punkte A auf die Gerade g die Senkrechte g_1 gefällt; die Bildebene durch A ist durch die Geraden 1, 2, 3 gegeben (Nr. 2); darin liegt k mit $k' = g$.

Fig. 14 endlich giebt die Construction der Senkrechten für den Fall, dass beide, g und g_1, durch O gehen und mit Benutzung der Ebene P_0 (ziehe k_0 senkrecht zu g und finde $k'_0 = g_1$). — Dass p_2^0, p_3^0 bezüglich auf y, x senkrecht stehen, erscheint hier als ein Specialfall des allgemeinen Satzes.

8. In dieser Nummer sollen aus planimetrischen Betrachtungen Constructionen über senkrechte Linien gewonnen werden, die alsdann in jeder Parallelprojection und für jede Lage der Ebene Anwendung finden.

a) In einer Ebene des Raumes seien zwei Paare rechtwinkliger Linien von den Richtungen x, y; h, f verzeichnet; man construire weitere Rechtwinkelpaare g, g_1 am Punkte O durch Ziehen von Parallelen.

Verlegt man (Fig. 15) das Paar x, y nach dem Punkte O auf g, das Paar h, f nach P auf g, und schneidet man h mit x in Q, f mit y in R, so ist der vierte Eckpunkt S des Rechtecks $PQRS$ stets ein Punkt von g_1. (Weil nämlich ROQ und RPQ rechte Winkel sind, so liegen R, O, P, Q auf dem Kreise vom Durchmesser RQ. Dieser Kreis geht auch durch S, er hat PS zum Durchmesser und es ist somit $OP = g$, $OS = g_1$ ein Paar senkrechter Linien.) — Hätte man vorhin h mit y und f mit x geschnitten, dann zu einem Rechteck ergänzt, so hätte man einen neuen Punkt von g_1 gefunden. (Auch dürfte man hier die Paare x, y; h, f gegenseitig vertauschen.)

Die directe Anwendung in Axonometrie bezieht sich auf eine der Coordinatenebenen, etwa xy (Fig. 16). Die Bilder der (im Voraus bekannten) Rechtwinkelpaare sind x, y; p_1^0 (als h) und z (als f); mit Hilfe derselben ist das weitere Paar g, g_1 (in O) construirt worden. Von g_1 sind, abgesehen von N, die beiden Punkte S und S_1 gefunden worden; das eine Rechteck der Originalebene ist auch im Bilde ein solches, das andere projicirt sich als ein Parallelogramm.)

Fig. 17 giebt die Anwendung dieser Construction von Rechtwinkelpaaren für jede Parallelprojection und für jede Ebene des Raumes (projicirende Ebenen ausgenommen). Aus den Bildern a, b; c, d von zwei Rechtwinkelpaaren* ergeben sich durch Herstellung von Parallelogrammen weitere Bilder g, g_1 von Rechtwinkelpaaren am Scheitel O (durch P auf g ziehe parallel mit a und schneide c, dann parallel mit b bis d, ergänze dies zu einem Parallelogramm und erhalte als dessen vierte Ecke den Punkt S von g_1 u. s. f.).

b) Durch den Punkt O einer Originalebene gehen zwei Rechtwinkelpaare 1, 1'; 2, 2'; durch Benutzung derselben soll aus O auf die beliebige Gerade g der Ebene die Senkrechte g_1 gefällt werden und zwar ebenfalls durch Ziehen von Parallelen.

Es werde g von 1, 1', 2, 2' in I, I', II, II' geschnitten, welche Punkte in zwei Paare getrennt sind (Fig. 18). Legt man durch I eine Parallele zu 2' und durch II die Parallele zu 1', so entsteht ein Schnittpunkt P_2, welcher auf g_1 liegen muss. Denn im Dreieck OI II sind IP_2 und IIP_2 die Höhentransversalen aus I und II, P_2 somit der Höhenschnittpunkt dieses Dreiecks und es ist OP_2 als dritte Höhe senkrecht auf der Seite I II. — Es entstehen in analoger Weise noch die weiteren Punkte P_1, P_3, P_4 von g_1 und für die Construction hat man sich etwa an die Regel zu halten: Von jedem der beiden Punktepaare wählt man einen der Punkte und legt durch jeden von diesen die Parallele zu dem gegenüberliegenden Strahle des andern Punktes.

Fig. 20 giebt die (theilweise) Anwendung für irgend eine Ebene des Raumes und für jede Parallelprojection. In der Bildebene sind a, b; c, d die Projectionen zweier Rechtwinkelpaare aus O, das Bild g schneidet sie in A, B, C, D, wobei A unzugänglich ist. Deshalb ist man auf die Wahl der Punkte B und C oder B und D der beiden Paare angewiesen. Im Uebrigen geschieht das Ziehen der Parallelen wie in der Originalebene, nach vorstehender Regel.

c) Durch ein mit *b)* analoges Verfahren lässt sich auch der Fusspunkt P der Senkrechten aus O auf g finden.

Die nach O verlegten Rechtwinkelpaare x, y; h, f der Originalebene schneiden g in X, Y; H, F (Fig. 19). Legt man durch X und O Parallelen zu f (oder h) und durch Y und O Parallelen zu h (oder f), so entsteht jedesmal ein Rechteck, dessen nicht durch O gehende Diagonale die Gerade g im Fusspunkte P schneidet.

---

* Bei allen diesen Anwendungen greifen die Paare ineinander, im Original wie im Bilde.

Diese zwei Geraden durch P stehen aufeinander senkrecht. — Vertauscht man dié beiden Paare x, y; h, f miteinander, so entstehen zwei neue rechtwinklige Linien durch P, welche in Fig. 19 punktirt verzeichnet sind. (Die eine Diagonale geht hierbei jedesmal direct durch P, die andere in der Verlängerung.)

Um' die (erstgenannte) Construction zu beweisen, lege man über OX und OY als Durchmesser Hilfskreise. Diese müssen sich in O und in P schneiden und zwar unter rechten Winkeln. Verzeichnet man dann in O das beliebige Rechtwinkelpaar h, f, mit dessen Strahlen man beide Kreise schneidet, so werden, wenn man je den Schnittpunkt von h mit dem einen Kreise durch eine Gerade mit dem Schnittpunkte von f mit dem andern Kreise verbindet, diese beiden Geraden sich im zweiten Schnittpunkte P der beiden Kreise unter rechtem Winkel schneiden (Planimetrie; Anwendung der Sätze über Peripheriewinkel auf diese Kreise).

Fig. 21 giebt die Anwendung dieser Sätze für eine beliebige Parallelprojection. Im Allgemeinen verwandeln sich hier, in Projection, die Rechtecke in Parallelogramme. Im Uebrigen sind a, b; c, d die Bilder zweier Rechtwinkelpaare etc. (Nach a), Fig. 17, würden sich in P mit Hilfe von g, g_1 und der beiden Parallelogrammdiagonalen leicht weitere Bilder von Rechtwinkelpaaren herstellen lassen.)

Die folgenden Nummern enthalten eine Reihe von Anwendungen der bisher behandelten Theorie auf die (orthogonale) Axonometrie. Der Einfachheit wegen ist wo möglich die Ebene P_0 an Stelle einer beliebigen Bildebene P angewandt worden, was eine unwesentliche Specialisirung ist.

9. Durch den Punkt P, P' zu der Geraden g, g' die Normalebene $\mathrm{N}(n_1, n_2, n_3)$ zu legen (Fig. 22).

P liegt in der Bildebene $\mathrm{P}(p_1, p_2, p_3)$, darin verzeichne man die Hauptlinie h der Ebene N als (directe) Senkrechte aus P auf g (nach Nr. 5). Die Spurpunkte H_1, H_2, H_3 von h liegen in p_1, p_2, p_3. Hierauf hat man (im Raume) in der Ebene xy die erste Spur n_1 durch H_1 senkrecht zu g' zu ziehen; im Bilde steht n_1 auf der Geraden k der Ebene P senkrecht, deren Grundriss k' mit g' übereinstimmt (Nr. 7). — Verbindet man die Schnittpunkte von n_1 mit x und y bezüglich mit H_2 und H_3, so entstehen die übrigen Spuren n_2, n_3, welche sich auf z schneiden.

10. Aus dem Punkte P, P' auf die beliebige Ebene $\mathrm{E}(e_1, e_2, e_3)$ die Senkrechte s zu fällen (Fig. 23).

Die Ebene e_1, e_2, e_3 schneidet $\mathrm{P}_0(p_1^0, p_2^0, p_3^0)$ in der Hauptlinie $h_0 = e_0$; im axonometrischen Bilde hat man s durch P senkrecht zu e_0 zu ziehen. Weiterhin legt man das Bild s' durch P' senkrecht zu k_0, wobei $k'_0 = e_1$. Damit ist s, s' gefunden; Fig. 23 enthält zudem den Fusspunkt F, F' der Senkrechten.

11. Den Abstand PR des Punktes P von der Geraden g zu bestimmen (Fig. 24).

Aus P fällt man auf die projicirende Ebene der Geraden g die Senkrechte PQ, welche ganz in der durch P gelegten Bildebene P liegt. Um dann aus Q auf g eine Senkrechte zu fällen, wird g (mit ihrer projicirenden Ebene) in P umgelegt. Der Schnittpunkt G von g mit P bleibt fest, der Spurpunkt G_0 von g in P_0 gelangt nach (G_0), wobei $G_0(G_0) = ND$ rechtwinklig an g aufgetragen wird. Auf $G(G_0) = (g)$ fälle nun die Senkrechte $Q(R)$, zu (R) findet man R auf g und R' auf g', womit die Bilder des Abstandes verzeichnet sind. — Dreht man noch $Q(R)$ nach $Q(R)^*$ auf g, so ist $P(R)^*$ die wahre Länge des gesuchten Abstandes.

12. Abstand zweier parallelen Ebenen A, B (Fig. 25).

Das Bild des Axenkreuzes liege ursprünglich bei N^*; es sind dann a_1, a_2^*, a_3 die Spuren von A. Hierauf verlege man O nach dem Schnittpunkte N von A mit y, wobei die ersten und dritten Spuren beider Ebenen ungeändert bleiben. Es erübrigt den Abstand des Punktes N von der Ebene B (b_1, b_2, b_3) zu construiren.

Das Bild p des Trägers des Abstandes hat man aus N senkrecht zu b_0 zu ziehen, ferner hat man in xy (mit Hilfe des Rechtecks $PQRS$, Nr. 8*a)*, weil a_1 mit b_1 parallel ist) eine Senkrechte p' in N auf a_1 errichtet. Diese Gerade p, p' schneidet B in B, B'. Der Punkt N hat von der durch B gelegten Bildebene P die Entfernung ND, welche als $N(N)$ rechtwinklig an p abzutragen ist. So entsteht $(N)B$, die wahre Länge des Abstandes der beiden Ebenen.

13. Neigungswinkel α_1 der Ebene E (e_1, e_2, e_3) mit xy (Fig. 26).

Räumlich gedacht geht die Neigungswinkelebene durch z und steht senkrecht auf e_1. Fällt man OS senkrecht auf e_1, so sind $OS = m$ und $ZS = n$ die Schenkel des Neigungswinkels. In der Figur ist der Fusspunkt S nach Nr. 8*c)* construirt worden. — Hierauf beachte man, dass im Raume m und n auf e_1 senkrecht stehen; nach der Anmerkung zu Nr. 5 sind deshalb im Bilde die Hauptlinien der Ebene mn auf e_1 senkrecht; man benutzt am einfachsten h_0 aus O zur Umlegung der Neigungswinkelebene in P_0.

Die Bildebene P des Punktes S (in xy) hat von P_0 den Abstand ND, man mache daher SW, parallel h_0, gleich ND, drehe VW um V nach $V(S)$ in e_1 hinein, so ist (S) die Umlegung von S in P_0; man erhält (m) und (n), welche den gesuchten Winkel (α_1) einschliessen.

14. Neigungswinkel φ zweier Ebenen A, B (Fig. 27).

Die zweiten Spuren a_2, b_2 schneiden sich im zweiten Spurpunkte K_2, ebenso a_3, b_3 im Spurpunkt K_3 der Kante k des Flächenwinkels. A und B schneiden ferner P_0 in a_0, b_0, welche k in der Spur K_0 treffen. — Nun werde k mit ihrer projicirenden Ebene in P_0 umgelegt, man erhält $(k)_0$ und es ist hierbei der Punkt K_3 benutzt worden, wobei $K_3(K_3) = ND$.

Von der noch willkürlichen Neigungswinkelebene N wähle man die Spur (Hauptlinie) h_0^N, welche a_0 und b_0 in A, B schneidet, senkrecht auf k. Aus ihrem Schnittpunkte P mit k ziehe $P(S)_0$ senkrecht auf $(g)_0$, so ist $(S)_0$ die eine Umlegung des Scheitels des Neigungswinkels. Bei der Umlegung von N in P_0 gelangt S nach (S) in k, wobei $P(S)_0 = P(S)$. Es ergeben sich $(S)A$ und $(S)B$ als die in P_0 umgelegten Schenkel des Neigungswinkels.

15. Aus Mittelpunkt und Projection eines Kreises bestimme man dessen Lage im Raume (Fig. 28); A, B; A_1, B_1 seien die Axen der Projection.

Die grosse Axe AB ist die Hauptlinie h der Kreisebene E, welche in der Bildebene p_1, p_2, p_3 des Mittelpunktes M, M' liegt. Damit sind auch die Spurpunkte H_1, H_2, H_3 von h bestimmt. Weiterhin ist CMA_1 gleich α der Neigungswinkel von E mit den Bildebenen; durch h und α ist die Lage der Ebene (zweideutig) bestimmt. Um aber die Spuren zu finden, ermittelt man wohl am einfachsten die Hauptlinie $h_0 = e_0$ in P_0. Zunächst wird die Falllinie $A_1B_1 = f$ in P_0 umgelegt; M gelangt nach $(M)_0$, wo $M(M_0) = ND$. Durch $(M)_0$ zieht man $(f)_0$ parallel mit CM und schneidet damit f in F_0. Durch F_0 ziehe h_0 und erhalte vermittelst p_1^0, p_2^0, p_3^0 die Spurpunkte H_1^0, H_2^0, H_3^0. Nun sind die Verbindungslinien der Spurpunkte von h und h_0 die Spuren e_1, e_2, e_3 der Kreisebene. (Für die zweite Lösung tritt an Stelle von h_0 deren symmetrische Linie in Bezug auf h.)

Es folgen einige Beispiele, bei denen vom Distanzkreise d einer Bildebene Gebrauch gemacht wird.

16. Den Neigungswinkel φ zweier Ebenen A, B zu construiren (Fig. 29).

Indem man die Ebenen parallel nach O verschiebt, seien a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 ihre Spuren in xy, xz, yz, a und b ihre Spuren in der willkürlichen Bildebene P(p_1, p_2, p_3). Die Kante k des Flächenwinkels geht durch O und schneidet P im Schnittpunkte Q von a mit b. Die in O errichtete Neigungswinkelebene schneidet P in n (hierbei ist $N\mathfrak{N}$ senkrecht zu k, $\mathfrak{N}Q^*$ senkrecht zu $Q\mathfrak{N}$, endlich n in Q^* senkrecht zu k gezogen worden). Bei der Umlegung der Neigungswinkelebene um n in die Ebene P gelangen O nach (O) und die Schenkel des Neigungswinkels nach $(O)A$ und $(O)B$.

17. Construction von Normalebenen zu der Geraden g, g' (Fig. 30).

Man verlege O nach einem Punkte der Geraden (oder umgekehrt) und errichte daselbst die Normalebene N^*. Soll weiterhin die Normalebene durch den Punkt P, P' gelegt werden, so wähle man zur Construction von N^* und N die durch P gehende Bildebene P; in ihr verzeichne man vor Allem den Distanzkreis d.

Es ist nun G der Schnittpunkt von g mit P (k durch G ist die Schnittlinie der Hilfsebene zgg' mit P). Die Normalebene N^* von g, in O, schneidet P in h^* (die Hilfsfigur G, N, $\mathfrak{N}$, G^*, h^* ist die Wiederholung von Q, N, $\mathfrak{N}$, Q^*, n der vorausgehenden Nummer). Verbindet man die Spurpunkte H_1^*, H_2^*, H_3^* von h^* (in p_1, p_2, p_3) mit N, so entstehen die Spuren n_1^*, n_2^*, n_3^* von N^*.

Um die Normalebene N durch P zu erhalten, zieht man deren Hauptlinie h durch P und in P senkrecht zum Bilde g. Durch die Spurpunkte H_1, H_2, H_3 werden n_1, n_2, n_3 parallel zu n_1^*, n_2^*, n_3^* gezogen. — Die Figur enthält auch den Fusspunkt F von N in g (die Hilfsebene zgg' schneidet N in l durch F).

18. Es soll noch die Frage nach Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit bei den vier axonometrischen Bildern und Rissen behandelt werden.

Stellt man das Object in einen bestimmten der Octanten, die von xy, xz, yz eingeschlossen sind, so denkt man sich für die drei Risse das Auge der Reihe nach in den unendlich fernen Punkten derjenigen Halbaxen z, y, x, welche diesem Octanten als Kanten zugehören. Deuten wir diese Halbaxen durch das Zeichen $+$ an. — Für das axonometrische Bild befindet sich das Auge in unendlicher Ferne vor der Zeichnungsfläche. — Würde sich das Object in mehrere Octanten erstrecken, so würde die Auswahl der Halbaxen, auf denen das Auge in unendlicher Ferne liegen soll, willkürlich bleiben und man hätte sich je für die eine oder die andere Halbaxe zu entscheiden.

Hierauf ist die Frage nach der Sichtbarkeit auf folgendes Princip zurückzuführen: Von zwei Punkten P, Q, deren Risse oder Bilder sich decken, ist derjenige sichtbar, welcher dem Auge näher liegt; der andere ist verdeckt.

Fig. 31 giebt beispielsweise die Durchführung für den Grundriss und das Bild, wenn es sich um scheinbare Schnittpunkte bei zwei Geraden g, l handelt. Die Halbaxe $z+$ ist festgestellt worden.

Für den Grundriss zunächst denkt man sich im Schnittpunkt von g' mit l' eine Parallele zu z gezogen und mit ihr g und l geschnitten. Man erkennt, dass der auf g liegende Punkt dem Auge näher liegt, weshalb an der genannten Stelle l' durch g' verdeckt wird. — Im Schnittpunkte der Bilder g, l decken sich die Punkte A auf g und B auf l, mit den Grundrissen A', B'. Denkt man sich jetzt durch A und B zwei Bildebenen gelegt, wie in Fig. 31 angedeutet ist, so stellt man fest, dass diesfalls die durch B gehende dem Scheitel O des Axenkreuzes näher liegt, wie die durch A gelegte. Liegt alsdann der Scheitel O vor diesen Bildebenen (vergl. Nr. 3), so tritt der in Fig. 31 verzeichnete Fall ein, dass bei $A=B$ g durch l verdeckt wird. Man könnte aber ebenso gut annehmen, dass O

hinter N liegt, resp. dass die in Fig. 31 verzeichneten Halbaxen in Bezug auf die Stellung des Auges nach rückwärts zusammentreffen; alsdann würde der umgekehrte Fall wie vorhin eintreten, es würde A dem Auge näher liegen und bei $A=B$ die Gerade l durch g verdeckt sein.

(Hat man am Objecte die Axen x, y, z gewählt und in der Bildebene ebenfalls x, y, z verzeichnet, so kann man die positiven Richtungen der räumlichen Axen einzeln auf jede Halbaxe des Bildes beziehen. Es entstehen so, bei derselben Lage der Axen, acht Bilder des Objectes, von denen jedes eine doppelte Auffassung bezüglich der sichtbaren und unsichtbaren Elemente gestattet, also hätte man schliesslich im Ganzen 16 im Allgemeinen verschiedene Bilder desselben Objectes.)

Zürich, Februar 1888.

XVI.

Ueber die galvanische Induction in einem körperlichen Leiter.

Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der inducirten elektrischen Ströme.

Von

Dr. K. Otto Richter.

(Schluss.)

II. Abschnitt.

Inductionsströme, welche von einem ruhenden Inducenten in einem bewegten körperlichen Leiter erzeugt werden.

---

§ 4.

Die Ausdrücke der elektromotorischen Kräfte.

Wir gehen nunmehr zur andern Formulirung des Problems der Induction über, indem wir uns vorstellen, dass der Inducent (bez. das inducirende System) ruht, dagegen der inducirte Conductor sich bewege. Wir erinnern dabei an Folgendes:

Ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ irgend ein mit dem in Bewegung begriffenen Körper fest verbundenes, (x, y, z) ein mit dem Inducenten verbundenes, festes Coordinatensystem, so werden x', y', z', die Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z irgend eines Punktes des sich bewegenden Körpers nach der Zeit, lineare Functionen von x, y, z, wie beschaffen auch die Bewegung des Körpers sei.

Ist der inducirte Leiter unbewegt, so hängen x, y, z nicht von t ab, und man darf also ohne Weiteres E_x, E_y, E_z aus dem transformirten Ausdruck für E_s in 7) dadurch bilden, dass man darin nacheinander x, y, z durch s ersetzt; denn die Ableitung dieses Ausdruckes mit Hilfe der Identität 4) setzt nur voraus, dass sich die Differentiationen nach σ, s, t miteinander vertauschen lassen. Dies ist aber im Allgemeinen nicht mehr gestattet, wenn sich der inducirte Leiter irgendwie bewegt, wenn also nicht nur x, y, z selbst Functionen der Zeit sind, sondern vor allen Dingen auch die Geschwindigkeitscomponenten x', y', z' von x, y, z, t abhängen. Da nach Voraussetzung das inducirende System fortan als vollständig ruhend, d. h. mit dem Coordinatensystem (x, y, z) fest verbunden zu betrachten ist, so dürfen wenigstens die Differentiationen nach ξ, η, ζ mit der nach t vertauscht werden, und man hat daher, wenn $f(r)$ eine blosse Function von $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$ ist, z. B.

$$57)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right),\ \text{etc.}$$

Z. B. für $s=x$ ist nun, weil die Differentiationen nach x und t nicht mehr vertauscht werden dürfen, die Identität 4) zu ersetzen durch die folgende:

$$58\text{a})\qquad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \sigma}\frac{\partial f}{\partial t} \\ =\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial f}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial f}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right],$$

analog für $s=y$ und $s=z$.

Hiernach wird jetzt [vergl. 7) und den Uebergang von 4) zu 7)]

$$58\text{d})\qquad E_x=\frac{\varepsilon}{2}\int d\sigma\left[-J\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial t}\right)-J\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{J}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\right] \\ +2EJ\int d\sigma\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x}\right)\right],$$

und analog E_y, E_z. Es ist aber

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x'+\frac{\partial r}{\partial y}y'+\frac{\partial r}{\partial z}z'\right)$$

und folglich

$$59)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{r^3}}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x'+\frac{\partial r}{\partial y}y'+\frac{\partial r}{\partial z}z'\right)\frac{\partial r}{\partial x} \\ +\frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}x'+\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}z'\right)+\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial z}\right)\right].$$

Andererseits ergiebt sich

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$60)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{r^3}}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x'+\frac{\partial r}{\partial y}y'+\frac{\partial r}{\partial z}z'\right)\frac{\partial r}{\partial x} \\ +\frac{1}{2\sqrt{r}}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}x'+\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}z'\right).$$

Durch Subtraction folgt aus 59) und 60)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{r}}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x}\right),$$

mithin

$$61\text{a})\qquad 4\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial \sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x}\right)\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x}\right),$$

u. s. w.

Aus den Formeln 58d) und 61a) erkennt man sogleich, dass E_x, E_y, E_z dieselben Werthe behalten, welche sie im ersten Abschnitte hatten [vergl. 7)], falls x', y', z' in Bezug auf x, y, z constant sind, also nur

Functionen der Zeit sind. Dann darf also der Conductor nur so bewegt werden, dass das Coordinatensystem ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$), welches mit ihm fest verbunden ist, beständig sich selbst parallel bleibt; und man sieht auch von vornherein ohne die obige Rechnung ein, dass dann noch die Formeln des § 2 gelten müssen.

Wenn also x', y', z' nur Functionen der Zeit sind, so können wir gleich die Formeln der §§ 1 und 2 anwenden, nur dass jetzt bei den Differentiationen nach der Zeit t nicht, wie dort, ξ, η, ζ, sondern x, y, z als Variable betrachtet werden. Beispiele dieser Art bilden also recht eigentlich den Uebergang von den Problemen des ersten Abschnittes zu den Aufgaben des zweiten. Als Beispiel dieser Art betrachten wir in § 5 die Verschiebung einer unendlich grossen planparallelen Platte von beliebiger Dicke sich selbst parallel unter einem ihr selbst parallelen Kreisstrom. Jede Verschiebung dieser Art kann aus zwei Componenten zusammengesetzt gedacht werden, deren eine als Verschiebung senkrecht gegen den Kreisstrom, deren andere als Verschiebung nach einer der Kreisstromebene parallelen Richtung erscheint. Aus den Bedingungen des Problems, wie sie in § 2 entwickelt sind, ergiebt sich aber mit Leichtigkeit, dass sich die diesen beiden Componenten entsprechenden inducirten Stromsysteme einfach übereinanderlagern, ebenso wie sich bei den bisher behandelten Fällen in § 3 ergab, dass eine Uebereinanderlagerung der einzelnen der Ortsveränderung und der Intensitätsänderung entsprechenden Stromsysteme stattfindet. Die der ersten jener beiden oben erwähnten Verschiebungscomponenten entsprechende Induction können wir, weil sie schon im ersten Beispiele des § 3 untersucht worden ist, hier bei Seite lassen (denn eine unendlich grosse planparallele Platte lässt sich als Rotationskörper in Bezug auf eine beliebige zu ihr senkrechte Gerade als Rotationsaxe betrachten), und demgemäss werden wir nur den Fall in Betracht ziehen, dass die Platte nach irgend einer festen, der Inducentenebene parallelen Richtung sich selbst parallel verschoben wird, so dass sie beständig einen und denselben Raum einnimmt.

§ 5.

Uebergangsbeispiel.

Die x-Axe sei auf der Platte und der Ebene des Inducenten senkrecht und gehe durch den Mittelpunkt des letzteren; die Richtung der y-Axe sei identisch mit der Richtung, nach welcher die Platte verschoben wird. Um der Anschaulichkeit willen nehmen wir ferner an, dass die Geschwindigkeit der Verschiebung $\left(\frac{dy}{dt} = y'\right)$ constant sei, und, um unsere Betrachtungen möglichst weit durchführen zu können, dass der inducirende Kreisstrom unendlich klein sei. Sein Radius werde wieder mit ϱ bezeichnet, seine Stromfläche ($\varrho^2 \pi$) mit λ, und die Differenz $\xi - x$, in welcher x die x-Coordinate irgend eines Punktes im Innern der Platte ist, gleich

X gesetzt; auch gebrauchen wir wieder die Bezeichnungen M und M' (s. S. 226). $\frac{dJ}{dt}$ sei der Einfachheit wegen gleich Null.

Wie S. 219 und 221 ergiebt sich auch gegenwärtig $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} = 0$, $\psi = const.$, $V_x = 0$, $\frac{\partial V_x}{\partial t} = 0$, $i_x = 0$: alle inducirten Strömungen finden in zur yz-Ebene parallelen Ebenen statt.

Ferner ergiebt sich nach 29) $V_y = -J\frac{\varepsilon}{2}\int\frac{d\eta}{r}$ und $V_y = -J\frac{\varepsilon}{2}\int_{\sigma}\frac{d\zeta}{r}$, wobei $r^2 = X^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$ ist; also nach 52a) und 52b)

$$\text{62)}\quad V_y = +\frac{\varepsilon}{2} J\lambda \frac{z}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}^3}, \quad V_z = -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda \frac{y}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}^3}.$$

Dabei ist $\sqrt{X^2+y^2+z^2}$ die Entfernung des Punktes (x, y, z) des Conductors vom Orte des Inducenten.

Ferner wird, weil in V_y und V_z nach Voraussetzung nur y mit der Zeit sich ändert,

$$\text{63a)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda y' \cdot \frac{3zy}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}^5}, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} &= -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda y' \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}^3} - \frac{3y^2}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}^5}\right]. \end{aligned}$$

Man kann diese Ausdrücke noch einfacher dadurch erhalten, dass man gleich an den ursprünglichen Werthen für V_y und V_z die Differentiation nach der Zeit unter dem Integralzeichen ausführt und dann erst integrirt. Auf diese Weise ergiebt sich nach kleiner Rechnung

$$\text{63b)}\quad \begin{aligned} \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda y' \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}}\right)\right], \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} &= +\frac{\varepsilon}{2} J\lambda y' \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{X^2+y^2+z^2}}\right)\right] \end{aligned}$$

in Uebereinstimmung mit 63a).

Setzen wir zur Abkürzung die Entfernung

$$\text{64)}\quad \sqrt{X^2+y^2+z^2} = R,$$

so wird jetzt (wegen $\psi = const.$) nach 19)

$$\text{65)}\quad \varkappa i_y = -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda y' \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial y}\right], \quad \varkappa i_z = +\frac{\varepsilon}{2} J\lambda y' \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial y}\right].$$

Die Differentialgleichung der Strömungscurven ist gegenwärtig, da durchweg $i_x = 0$ ist,

$$\text{66)}\quad \frac{dy}{dz} = \frac{i_y}{i_z} \quad \text{oder} \quad i_z\,dy - i_y\,dz = 0.$$

Nach 65) erhält sie in unserem Falle die Gestalt

$$\frac{\partial\left[\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial y}\right]}{\partial y}dy+\frac{\partial\left[\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial y}\right]}{\partial z}dz=0.$$

Die Integration derselben liefert sofort

$$\frac{\partial\left(\dfrac{1}{R}\right)}{\partial y}=const.=c$$

oder

67) $$y^2=c^2(y^2+z^2+X^2)^3.$$

Innerhalb jeder Ebene $X=const.$ bilden also die Strömungscurven eine Schaar von Curven sechster Ordnung. Betrachten wir eine dieser Schaaren, welche einem bestimmten Werthe von X entspricht, etwas näher, so fällt zunächst ins Auge (was von vornherein zu erwarten stand), dass die Curven sowohl zur z-Axe als zur y-Axe symmetrisch sind. Keine derselben schneidet die z-Axe;* denn für $y=0$ folgt $X^2+z^2=0$. Eine von ihnen ist mit der z-Axe selbst identisch (sie entspricht dem Nullwerthe von c). Jede Curve der Schaar schneidet die y-Axe in vier reellen Punkten rechtwinklig (rechtwinklig wegen der Symmetrie); denn für $z=0$ geht 67) über in $y^2=c^2(y^2+X^2)^3$ oder, wenn man mit dem absoluten Werthe $|c|$ von c multiplicirt und $y^2.|c|=Y$, $X^2.|c|=C$ setzt, wobei also C eine positive Grösse ist, ebenso wie Y: $(Y+C)^3-Y=0$, und diese Gleichung dritten Grades für Y hat zwei positive reelle Wurzeln, so lange $c^2<\frac{4}{27X^4}$.

Keine der Curven (natürlich mit Ausnahme der z-Axe) ist unendlich gross; denn setzt man $c^2=\frac{1}{c'^2}$ und führt Polarcoordinaten ein: $y^2+z^2=r^2$, $y=r\cos\vartheta$, so wird 67)

$$c'^2\cos^2\vartheta-X^4\left(\frac{X^2}{r^2}+3\right)=r^2(3X^2+r^2);$$

d. h. für keine der Curven kann r unendlich gross werden, ausgenommen die, welcher $c'=\infty$ entspricht.

Einige dieser und noch andere Resultate kann man direct aus den Werthen von $\varkappa i_y$ und $\varkappa i_z$ ablesen, welche zufolge 65) in die Gestalt

68) $$\varkappa i_y=\mathfrak{C}\cdot\frac{3yz}{R^5},\quad \varkappa i_z=\mathfrak{C}\cdot\frac{R^2-3y^2}{R^5}\quad\left(\mathfrak{C}=-\frac{\varepsilon}{2}J\lambda y'\right)$$

versetzbar sind. i_y also verschwindet längs der ganzen y- und z-Axe; dagegen verschwindet i_z überall, wo $X^2-2y^2+z^2=0$ ist, d. h. längs der Hyperbel $\frac{y^2}{\frac{1}{2}X^2}-\frac{z^2}{X^2}=1$, welche also der Ort aller Punkte ist, in welchen

* Es braucht kaum gesagt zu werden, dass wir bei Betrachtung dieser Curvenschaar in der Ebene $X=const.$ unter „y-Axe“ und „z-Axe“ nicht die dem Coordinatensystem (x, y, z) selbst angehörigen Axen verstehen, sondern die Schnittgeraden der xy-Ebene bez. xz-Ebene mit der Ebene $X=const.$

die Strömungscurven der y-Axe parallel verlaufen. Die Asymptoten dieser Hyperbel sind $\sqrt{2}y \pm z = 0$; die Hyperbel selbst schneidet die y-Axe in den Punkten $y = \pm \frac{X}{\sqrt{2}}$, $z = 0$, und diese beiden Punkte sind daher die einzigen im Endlichen gelegenen Punkte, in welchen gleichzeitig i_x und i_z Null sind. Sie sind offenbar Wirbelpunkte, um welche herum sich die Curvenschaar in geschlossenen, immer mehr sich erweiternden Wirbeln legt, bis die grösseren dieser Wirbelcurven, der z-Axe sich mehr und mehr nähernd, in die z-Axe schliesslich zusammenfallen.

Was die Richtung der Strömungen längs dieser Curven betrifft, so ergiebt sich alles Nöthige hierüber aus 68); wir gehen hier nicht darauf ein.

Es sei nur noch hervorgehoben, dass die zur Construction der Curvenschaar bequemste Gleichungsform derselben $y^2 = c^2(X^2 + r^2)^3$ ist, wenn y und r $(= \sqrt{y^2 + z^2})$ als Variable betrachtet werden.

Der den Wirbelpunkten entsprechende Maximalwerth von c^2 (über den also c^2 nicht hinausgehen darf, ohne dass die entsprechenden Curven der Schaar imaginär werden) ergiebt sich sofort, wenn man in 67) die Coordinaten der Wirbelpunkte, $y^2 = \frac{X^2}{2}$, $z^2 = 0$, einsetzt:

$$c^2 = \frac{4}{27 X^4}.$$

Denkt man sich nunmehr, aus der bisher betrachteten einzelnen Ebene $X = const.$ heraustretend, die Gesammtheit aller Strömungscurven in der ganzen Platte, so ergeben sich in jeder Ebene zwei Wirbelpunkte, und alle diese liegen in der xy-Ebene des Coordinatensystems (x, y, z), und zwar längs zweier durch den Ort des Inducenten gehender gerader Linien, deren Gleichung nach dem Vorigen offenbar $y = \pm \frac{X}{\sqrt{2}}$ ist; sie stossen an der Stelle $X = 0$, $y = z = 0$ unter einem Winkel von ungefähr $70\frac{1}{2}$ Grad zusammen.

Denkt man sich die Platte (was nach S. 216 eigentlich ausgeschlossen bleiben muss und nur als Grenzfall Interesse hat) bis unmittelbar an den Inducenten heranreichend, so geht in der Ebene $X = 0$ das Curvensystem über in das Curvensystem $\pm y = cr^3$ $(r = \sqrt{y^2 + z^2})$, die Hyperbel, welche die Stellen angiebt, an denen $i_z = 0$ ist, in das Geradenpaar $y = \pm \frac{z}{\sqrt{2}}$, und die beiden einfachen Wirbel vereinigen sich zu einem Doppelwirbel.

Den hier behandelten Fall der Induction kann man sich so verwirklicht denken, dass man eine sehr grosse planparallele Kupferplatte unter einer sehr kurzen und dünnen Inductionsspirale verschiebt. Der mathematische Ausdruck für die Induction durch eine solche sehr kurze Inductionsspirale ist schon auf S. 225 benutzt; mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen haben wir, um die entsprechenden Formeln zu erhalten, in 65) nur $J\lambda\delta\, d\xi$ an Stelle von $J\lambda$ zu setzen.

Dann ergiebt sich

$$\varkappa i_y = -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda\delta y' \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\left(\frac{d\xi}{R}\right)}{\partial y}\right], \quad \varkappa i_z = +\frac{\varepsilon}{2} J\lambda\delta y' \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\left(\frac{d\xi}{R}\right)}{\partial y}\right],$$

denn $d\xi$ als Constante hat auf die Differentiationen nach y und z keinen Einfluss. Für die von einem Solenoid, dessen Axe die x-Axe ist und dessen Pole die x-Coordinaten ξ und ξ' haben, welchen die Differenzen $X=\xi-x$ und $X'=\xi'-x$, ebenso die Entfernungen $R=\sqrt{X^2+y^2+z^2}$, bez. $R'=\sqrt{X'^2+y^2+z^2}$ zugehören, inducirten Ströme wird man demnach erhalten

$$\varkappa i_y = -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda\delta y' \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\left(\int_\xi^{\xi'}\frac{d\xi}{R}\right)}{\partial y}\right], \quad \varkappa i_z = +\frac{\varepsilon}{2} J\lambda\delta y' \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\left(\int_\xi^{\xi'}\frac{d\xi}{R}\right)}{\partial y}\right]$$

oder nach leichter Reduction

$$69)\quad \begin{aligned} \varkappa i_y &= \frac{\varepsilon}{2} y' \frac{\partial}{\partial z}\left\{y\left[\frac{M}{R(X+R)}+\frac{M'}{R'(X'+R')}\right]\right\}, \\ \varkappa i_z &= -\frac{\varepsilon}{2} y' \frac{\partial}{\partial y}\left\{y\left[\frac{M}{R(X+R)}+\frac{M'}{R'(X'+R')}\right]\right\}, \end{aligned}$$

wobei M, M' in derselben Bedeutung wie S. 226 gebraucht sind. Werden beide Pole im Endlichen liegend gedacht, so sind hiernach die Strömungscurven durch $y\left[\frac{M}{R(R+X)}+\frac{M'}{R'(R'+X')}\right]=const.$ dargestellt (Curven zwölfter Ordnung). Dagegen hat man für einen einzigen inducirenden Pol (indem man $\xi'=\infty$ setzt)

$$70)\quad \varkappa i_y = \frac{\varepsilon}{2} My' \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{R(R+X)}\right), \quad \varkappa i_z = -\frac{\varepsilon}{2} My' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{R(R+X)}\right),$$

und die Strömungscurven werden in jeder Ebene $X=const.$

$$\frac{y}{R(R+X)} = const. = C \quad (-\infty < C < +\infty)$$

oder

$$\pm y = C.R(R+X) \quad (0 < C < \infty),$$

Curven vierter Ordnung, welche sich nach der Gleichungsform

$$\pm y = C(r^2+X^2+X\sqrt{r^2+X^2}),$$

wenn darin y und $r=\sqrt{y^2+z^2}$ als Variable betrachtet werden, sehr bequem construiren lassen.

Im Grossen und Ganzen ist der Verlauf der Ströme derselbe wie im vorigen Falle (Induction durch einen einzelnen unendlich kleinen Kreisstrom oder durch ein unendlich kurzes Solenoid), nur im Einzelnen haben sich die Verhältnisse geändert; es gilt dem S. 275 Gesagten Analoges. Besonders mag noch hervorgehoben werden, dass, während dort die Geraden, auf denen die Wirbelpunkte liegen, am Orte des Inducenten unter einem Winkel von etwa $70\frac{1}{2}{}^0$ zusammenstossen, sie sich hier an der Stelle des Poles unter einem Winkel von ungefähr $139\frac{3}{4}{}^0$ begegnen.

Die Entwickelung der Formeln 70) aus dem Weber'schen Gesetze ist sehr leicht zu bewerkstelligen mit Hilfe der von Jochmann* auf Grund dieses Gesetzes abgeleiteten Gleichungen.**

Wir gehen nunmehr zu der Aufstellung der allgemeineren Formeln über, welche einer ganz beliebigen Bewegung des Conductors entsprechen.

§ 6.

Formulirung des allgemeinen Problemes.

Zufolge 58) und 61) werden die Componenten der von einem festen Drahtsystem σ inducirten elektromotorischen Kräfte mit Rücksicht auf die Bezeichnungen 11) und 12)

$$71)\quad E_x=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{\varepsilon}{2}J\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x}\right)d\sigma,\ \text{etc.}$$

Bei der weiteren Behandlung des Problems kommt es vor Allem auf die Berechnung des Trinoms $\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$ an.

Setzen wir zur Vereinfachung vorläufig $\frac{dJ}{dt}=0$, so wird jetzt nach 29)

$$72)\quad \begin{aligned}\frac{1}{J\cdot\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\partial V_x}{\partial t}&=\int\limits_\sigma\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\cdot\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x'+\frac{\partial r}{\partial y}y'+\frac{\partial r}{\partial z}z'\right)d\sigma\\ &=\int\limits_\sigma\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\cdot\frac{1}{r^3}((x-\xi)x'+(y-\eta)y'+(z-\zeta)z')\,d\sigma,\end{aligned}$$

und analoge Formeln ergeben sich für $\frac{\partial V_y}{\partial t}$ und $\frac{\partial V_z}{\partial t}$. Hiernach wird weiter

$$\frac{1}{J\cdot\frac{\varepsilon}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}&=\int\limits_\sigma\left[\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\frac{\partial\left(\frac{1}{r^3}\right)}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\frac{\partial\left(\frac{1}{r^3}\right)}{\partial y}+\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\frac{\partial\left(\frac{1}{r^3}\right)}{\partial z}\right]((x-\xi)x'+(y-\eta)y'+(z-\zeta)z')\,d\sigma\\ &+\int\limits_\sigma\left[\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}x'+\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}y'+\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}z'\right]\frac{d\sigma}{r^3}\\ &+\left\{\int\limits_\sigma\frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\cdot\frac{d\sigma}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x}\right)+\int\limits_\sigma\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}\cdot\frac{d\sigma}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial y}\right)\right.\\ &\quad\left.+\int\limits_\sigma\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}\cdot\frac{d\sigma}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial z}\right)\right\},\end{aligned}$$

oder, da das erste Integral rechts mit dem zweiten zusammen

---

* Crelle's Journal, Bd. 63 S. 158 flgg.

** ibid. S. 166 Gl. 15. Zu der Bezeichnung Jochmann's sei dies bemerkt: Sein $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ entspricht unserem x', y', z', sein u, v, w unserem i_x, i_y, i_z, endlich sein ϱ, K, V, μ unserem R, $\frac{1}{\varkappa}$, φ, M, und $2k$ steht an Stelle unseres $\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\int_\sigma \left[\frac{\partial\left(\frac{\xi-x}{r^3}\right)}{\partial\sigma}x' + \frac{\partial\left(\frac{\eta-y}{r^3}\right)}{\partial\sigma}y' + \frac{\partial\left(\frac{\zeta-z}{r^3}\right)}{\partial\sigma}z'\right]d\sigma = 0$$

ergiebt (denn x', y', z' sind von σ unabhängig):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_y}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}\right) \cdot$$

73)

$$\begin{aligned} = -J\frac{\varepsilon}{2}\Bigg\{ &\int_\sigma \frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x}\right]d\sigma \\ &+\int_\sigma \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial y}\right]d\sigma \\ &+\int_\sigma \frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial z}\right]d\sigma\Bigg\}. \end{aligned}$$

Ferner können, da x', y', z' und ihre Differentialquotienten nach x, y, z von σ nicht abhängen, die in den Fundamentalgleichungen 71) rechts stehenden Integrale [vergl. den Uebergang von 12) zu 29)] in die Gestalt versetzt werden

73b)

$$\begin{aligned} &\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial x}\right)d\sigma \\ &= -\int_\sigma \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}\frac{\partial z'}{\partial x}\right)d\sigma, \text{ etc. etc.,} \end{aligned}$$

so dass die folgende Gleichung hervorgeht:

$$\begin{aligned} J\frac{\varepsilon}{2}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x} + \cdots\right)d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \cdots\right)d\sigma \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial z} + \cdots\right)d\sigma\Bigg\} \end{aligned}$$

74)

$$\begin{aligned} = -J\frac{\varepsilon}{2}\Bigg\{&\int_\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}\frac{\partial z'}{\partial x}\right)d\sigma \\ &+\int_\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}\frac{\partial z'}{\partial y}\right)d\sigma \\ &+\int_\sigma \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}\frac{\partial z'}{\partial z}\right)d\sigma\Bigg\}. \end{aligned}$$

Wir führen jetzt folgende Abkürzungen ein:

75) $$\frac{\partial x'}{\partial x} = x'_x, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = x'_y, \quad \frac{\partial x'}{\partial z} = x'_z, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = y'_x, \text{ etc.}$$
etc.;

76) $$\int_\sigma \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\sigma = (\xi_x), \quad \int_\sigma \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} d\sigma = (\xi_y), \quad \int_\sigma \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} d\sigma = (\xi_z),$$
$$\int_\sigma \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} d\sigma = (\eta_x), \text{ etc.}$$
etc.;

77) $$\int_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} d\sigma = (\xi), \quad \int_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} d\sigma = (\eta), \quad \int_\sigma \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} d\sigma = (\zeta).$$

Dann erhält man auf Grund der Gleichungen 14), 15), 71), 73), 74)

78) $$\varkappa\left(\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z}\right) = 0$$
$$= -\Delta\psi - J\frac{\varepsilon}{2}\left\{\begin{array}{r} 2x'_x(\xi_x) + 2y'_y(\eta_y) + 2z'_z(\zeta_z) \\ +(y'_z + z'_y)[(\eta_z) + (\zeta_y)] + (z'_x + x'_z)[(\zeta_x) + (\xi_z)] \\ +(x'_y + y'_x)[(\xi_y) + (\eta_x)] \end{array}\right\}.$$

Bedenkt man ferner, dass nach 72) und 76)

79) $$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -J\frac{\varepsilon}{2}[x'(\xi_x) + y'(\xi_y) + z'(\xi_z)], \text{ etc.}$$

ist, so ergiebt sich weiter aus 14), 15), 71), 73b)

80) $$\varkappa i_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2}J\{x'(\xi_x) + y'(\xi_y) + z'(\xi_z) + x'_x(\xi) + y'_x(\eta) + z'_x(\zeta)\}, \text{ etc.}$$

Nach 76) und 77) ist aber

81) $$(\xi_x) = \frac{\partial(\xi)}{\partial x}, \quad (\xi_y) = \frac{\partial(\xi)}{\partial y}, \quad (\xi_z) = \frac{\partial(\xi)}{\partial z},$$
$$(\eta_x) = \frac{\partial(\eta)}{\partial x}, \text{ etc.}$$
etc.;

mithin lassen sich die Gleichungen 80) auch in der Form schreiben:

82) $$\varkappa i_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2}J\{y'[(\xi_y) - (\eta_x)] + z'[(\xi_z) - (\zeta_x)]\}, \text{ etc.},$$

wo W die folgende Bedeutung hat:

83) $$W = \frac{\varepsilon}{2}J[x'(\xi) + y'(\eta) + z'(\zeta)].$$

Mit Hilfe der Gleichungen 82) folgt eine andere Darstellung des Ausdruckes $\frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} + \frac{\partial i_z}{\partial z}$; denn es ist zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\{y'[(\xi_y)-(\eta_x)]+z'[(\xi_z)-(\zeta_x)]\}+\frac{\partial}{\partial y}\{z'[(\eta_z)-(\zeta_y)]+x'[(\eta_x)-(\xi_y)]\}$$

84a)
$$+\frac{\partial}{\partial z}\{x'[(\zeta_x)-(\xi_z)]+y'[(\zeta_y)-(\eta_z)]\}$$
$$=x'[(\eta_{xy})-(\xi_{yy})]+x'[(\zeta_{xz})-(\xi_{zz})]+y'[(\xi_{yx})-(\eta_{xx})]+y'[(\zeta_{yz})-(\eta_{zz})]$$
$$+z'[(\xi_{zx})-(\zeta_{xx})]+z'[(\eta_{zy})-(\zeta_{yy})]$$
$$+x'_y[(\eta_x)-(\xi_y)]+x'_z[(\zeta_x)-(\xi_z)]+y'_x[(\xi_y)-(\eta_x)]+y'_z[(\zeta_y)-(\eta_z)]$$
$$+z'_x[(\xi_z)-(\zeta_x)]+z'_y[(\eta_z)-(\zeta_y)],$$

wo (ξ_{xx}), (ξ_{xy}), ... die zweiten Differentialquotienten von (ξ), (η), (ζ) bedeuten jedesmal nach denjenigen beiden Coordinaten, welche als Indices hinzugefügt sind. Die rechte Seite dieser Gleichung wird aber, wenn man sich erinnert, dass

$$\xi_{xx}+\xi_{yy}+\xi_{zz}=0$$

ist [vergl. 77)], gleich

84b)
$$x'\frac{\partial Q}{\partial x}+y'\frac{\partial Q}{\partial y}+z'\frac{\partial Q}{\partial z}+(x'_y-y'_x)[(\eta_x)-(\xi_y)]+(y'_z-z'_y)[(\zeta_y)-(\eta_z)]$$
$$+(z'_x-x'_z)[(\xi_z)-(\zeta_x)],$$

wo

85)
$$Q=(\xi_x)+(\eta_y)+(\zeta_z)$$

ist. Ferner hat man nach 11)

$$U=-J\cdot\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x'+\frac{\partial r}{\partial y}y'+\frac{\partial r}{\partial z}z'\right)d\sigma$$

$$=-J\cdot\frac{\varepsilon}{2}\left\{x'\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma+y'\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma+z'\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma\right\}$$

oder [vergl. S. 218 die Ableitung von 29)]

$$U=+J\frac{\varepsilon}{2}\left\{x'\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}d\sigma+y'\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}d\sigma+z'\int\limits_\sigma\frac{1}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}d\sigma\right\}$$

oder nach 77)

$$U=J\frac{\varepsilon}{2}\{x'(\xi)+y'(\eta)+z'(\zeta)\},$$

also auf Grund von 83)

86)
$$W=U.$$

Mit Berücksichtigung von 18) nehmen jetzt die Formeln 82) die Gestalt an

87)
$$\varkappa i_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{2}J\{y'[(\xi_y)-(\eta_x)]+z'[(\xi_z)-(\zeta_x)]\},\text{ etc.,}$$

und gleichzeitig erhält man zufolge 84a), b), 85) und 86) aus 82)

$$\varkappa\left(\frac{\partial i_x}{\partial x}+\frac{\partial i_y}{\partial y}+\frac{\partial i_z}{\partial z}\right)=0=-\varDelta\varphi$$

88)
$$-\frac{\varepsilon}{2}J\left\{\begin{matrix}x'\frac{\partial Q}{\partial x}+y'\frac{\partial Q}{\partial y}+z'\frac{\partial Q}{\partial z}\\+(x'_y-y'_x)[(\eta_x)-(\xi_y)]+(y'_z-z'_y)[(\zeta_y)-(\eta_z)]+(z'_x-x'_z)[(\xi_z)-(\zeta_x)]\end{matrix}\right\}.$$

Nachträglich übersieht man sofort, dass, wenn $\frac{dJ}{dt}$ von Null verschieden ist, auf der rechten Seite der Gleichungen für $\varkappa i_x$ der Ausdruck

89a) $$\left\{\begin{array}{l} \underline{-\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}(\xi)}, \\ \text{auf der rechten Seite der Gleichungen für } \varkappa i_y \text{ und } \varkappa i_z \text{ analog} \\ \underline{-\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}(\eta)} \text{ bez. } \underline{-\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}(\zeta)} \end{array}\right.$$

hinzutritt und demgemäss auf der rechten Seite der Gleichungen für $\varkappa\left(\frac{\partial i_x}{\partial x}+\frac{\partial i_y}{\partial y}+\frac{\partial i_z}{\partial z}\right)$ nach 85)

89b) $$\underline{-\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}Q}$$

zuzufügen ist.

Man weist schliesslich leicht nach, dass Q identisch mit Null ist. In der That, aus 85) und 76) ergiebt sich

$$Q=\int\limits_\sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right)d\sigma=-\int\limits_\sigma\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\sigma}d\sigma,$$

mithin

90) $$Q=0.$$

Mit Rücksicht auf 89a), b) schreiben sich nunmehr die Gleichungen 80) und 78) vollständig wie folgt:

91) $$\begin{aligned}\varkappa i_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{2}J\{[x'(\xi_x)+y'(\xi_y)+z'(\xi_z)]+[x'_x(\xi)+y'_x(\eta)+z'_x(\zeta)]\}\\ -\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}(\xi),\text{ etc.,}\end{aligned}$$

92) $$\Delta\psi+\frac{\varepsilon}{2}J\left\{\begin{array}{c}2[x'_x(\xi_x)+y'_y(\eta_y)+z'_z(\zeta_z)]\\ +(y'_z+z'_y)[(\eta_z)+(\zeta_y)]+(z'_x+x'_z)[(\zeta_x)+(\xi_z)]+(x'_y+y'_x)[(\xi_y)+(\eta_x)]\end{array}\right\}=0,$$

und die ebenfalls zusammengehörigen Gleichungen 87) und 88)

93) $$\varkappa i_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{2}J\{y'[(\xi_y)-(\eta_x)]+z'[(\xi_z)-(\zeta_x)]\}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}(\xi),\text{ etc.,}$$

94) $$\Delta\varphi+\frac{\varepsilon}{2}J\{(x'_y-y'_x)[(\eta_x)-(\xi_y)]+(y'_z-z'_y)[(\zeta_y)-(\eta_z)]+(z'_x-x'_z)[(\xi_z)-(\zeta_x)]\}=0.$$

Jedes der beiden Systeme 91), 92); 93), 94) ist zusammen mit den beiden folgenden Bedingungen, im ersten Falle

95) $\bar{i}_n=0$ überall an der Oberfläche des Conductors,

96) $\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial z}$ stetig überall im Innern des Conductors;

im zweiten Falle

97) $\bar{i}_n=0$ überall an der Oberfläche,

98) $\varphi, \ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \ \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ stetig überall im Innern des Conductors,

ein mathematischer Ausdruck unseres Problems. Jedoch ist die erste Formulirung wohl in den meisten Fällen der zweiten [Gl. 93), 94), 97), 98)] vorzuziehen. Aus dieser zweiten ergiebt sich die schon von Jochmann auf Grund des Weber'schen Gesetzes abgeleitete, dasjenige speciellere Problem betreffende Formulirung, bei welchem die Induction nur durch Magnetpole bewirkt wird,* auf leichte Weise durch Integrationen von 93), 94) nach ξ oder η oder ζ mit der oberen Integrationsgrenze ∞, in der S. 225 und 226 angegebenen Weise. Dabei ist es einerlei, ob man nach ξ, η oder ζ integrirt. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die bisher behandelten und in der Folge noch zu behandelnden Fragen, bei welchen die Induction durch einen Solenoidpol bewirkt wird.**

Auf ähnliche Weise wie die Gl. 93), 94) lassen sich auch die Gl. 91), 92) auf den Fall anwenden, dass die Induction von einer gegebenen magnetischen Vertheilung herrührt; doch wollen wir nicht näher darauf eingehen.

Die wichtigste aller hier in Betracht kommenden Bewegungsarten des Conductors ist ohne Zweifel die Rotation um eine feste Axe. Legen wir das Coordinatensystem so, dass die x-Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt, nehmen als Coordinatensystem ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) ebenfalls ein System, dessen $\mathfrak{x}$-Axe zugleich x-Axe und Rotationsaxe ist, so zwar, dass die Coordinatenanfangspunkte beider Systeme, sowie die Richtung der x-Axe und $\mathfrak{x}$-Axe identisch sind, und bezeichnen wir in irgend einem Augenblick der Bewegung den Winkel zwischen der y-Axe und $\mathfrak{y}$-Axe (oder, was dasselbe sein wird, den Winkel zwischen z-Axe und $\mathfrak{z}$-Axe, da ja beide Coordinatensysteme positiv sein sollen) mit ϑ, so haben wir die Beziehungen

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \mathfrak{y} \cos\vartheta - \mathfrak{z} \sin\vartheta, \quad z = \mathfrak{y} \sin\vartheta + \mathfrak{z} \cos\vartheta,$$

mithin, wenn die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\vartheta}{dt}$ mit w bezeichnet wird,

99) $$x' = 0, \quad y' = -wz, \quad z' = +wy,$$

folglich [vergl. 75)]

100) $$x'_x = x'_y = x'_z = y'_x = y'_y = z'_x = z'_z = 0, \quad y'_z = -w, \quad z'_y = +w.$$

Hiernach geht in diesem Falle das System der Gleichungen 91), 92) einschliesslich der Bedingungen 95), 96) in das folgende über:

101) $$\begin{cases} \varkappa i_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\xi_y) - y(\xi_z)\} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{dJ}{dt} \cdot (\xi), \\ \varkappa i_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\eta_y) - y(\eta_z) - (\zeta)\} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{dJ}{dt} \cdot (\eta), \\ \varkappa i_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\zeta_y) - y(\zeta_z) + (\eta)\} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{dJ}{dt} \cdot (\zeta); \end{cases}$$

* Man vergl. die citirte Abhandlung S. 166, 169.

** Ebenso können die Formeln, welche sich auf die Induction eines Magnetpoles beziehen, in leicht ersichtlicher Weise auf beliebig viele Pole ausgedehnt werden.

102) $\bar{i}_n = 0$ überall an der Oberfläche,

103) $\Delta\psi = 0$,

104) $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}$ stetig $\Big\}$ überall im Innern des Conductors.

Aus 103) und 104) zusammen folgt $\psi = const. = C$, und demgemäss vereinfachen sich auch die Gleichungen 101).

Nimmt man also noch mit Berücksichtigung von 99) Gl. 83) und 86), sowie Gl. 15) hinzu, so ist schliesslich unser Problem für den Fall, dass der Conductor um eine feste Axe rotirt, durch die Gesammtheit der folgenden Gleichungen bestimmt:

105)
$$\begin{cases} \varkappa i_x = \frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\xi_y) - y(\xi_z)\} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}(\xi), \\ \varkappa i_y = \frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\eta_y) - y(\eta_z) - (\zeta)\} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\cdot(\eta), \\ \varkappa i_z = \frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\zeta_y) - y(\zeta_z) + (\eta)\} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{dJ}{dt}\cdot(\zeta); \end{cases}$$

106) $\bar{i}_n = 0$ überall an der Oberfläche des Conductors,

107)
$$U = -\frac{\varepsilon}{2} J w \{z(\eta) - y(\zeta)\}, \quad \varphi = U + C;$$

darin sind (ξ), (η), (ζ), (ξ_y) etc. durch 77), 76), 81) gegeben, w bedeutet die Winkelgeschwindigkeit und C ist eine Constante, welche sich aus dem Anfangszustande bestimmt.

§ 7 (erstes Beispiel zu § 6).

Rotation einer Platte unter dem Einflusse eines Magnetpoles.

Der inducirte Leiter sei eine unendlich grosse planparallele Platte von beliebiger Dicke, welche um eine auf ihr senkrechte Axe, die zugleich die x-Axe sei, rotirt; der Inducent sei ein unendlich kleiner Kreisstrom, dessen Ebene den Begrenzungsebenen des Conductors und also auch der yz-Ebene parallel ist, und sein Mittelpunkt befinde sich in der xy-Ebene.

Dann ist $(\xi) = (\xi_y) = \xi_z = 0$, und nach 76) wird

$$z(\eta_y) - y(\eta_z) = \int_\sigma \left(z\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} - y\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right) d\eta = z\int_\sigma \frac{\eta}{r^3}\,d\eta - y\int_\sigma \frac{\zeta}{r^3}\,d\eta$$

ebenso

$$z(\zeta_y) - y(\zeta_z) = z\int_\sigma \frac{\eta}{r^3}\,d\zeta - y\int_\sigma \frac{\zeta}{r^3}\,d\zeta$$

oder nach 52), wenn wir mit η auch die y-Coordinate des Mittelpunktes des Inducenten bezeichnen:

$$108)\quad\left\{\begin{aligned}
&z(\eta_y)-y(\eta_z)=\lambda\left(z\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{R^3}\right)}{\partial z}+\frac{y}{R^3}\right),\\
&z(\zeta_y)-y(\zeta_z)=\lambda\left(\frac{z}{R^3}-z\eta\frac{\partial\left(\frac{1}{R^3}\right)}{\partial y}\right),\\
&\text{sowie}\\
&-(\zeta)=\lambda\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial y}=-\lambda\frac{y-\eta}{R^3},\quad(\eta)=\lambda\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial z}=-\frac{\lambda z}{R^3},
\end{aligned}\right.$$

wobei $R=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2}=\sqrt{X^2+(\eta-y)^2+z^2}$ die Entfernung des Conductorpunktes (x, y, z) von dem Orte $(\xi, \eta, 0)$ des Inducenten bedeutet.

Hiernach erhält man aus 105) für $\frac{dJ}{dt}=0$ zuerst

$$i_x=0,$$

sodann weiter

$$109)\quad \varkappa i_y=\frac{\varepsilon}{2}J\lambda w\eta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{R^3}\right),\quad \varkappa i_z=-\frac{\varepsilon}{2}J\lambda w\eta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{R^3}\right);$$

also wird das System der Strömungscurven genau dasselbe sein, welches wir in § 5 fanden für die Verschiebung einer Platte unter einem unendlich kleinen inducirenden Strome. Dieses merkwürdige Resultat überträgt sich natürlich auch auf die Induction durch einen Magnetpol, und wir werden dann statt 109) erhalten

$$110)\quad \varkappa i_y=\frac{\varepsilon}{2}Mw\eta\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{R(R+X)}\right],\quad \varkappa i_z=-\frac{\varepsilon}{2}Mw\eta\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{z}{R(R+X)}\right].$$

Diese Gleichungen ebenso wie das S. 276 über die zugehörigen Strömungscurven Gesagte stimmen übrigens mit den Jochmann'schen Entwickelungen (denn dieser Fall ist schon von Jochmann behandelt worden*) vollständig überein. Man bemerke aber, wie einfach unsere Ableitung der Gleichungen 109) ist, verglichen mit dem mühsamen von Jochmann verfolgten Wege.

§ 8 (zweites Beispiel zu § 6).

Rotation einer Kugel unter dem Einflusse eines in der Rotationsaxe befindlichen Magnetpoles.

Unsere letzten Betrachtungen sollen sich auf eine Aufgabe beziehen, von welcher ein specieller Fall ebenfalls von Jochmann** schon gelöst worden ist. Jedoch werden wir die Aufgabe allgemein lösen, und aus unseren allgemeinen Formeln werden sich auch die specielleren Jochmann-schen Ergebnisse mit Leichtigkeit ableiten lassen.

---

* Man vergl. die schon mehrmals angeführte Abhandlung, Cr. Journ. Bd. 63 S. 172—177.

** l. c. S. 170, 171.

Den Inducenten denken wir uns zuerst wieder als einzigen unendlich kleinen Kreisstrom.

Der Kugelmittelpunkt sei Coordinatenanfang, und zwar werde die x-Axe durch den Inducenten gelegt; der Kugelradius sei A, und im Uebrigen mögen die bisherigen Bezeichnungen beibehalten werden.

Zur Vereinfachung setzen wir wieder $\frac{dJ}{dt} = 0$ und haben, da der unendlich kleine inducirende Strom parallel der yz-Ebene gedacht wird, auch $(\xi) = (\xi_y) = (\xi_z) = 0$, und in den Formeln 108) gegenwärtig $\eta = 0$ zu nehmen. Hiernach wird auf Grund von 105)

$$i_x = 0, \quad i_y = 0, \quad i_z = 0,$$

d. h. es finden gar keine Strömungen statt. Dagegen müssen sich also die durch die Induction geschiedenen Elektricitäten als freie statische Elektricität anhäufen, und sie zu berechnen, ist unsere Aufgabe. Zu diesem Zwecke gilt es, φ zu ermitteln, oder also nach 107), zunächst U zu finden. Die in U vorkommenden Integrale (η) und $-(\zeta)$ haben nach 108) die Werthe

111) $$(\eta) = \lambda \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial z}, \quad -(\zeta) = \lambda \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial y},$$

wobei jetzt $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{X^2 + y^2 + z^2}$ ist.

Die weitere Behandlung des Problems macht die Einführung von Polarcoordinaten nothwendig. Es sei also fortan $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Entfernung irgend eines Punktes x, y, z vom Coordinatenanfang (Kugelmittelpunkt), $\bar{\omega}$ der Winkel, welchen die Projection von r in die yz-Ebene mit der y-Axe einschliesst, ϑ der Winkel zwischen r und der x-Axe. Zudem werde

112) $$\cos\vartheta = \mu$$

gesetzt. Dann hat man die Beziehungen

113) $$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad tg\,\bar{\omega} = \frac{z}{y}, \quad \cos\vartheta = \mu = \frac{x}{r}; \\ x = r\cos\vartheta = r\mu, \quad y = r\sin\vartheta\cos\bar{\omega}, \quad z = r\sin\vartheta\sin\bar{\omega}. \end{cases}$$

Weiter ergiebt sich nach 111) und 107), wenn zur Abkürzung

114) $$-\frac{\varepsilon}{2} J\lambda w = \mathfrak{C}$$

gesetzt wird:

$$U = \mathfrak{C}\left[r\sin^2\vartheta \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial r} + \sin\vartheta\cos\vartheta \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial \vartheta}\right],$$

oder, da $\frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial \mu}$ und $\sin^2\vartheta = 1 - \mu^2$ ist nach 112):

115) $$U = \mathfrak{C}(1 - \mu^2)\left[r \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial r} - \mu \frac{\partial \left(\frac{1}{R}\right)}{\partial \mu}\right].$$

Bezeichnet man mit $P_n(\mu)$ die Kugelfunction der ersten Art n^{ter} Ordnung des Arguments μ, so ist

$$\frac{1}{R}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{\xi^{n+1}}P_n(\mu),$$

wo ξ die Entfernung des Inducenten vom Kugelmittelpunkt bedeutet; also

$$116)\quad r\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial r}-\mu\frac{\partial\left(\frac{1}{R}\right)}{\partial\mu}=\frac{1}{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\xi}\right)^n(n P_n(\mu)-\mu P'_n(\mu)),$$

wenn unter $P'_n(\mu)$ die Ableitung $\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$ verstanden wird. Man weist nun leicht mit Hilfe der für P_n geltenden Differentialgleichung nach, dass

$$n P_n(\mu)-\mu P'_n(\mu)=-P'_{n-1}(\mu)\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

ist, so dass man erhält [zufolge 115) und 116)]

$$117)\qquad -U=\frac{\mathfrak{C}}{\xi}\sum_{2}^{\infty}(1-\mu^2)\left(\frac{r}{\xi}\right)P'_{n-1}(\mu).$$

Weiter folgt hieraus

$$\Delta U=-\frac{\mathfrak{C}}{\xi r^2}\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{r}{\xi}\right)^n[\{(n^2+n-2)-(n^2+n-6)\mu^2\}P'_{n-1}(\mu)$$
$$-6(\mu-\mu^3)P''_{n-1}(\mu)+(1-\mu^2)^2P'''_{n-1}(\mu)],$$

oder mit Hilfe bekannter Differentialgleichungen

$$\Delta U=-\frac{\mathfrak{C}}{\xi r^2}\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{r}{\xi}\right)^n\cdot 2n[(n-1)\mu P^{(\mu)}_{n-1}+(1-\mu^2)P'^{(\mu)}_{n-1}].$$

Mit Hilfe der leicht zu beweisenden Identität

$$(n-1)\mu P_{n-1}+(1-\mu^2)P'_{n-1}=(n-1)P_{n-2}$$

wird daher

$$118)\qquad \Delta U=-\frac{2\mathfrak{C}}{\xi^3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{r}{\xi}\right)^n(n+1)(n+2)P_n(\mu).$$

Nach 107) ist nun gerade

$$\Delta\varphi=\Delta U,$$

also [vergl. 40)] die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern der Kugel:

$$119)\qquad \varepsilon=\frac{\mathfrak{C}}{2\pi\xi^3}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{r}{\xi}\right)^n(n+1)(n+2)P_n(\mu).$$

Die Gesammtmasse der freien Elektricität ist demnach

$$E=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{A}\varepsilon r^2\,dr\,d\mu\,d\bar{\omega},$$

$$120)\qquad E=\tfrac{4}{3}\mathfrak{C}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3.$$

Nunmehr gehen wir an die Berechnung der Oberflächenelektricität.

Bezeichnet man das Potential aller freien Elektricität, φ, zum Zwecke der besseren Unterscheidung für alle innerhalb der Kugeloberfläche gelegenen Punkte mit φ_i, für alle ausserhalb gelegenen mit φ_a, so hat man zufolge 107)

121) $$\varphi_i = U + C.$$

Um nun auch φ_a zu finden, ist es nöthig, U nach Kugelfunctionen zu entwickeln. Zu diesem Zwecke führen wir an, dass die merkwürdige Beziehung stattfindet

122) $$(1-\mu^2)P'_n(\mu) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)),$$

welche man auf die mannigfachste Weise direct oder indirect beweisen kann.

Durch Einsetzen von 122) in 117) erhält man mit Berücksichtigung von 121)

123) $$\varphi_i = \frac{\mathfrak{C}}{\xi}\sum_0^\infty{}' \left\{\frac{(n-1)n}{2n-1}\left(\frac{r}{\xi}\right)^n - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3}\left(\frac{r}{\xi}\right)^{n+2}\right\}P_n(\mu),$$

wobei der Strich hinter dem Summenzeichen andeuten soll, dass der Coefficient von P_0 nicht, wie das Gesetz der Reihe es fordern würde, den Werth $-\frac{2}{3}\left(\frac{r}{\xi}\right)^2$, sondern

123b) $$\frac{\xi C}{\mathfrak{C}} - \frac{2}{3}\left(\frac{r}{\xi}\right)^2$$

hat. Uebrigens hat φ_i eine einfache geometrische Bedeutung gemäss den Formeln 107), 108), 114):

$$\varphi_i = C - \mathfrak{C}\frac{\sin^2\chi}{R},$$

wenn χ den Winkel bedeutet, welchen R mit der x-Axe bildet.

Aus 123) erhält man den Werth von φ_i an der Oberfläche für $r = A$.*

Was nun schliesslich die Berechnung von φ_a betrifft, so ist $\Delta\varphi_a = 0$ und $\overline{\varphi_i} = \overline{\varphi_a} = \overline{\varphi}$. Nennt man daher R die Entfernung des äusseren Punktes a vom Kugelmittelpunkte, E seinen Abstand von einem Oberflächenpunkte $(A, \mu_1, \tilde{\omega}_1)$, so ist nach einer bekannten Green'schen Gleichung**

124) $$\varphi_a = \frac{R^2 - A^2}{4\pi A}\int\!\!\int_{\mathfrak{K}} \frac{\overline{\varphi}\, do}{E^3},$$

das Integral über die ganze Kugeloberfläche erstreckt; oder, da $do = A^2 d\mu_1 d\tilde{\omega}_1$:

$$\varphi_a = \frac{A(R^2 - A^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{-1}^{+1} \frac{\overline{\varphi}}{E^3}\, d\mu_1\, d\tilde{\omega}_1.$$

Wendet man die für $\frac{1}{E^3}$ geltende bekannte Entwickelung nach Kugelfunctionen an, so erhält man, indem man den Werth von $\overline{\varphi}$ aus 123) einsetzt,

---

* In der dann entstehenden Summe ist natürlich gemäss 123b) $\frac{\xi C}{\mathfrak{C}} - \frac{2}{3}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2$ der Coefficient von P_0. Aehnliches gilt von den folgenden Reihen.

** Green, Mathematical papers, p. 55.

$$125)\quad \varphi_a = \frac{\mathfrak{C}}{\xi} \sum_0^\infty{}' \left(\frac{A}{R}\right)^{n+1} \left\{ \frac{(n-1)n}{2n-1} \left(\frac{A}{\xi}\right)^n - \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \left(\frac{A}{\xi}\right)^{n+2} \right\} P_n(\mu).$$

Hieraus und aus 123) folgt schliesslich [vergl. 41)]

$$126)\quad \bar{\varepsilon} = \frac{C}{4\pi . A} + \frac{\mathfrak{C}}{4\pi\xi^2} \sum_1^\infty \left\{ \frac{(n-1)(n)(2n+1)}{2n-1} \left(\frac{A}{\xi}\right)^{n-1} - (n+1)(n+2) \left(\frac{A}{\xi}\right)^{n+1} \right\} P_n(\mu).$$

Die Gesammtmenge der freien Oberflächenelektricität wird $\bar{E} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \bar{\varepsilon}\, d\mu\, d\omega$ sein oder

$$127)\quad \bar{E} = CA - 2\mathfrak{C} \left(\frac{A}{\xi}\right)^3.$$

Ist von Anfang an die Gesammtmasse aller freien Elektricität $=0$, so bestimmt sich nach 127) und 120) die Constante C aus der Gleichung $E + \bar{E} = 0$ zu

$$C = \tfrac{2}{3} \left(\frac{A}{\xi}\right)^3 \cdot \frac{\mathfrak{C}}{A}.$$

Die weiteren Folgerungen aus den Gleichungen 119) und 126), insbesondere die Summation der Reihen und die physikalische und geometrische Deutung überlassen wir dem Leser. Wir wenden uns vielmehr zu dem Falle, dass der Inducent nicht ein einzelner unendlich kleiner Strom oder, was im Wesentlichen auf dasselbe hinauskommt, ein unendlich kurzes Solenoid ist, sondern ein Solenoidpol. Ist die Stromdichtigkeit wieder δ, so haben wir dann in den bisherigen Formeln $J\lambda$ zu ersetzen durch $J\lambda\delta = M$, und U durch $\int_\xi^\infty U\, d\xi$. Nachdem wir einmal die Entwickelungen für einen einzelnen inducirenden Strom vollständig aufgestellt haben, kommen wir jetzt am kürzesten zum Ziele, indem wir einfach die Reihen selbst nach ξ von ξ bis ∞ integriren.* An Stelle von Gl. 114) tritt nun

$$128)\quad -\frac{\varepsilon}{2} J\lambda\delta w = -\frac{\varepsilon}{2} M w = \mathfrak{C}.$$

Man erhält dann

$$129)\quad \varepsilon = \frac{\mathfrak{C}}{2\pi\xi^2} \sum_0^\infty \left(\frac{r}{\xi}\right)^n (n+1)\, P_n(\mu),$$

$$130)\quad E = \tfrac{2}{3} \mathfrak{C} \frac{A^3}{\xi^2},$$

* Da $\varphi = U + C$ ist und nun das U der vorangehenden Entwickelungen ersetzt wird durch $\int_\xi^\infty U\, d\xi$, so darf bei Ausführung der Integration an der Gleichung 125) das in der Summe steckende C nicht mit integrirt werden.

$$131)\quad \bar{\varepsilon}=\frac{C}{4\pi A}-\frac{\mathfrak{C}}{4\pi}\frac{A}{\xi^2}+\frac{\mathfrak{C}}{4\pi A}\sum_1^\infty\left\{\frac{(n-1)(2n+1)}{2n-1}\left(\frac{A}{\xi}\right)^n-(n+1)\left(\frac{A}{\xi}\right)^{n+2}\right\}P_n(\mu),$$

$$132)\quad \bar{E}=CA-\mathfrak{C}\frac{A^3}{\xi^2}.$$

War zu Anfang dem Conductor keine freie Elektricität mitgetheilt, so wird

$$C=\frac{\mathfrak{C}}{3}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2$$

zu setzen sein, und dann wird

$$133)\quad \bar{\varepsilon}=-\frac{\mathfrak{C}}{6\pi}\cdot\frac{A}{\xi^2}+\frac{\mathfrak{C}}{4\pi A}\sum_1^\infty\left\{\frac{(n-1)(2n+1)}{2n-1}\left(\frac{A}{\xi}\right)^n-(n+1)\left(\frac{A}{\xi}\right)^{n+2}\right\}P_n(\mu),$$

$$134)\quad \bar{E}=-\tfrac{2}{3}\mathfrak{C}\frac{A^3}{\xi^2}.$$

Wir wollen zunächst (ehe wir an die Weiterbehandlung der vorliegenden Formeln gehen) die specielleren Jochmann'schen Formeln daraus ableiten, nämlich annehmen, dass der von uns vorausgesetzte Magnetpol unendlich fern liegt und unendlich stark ist, oder mit anderen Worten, dass eine constante magnetische Kraft, deren Richtung mit der der x-Axe zusammenfällt, die Induction bewirkt. Setzen wir $\lim\limits_{M=\infty,\,\xi=\infty}\frac{M}{\xi^2}=T$, wo nun T die Grösse der magnetischen Kraft bezeichnet, so ergiebt sich [vergl. 128)] aus 129), 130), 133), 134)

$$135)\quad \varepsilon=-\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{Tw}{2\pi},*$$

$$136)\quad E=-\bar{E}=-\frac{\varepsilon}{3}A^3Tw;$$

$$\bar{\varepsilon}=-\frac{\mathfrak{C}}{6\pi}\frac{A}{\xi^2}+\frac{\mathfrak{C}}{4\pi A}\left(\frac{1.5}{3}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2\right)P_2(\mu),$$

oder, da $P_2(\mu)=\frac{3}{2}\mu^2-\frac{1}{2}$:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\frac{\varepsilon}{2}Tw}{4\pi}A\left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{2}\mu^2-\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{ATw}{4\pi}\left(\tfrac{1}{2}(1-\mu^2)-1\right),$$

oder endlich nach 112)

$$137)\quad \bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2}\cdot A\frac{Tw}{4\pi}\left(\tfrac{1}{2}\sin^2\vartheta-1\right).$$

Nunmehr kehren wir zurück zu den allgemeineren Formeln 129) und 133).

Bezeichnet man mit $D=\xi-r\mu$ den Abstand des Punktes (x, y, z) von derjenigen Ebene, welche man durch den inducirenden Pol der yz-Ebene

* Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass das ε links von dem ε rechts verschieden ist; das ε rechts bedeutet die Inductionsconstante.

parallel legen kann, und mit E die Entfernung des Punktes (x, y, z) von dem Pole selbst, so wird

$$\varepsilon = \frac{\mathfrak{C}}{2\pi} \cdot \frac{D}{E^3}. \tag{138}$$

Insbesondere ist also längs der Axe die Dichtigkeit der freien Elektricität umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Pole. Auch ist die freie Elektricität im Innern der Kugel stets monogen, nämlich positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{C}$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem M und w entgegengesetztes oder gleiches Vorzeichen haben. Die Flächen constanter Dichtigkeit sind Rotationsflächen der sechsten Ordnung, welche sämmtlich die durch den Pol zur yz-Ebene parallel gehende Ebene im Pole berühren. Mit Hilfe der Gleichung dieses Flächensystems beweist man leicht, dass der absolute Werth der Dichtigkeit ε sein Maximum in dem dem Magnetpol zugewendeten, sein Minimum in dem von demselben abgewendeten Kugelpol erreicht.

Die Gesammtmasse der in der Kugel sich ansammelnden Elektricität ist nach 130) proportional der magnetischen Masse des inducirenden Poles, der Winkelgeschwindigkeit, dem Kugelinhalte, und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des Magnetpoles vom Kugelmittelpunkte.

Was andererseits die Oberflächenelektricität betrifft, so erhält man nach bekannten Methoden

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\mathfrak{C}}{12\pi} \cdot \frac{A}{\xi^2} + \frac{\mathfrak{C}}{4\pi} \cdot \frac{(A^2+\xi^2)\mu - 2A\xi}{F^3} - \frac{\mathfrak{C}}{4\pi} \cdot \frac{J}{2\sqrt{A\xi}}, \tag{139}$$

worin F die Entfernung des Oberflächenpunktes $(A, \mu, \bar{\omega})$ vom Magnetpol bedeutet und

$$J(\mu, \xi) = \int_0^{\frac{A}{\xi}} \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varrho\mu + \varrho^2}}{\sqrt{\varrho^3 - 2\varrho^4\mu + \varrho^5}} \, d\varrho$$

ist. Insbesondere hat man für $\mu = -1$

$$\bar{\varepsilon}_{-1} = \frac{\mathfrak{C}A}{4\pi\xi^2}\left[1 - \tfrac{4}{5}\frac{A}{\xi} + \tfrac{6}{7}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2 - \tfrac{8}{9}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3 + \tfrac{10}{11}\left(\frac{A}{\xi}\right)^4 \mp \cdots\right]$$

$$= \frac{\mathfrak{C}A}{4\pi\xi^2}\left[\tfrac{1}{3} - \frac{\xi^2}{A(\xi+A)} + \sqrt{\left(\frac{\xi}{A}\right)^3} \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{A}{\xi}}\right],$$

für $\mu = +1$:

$$\bar{\varepsilon}_{+1} = \frac{\mathfrak{C}A}{4\pi\xi^2}\left[1 + \tfrac{4}{5}\frac{A}{\xi} + \tfrac{6}{7}\left(\frac{A}{\xi}\right)^2 + \tfrac{8}{9}\left(\frac{A}{\xi}\right)^3 + \tfrac{10}{11}\left(\frac{A}{\xi}\right)^4 + \cdots\right]$$

$$= \frac{\mathfrak{C}A}{4\pi\xi^2}\left[\tfrac{1}{3} + \frac{\xi^2}{A(\xi-A)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\xi}{A}\right)^3} \cdot \lg\frac{\sqrt{\xi}+\sqrt{A}}{\sqrt{\xi}-\sqrt{A}}\right].$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass an beiden Kugelpolen $\bar{\varepsilon}$ ein und dasselbe Vorzeichen und zwar das von $\mathfrak{C}$ hat, so dass die an den Polen angehäufte Oberflächenelektricität stets von derselben Art ist, wie die freie im Innern der Kugel verbreitete Elektricität. Da die Summe aller freien Elektricität Null ist, so muss zwischen beiden Polen eine Oberflächenzone existiren, auf welcher freie Elektricität verbreitet ist, die von entgegengesetzter Art ist, wie die an den Polarzonen und im Innern der Kugel angesammelte Elektricität. Dies ergiebt sich in der That bei eingehenderem Studium der Gl. 139) und wird direct bestätigt durch die einfachen, dem speciellen Falle der constanten magnetischen Kraft entsprechenden Formeln 135) und 137). Die beiden Uebergangskreise, längs denen $\bar{\varepsilon}=0$ ist, sind in diesem Falle durch die Gleichung $\pm\vartheta = arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$ bestimmt.

XVII.

Ueber das Jacobi'sche Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrange'schen Rotation durch zwei Poinsot'sche Rotationen.

Von

Dr. W. Hess

in Bamberg.

Das in Rede stehende Theorem, welches zuerst im zweiten Bande der Gesammelten Werke Jacobi's aus dessen nachgelassenen Papieren publicirt wurde,* lautet folgendermassen:

„Die Rotation eines schweren Umdrehungskörpers um einen Punkt seiner Axe kann ersetzt werden durch die relative Bewegung zweier Körper, welche, keinerlei beschleunigenden Kräften unterworfen, um denselben festen Punkt rotiren und in ihren Bewegungen dieselbe invariable Ebene und dieselbe mittlere oscillatorische Bewegung besitzen."

Jacobi hat diesen merkwürdigen Satz aus der eigenartigen Form der Nenner der Brüche erkannt, durch welche die neun Neigungscosinus der Hauptaxen des rotirenden Umdrehungskörpers gegen ein festes Coordinatensystem des Raumes dargestellt sind.

Ein anderer Beweis, welcher die letzteren Cosinuswerthe direct aus jenen zusammensetzt, welche für die Bewegung um den Schwerpunkt in der bekannten Arbeit Jacobi's: „Sur la rotation d'un corps"** niedergelegt sind, ist von Seiten des Herausgebers der Jacobi'schen Manuscripte, Lottner, am Schlusse der letzten Abhandlung über Rotationsprobleme***, angefügt worden.

In der Zwischenzeit ist nun das Jacobi'sche Theorem noch mehrfach Gegenstand der Beweisführung geworden. So gelangt Padova† zu demselben, indem er um den festen Punkt als Schwerpunkt zwei Hauptaxen-

---

* Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe. Ges. Werke, herausgeg. v. d. preuss. Akad. 1882. II, S. 480—492.

** Ibid. S. 291—352.

*** Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe. Ibid. S. 510 figg.

† Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione pesante che gira attorno ad un punto del suo asse di simmetria. Atti dell' Accad. di Torino. XIX, p. 1007—1016.

systeme ξ und η rotiren lässt und die Präcessionsbewegung derselben bezüglich der Horizontalebene als invariabler Ebene betrachtet, d. i. die Bewegung der Horizontalprojectionen der zwei Axentripel. Fallen die letzteren in ein einziges Tripel x'' zusammen, so sind die Winkelwerthe von x'' gegen eine feste Axe der invariablen Ebene durch genau dieselben Ausdrücke gegeben, wie sie die grundlegende Lottner'sche Arbeit über das Gyroskop* aufzeichnet. Eine weitere Abhandlung von Halphén, im 100. Bande der Comptes rendus,** bringt, jedoch ohne Anführung des Gedankenganges, das Theorem in der folgenden Form: „Betrachtet man die Bewegung des schweren Rotationskörpers (P), welcher in einem Punkte O seiner Axe befestigt ist, so kann man in jedem Augenblicke ein System (C) von beweglichen Axen Ox, Oy, Oz bestimmen, so, dass die absolute Bewegung von (C) und diejenige von (C) gegen den Körper (P) beide identisch sind der Bewegung eines in O unterstützten starren Körpers, welcher keinerlei beschleunigenden Kräften unterworfen ist. Die invariable Ebene ist für die erste Bewegung die Horizontalebene, für die zweite die Ebene senkrecht der Axe des Körpers." Die Halphén'sche Ableitung dürfte sich dabei, wie Darboux vermuthet, auf die Eigenschaften der elliptischen Functionen stützen. Dagegen unternahm es letztgenannter Autor, den Jacobi'schen Satz aus den Differentialgleichungen der Bewegung und deren ersten Integralen elementar zu beweisen,*** und insofern man diesem Umstande Bedeutung beimisst, wird man also der Darboux'schen Beweismethode den Vorzug geben müssen.

Dieselbe ist in ihrem Aufbau synthetischer Natur, indem sie sich u. A. auf die Eigenschaften des Centralellipsoids beruft. Im Gegensatze hierzu dürfte nun auch der Versuch einer rein analytischen Herleitung, mit welcher sich die nachfolgenden Zeilen beschäftigen sollen, eine gewisse Berechtigung besitzen, um so mehr, als schliesslich die darin niedergelegte Methode durch Einführung einer geringeren Anzahl Bestimmungsgrössen und durch die Verwendung von Determinanten zu rascherer Aufstellung derjenigen Elemente zu führen vermag, welche die zwei Bewegungen um den Schwerpunkt aus der Bewegung des schweren Umdrehungskörpers entstehen zu lassen geeignet sind.

1.

Bedeuten für einen schweren Revolutionskörper, welcher um einen festen Punkt O seiner Axe rotirt,

C und A die Hauptträgheitsmomente um diese Axe z' und um eine der unendlich vielen Hauptaxen x', y' des Aequators durch O,

* Reduction der Bewegung etc. Crelle's J., 50. Bd. S. 111—125.

** Sur le mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe. 1065—1068.

*** Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution, fixé par un point de son axe. Journ. des mathématiques (4) I, p. 403—430.

AM das Moment der Schwerkräfte, d. i. das Product aus dem Gewichte des Körpers in die Entfernung vom Schwerpunkt und Unterstützungspunkt,

t die Zeit,

Ap, Bq, Cr die drei längs der Hauptaxen x', y', z' gemessenen Componenten des zur Bewegung anregenden Kräftepaares, wodurch

p, q, r die drei längs derselben Axen auftretenden instantanen Winkelgeschwindigkeiten werden —

so lauten die Euler'schen Differentialgleichungen der Bewegung

$$1)\qquad \begin{aligned} \frac{dAp}{dt} &= (A-C)\,qr - AMb'', \\ \frac{dAq}{dt} &= (C-A)\,rp + AMa'', \\ \frac{dCr}{dt} &= 0 \quad (r = n). \end{aligned}$$

Die neun Neigungscosinus der drei rechtwinkligen Hauptaxen x', y', z' gegen ein festes orthogonales Axensystem x', y', z' des Raumes, dessen z-Axe vertical gerichtet ist,

	x'	y'	z'
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

sind dabei mit den Componenten p, q, r durch die kinematischen Relationen verknüpft

$$2)\qquad \begin{aligned} \frac{da''}{dt} &= b''r - c''q, \quad \ldots, \quad \ldots, \\ \frac{db''}{dt} &= c''p - a''r, \quad \ldots, \quad \ldots, \\ \frac{dc''}{dt} &= a''q - b''p, \quad \ldots, \quad \ldots \end{aligned}$$

und gehorchen unter sich den (zweimal) sechs Relationen der orthogonalen Transformation.

Aus der Combination der Gleichungen 1), 2) mit nachfolgender Integration ergeben sich

$$3)\qquad \begin{aligned} a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \\ Apa'' + Bqb'' + Crc'' &= Al, \\ A(p^2+q^2) + Cn^2 &= 2AMc'' + Ah', \end{aligned}$$

worin die zwei Constanten der Bewegungsgrösse und der lebendigen Kraft bezw. Al und Ah' gleich gesetzt worden sind.

Durch Quadriren der dritten Gleichung 2) folgt weiter

$$\left(\frac{dc''}{dt}\right)^2 = \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ p & q \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a''^2+b''^2 & a''p+b''q \\ a''p+b''q & p^2+q^2 \end{vmatrix}$$

und durch Benützung der Integralgleichungen 3)

$$4)\qquad \frac{dc''}{dt} = \sqrt{\left(2Mc''+h'-\frac{Cn^2}{A}\right)(1-c''^2)-\left(l-\frac{Cnc''}{A}\right)^2}.$$

2.

Sind analog für einen rotirenden starren Körper, welcher keinerlei beschleunigenden Kräften unterworfen ist, also sich beispielsweise um seinen Schwerpunkt dreht,

$\frac{1}{\mathsf{A}}, \frac{1}{\mathsf{B}}, \frac{1}{\Gamma}$ die Trägheitsmomente um die drei Hauptaxen x', y', z',

$\pi, \varkappa, \varrho$ die Componenten der instantanen Drehgeschwindigkeit zur Zeit t bezüglich derselben Axen, wodurch

$\frac{\pi}{\mathsf{A}}, \frac{\varkappa}{\mathsf{B}}, \frac{\varrho}{\Gamma}$ die Componenten des momentan angreifenden Kräftepaare werden,

so besitzen für diese Bewegungsart die Euler'schen Gleichungen die folgende Form:

$$\frac{1}{\mathsf{A}}\cdot\frac{d\pi}{dt} = \left(\frac{1}{\mathsf{B}}-\frac{1}{\Gamma}\right)\varkappa\varrho,$$

$$\frac{1}{\mathsf{B}}\cdot\frac{d\varkappa}{dt} = \left(\frac{1}{\Gamma}-\frac{1}{\mathsf{A}}\right)\varrho\pi,$$

$$\frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{d\varrho}{dt} = \left(\frac{1}{\mathsf{A}}-\frac{1}{\mathsf{B}}\right)\pi\varkappa.$$

$\pi, \varrho, \varkappa$ sind auch hier wieder mit den neun Neigungscosinus α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ der Axen x', y', z' gegen ein festes System x; y; z verbunden durch die Gleichungen

$$5)\qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha''}{dt} &= \beta''\varrho-\gamma''\varkappa, \quad \ldots, \quad \ldots, \\ \frac{d\beta''}{dt} &= \gamma''\pi-\alpha''\varrho, \quad \ldots, \quad \ldots, \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= \alpha''\varkappa-\beta''\pi, \quad \ldots, \quad \ldots \end{aligned}$$

Das erstere System ergiebt für sich ohne Weiteres die zwei Integrale der Bewegungsgrössen und der lebendigen Kraft

$$\Sigma\frac{\pi^2}{\mathsf{A}^2} = const. = \omega^2,$$

$$\Sigma\frac{\pi^2}{\mathsf{A}} = const. = \omega^2\chi;$$

ferner erscheinen durch Combination der beiden Systeme die drei Gleichungen

$$\Sigma \frac{\pi}{A} \alpha = const.,$$
$$\Sigma \frac{\pi}{A} \alpha' = const.,$$
$$\Sigma \frac{\pi}{A} \alpha'' = const.,$$

deren Existenz aussagt, dass das Momentankräftepaar für die ganze Zeitdauer der Bewegung invariable Grösse und Richtung besitze. Wird die letztere als feste Axe z gewählt, so sind die beiden ersten rechtsseitigen Constantenwerthe Null, während

$$\frac{\pi}{A} = \omega \alpha'', \quad \frac{\varkappa}{B} = \omega \beta'', \quad \frac{\varrho}{\Gamma} = \omega \gamma''$$

wird. Durch Substitution schreiben sich die Integrale der Bewegungsgrösse und der lebendigen Kraft nunmehr

$$6) \qquad \begin{gathered} \Sigma \alpha''^2 = 1, \\ \Sigma A \alpha''^2 = \chi. \end{gathered}$$

In denselben ist die Constante ω ganz weggefallen resp. zu 1 geworden. Dies hat freilich nichts Wunderliches, wenn man bedenkt, dass in allen bisherigen Entwickelungen die Grössen A, B, Γ nur im Verhältnisse auftreten, so dass über einen Proportionalitätsfactor ω noch frei verfügt werden kann. Wird dieser thatsächlich gleich der Einheit angenommen, so sind

$$7) \qquad \pi = A\alpha'', \quad \varkappa = B\beta'', \quad \varrho = \Gamma\gamma'',$$

und die Euler'schen Gleichungen gewinnen unter Einführung von α'', β'', γ'' als abhängiger Variabeln die folgende Form:

$$8) \qquad \begin{aligned} \frac{d\alpha''}{dt} &= (\Gamma - B)\gamma''\beta'', \\ \frac{d\beta''}{dt} &= (A - \Gamma)\alpha''\gamma'', \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= (B - A)\beta''\alpha''. \end{aligned}$$

Für einen zweiten um seinen Schwerpunkt rotabeln Körper gelten natürlich statt der Formeln 5) bis 8) Formeln 5') bis 8'), nur in anderen Constanten und Abhängigkeitsvariabeln geschrieben. Setzen wir fest, dass alle den nunmehrigen Fall betreffenden Daten mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden sollen, so haben wir also in die vorstehenden Gleichungssysteme statt

$$A, \; B, \; \Gamma; \quad \pi, \; \varkappa, \; \varrho; \quad \chi$$

einzusetzen

$$\mathfrak{A}, \; \mathfrak{B}, \; \mathfrak{C}; \quad \mathfrak{p}, \; \mathfrak{q}, \; \mathfrak{r}; \quad \mathfrak{h},$$

und statt

$$\alpha, \; \beta, \; \gamma; \quad \alpha', \; \beta', \; \gamma'; \quad \alpha'', \; \beta'', \; \gamma''$$

nunmehr

$$\mathfrak{a}, \; \mathfrak{b}, \; \mathfrak{c}; \quad \mathfrak{a}', \; \mathfrak{b}', \; \mathfrak{c}'; \quad \mathfrak{a}'', \; \mathfrak{b}'', \; \mathfrak{c}''.$$

3.

Die Bewegung, wie sie im ersten Abschnitte charakterisirt wurde, ist zuerst von **Lagrange** betrachtet worden, während die Bewegung um den Schwerpunkt, wie bekannt, seiten **Poinsot's** Gegenstand der eingehendsten synthetischen Behandlung gewesen. **Darboux** bezeichnet deshalb kurz die erstere Bewegungsart als eine **Lagrange'sche**, die letztere als eine **Poinsot'sche** Rotation.

Soll nun, wie das **Jacobi'sche** Theorem in der Fassung, die ihm **Halphén** gegeben, verlangt, unsere **Lagrange'sche** Bewegung ($x', y', z', -x, y, z$) des § 1 durch zwei **Poinsot'sche** Drehungen ersetzbar sein, so muss also ein System rechtwinkliger Axen, ξ, η, ζ existiren, dessen Bewegung gegen unsere Hauptaxen x', y', z' bezw. gegen die festen Axen x, y, z durch die **Euler'schen** Gleichungen 5) bis 8) bezw. 5') bis 8') definirt sind, während die aus diesen zwei gleichzeitigen Bewegungen resultirende Bewegung direct durch die Gleichungen 1) bis 4) festgelegt ist. Das heisst aber nichts Anderes, als: es müssen in jedem Augenblicke die Cosinus der a, b, c des § 1 durch die Cosinus der α, β, γ und der $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ des § 2 sich in der bekannten Weise ausdrücken lassen:

$$
9)\qquad
\begin{aligned}
a&=\Sigma\,\alpha\,\mathfrak{a}, & a'&=\Sigma\,\alpha\,\mathfrak{a}', & a''&=\Sigma\,\alpha\,\mathfrak{a}'',\\
b&=\Sigma\,\alpha'\mathfrak{a}, & b'&=\Sigma\,\alpha'\mathfrak{a}', & b''&=\Sigma\,\alpha'\mathfrak{a}'',\\
c&=\Sigma\,\alpha''\mathfrak{a}, & c'&=\Sigma\,\alpha''\mathfrak{a}', & c''&=\Sigma\,\alpha''\mathfrak{a}''.
\end{aligned}
$$

Sollen aber diese Beziehungen in jedem Zeitpunkte t erfüllt sein, so muss sich auch darstellen

$$\frac{dc''}{dt}=\Sigma\,\alpha''\frac{d\mathfrak{a}''}{dt}+\Sigma\,\mathfrak{a}''\frac{d\alpha''}{dt}\quad \text{u. s. w.}$$

Setzt man in die neun auf solche Weise entstehenden Differentialgleichungen für die Differentialquotienten die Werthe aus den Formeln 2), 5) und 5') ein, so folgen die neun Relationen

$$
\frac{dc''}{dt}=\begin{vmatrix} a'' & b''\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix},\quad
\frac{dc'}{dt}=\begin{vmatrix} a' & b'\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\\ \mathfrak{a}' & \mathfrak{b}' & \mathfrak{c}'\end{vmatrix},\quad
\frac{dc}{dt}=\begin{vmatrix} a & b\\ p & q\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c}\end{vmatrix};
$$

$$
\frac{db''}{dt}=\begin{vmatrix} c'' & a''\\ r & p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'' & \mathfrak{c}''\end{vmatrix},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots;
$$

$$
\frac{da''}{dt}=\begin{vmatrix} b'' & c''\\ q & r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'' & \mathfrak{c}''\end{vmatrix},\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots;
$$

in welchen

$$10)\qquad \mathfrak{p}-\pi=P,\quad \mathfrak{q}-\varkappa=Q,\quad \mathfrak{r}-\varrho=R$$

gesetzt wurde. Aus dem vorstehenden Gleichungssystem erhält man aber, wenn man bedenkt, dass die auftretenden Cosinuswerthe den Relationen der

Orthogonalität gehorchen müssen, durch Quadriren und Addiren die leicht verständlichen Identitäten

$$\Sigma\left[\frac{dc''}{dt}\right]^2_{\text{Buchst.}} = \Sigma\begin{vmatrix} a'' & b'' \\ p & q \end{vmatrix}^2_{\text{Buchst.}} = \Sigma\begin{vmatrix} P & Q \\ \mathfrak{a}'' & \mathfrak{b}'' \end{vmatrix}^2_{\text{Buchst.}},$$

$$\Sigma\left[\frac{dc''}{dt}\right]^2_{\text{Index}} = \Sigma\begin{vmatrix} a'' & b'' \\ p & q \end{vmatrix}^2_{\text{Index}} = \Sigma\begin{vmatrix} P & Q \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}^2_{\text{Buchst.}} \quad \text{u. s. w.}$$

und hieraus durch Vergleichung

$$\begin{aligned} &\Sigma P^2 = \Sigma p^2, \\ &\Sigma\alpha'' P = n, \quad \Sigma\mathfrak{a}'' P = \Sigma a'' p, \\ &\Sigma\alpha' P = q, \quad \Sigma\mathfrak{a}' P = \Sigma a' p, \\ &\Sigma\alpha P = p, \quad \Sigma\mathfrak{a} P = \Sigma a p, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die Summationen sich diesmal selbstverständlich auf die Buchstaben beziehen.

Diese Gleichungen sagen aus, dass bezüglich des Hilfssystems ξ, η, ζ P, Q, R die Componenten der resultirenden Drehung sind, durch welche das System x', y', z' in einer Lagrange'schen Bewegung gegen das System x, y, z geführt wird.

Die Gleichungen 10) aber zeigen, dass P, Q, R sich additiv zusammensetzen aus den um dieselben Axen geschätzten Poinsot'schen Winkelgeschwindigkeiten 1. $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, welche ξ, η, ζ gegen x, y, z, und 2. $\pi, \varkappa, \varrho$, welche ξ, η, ζ gegen x', y', z' — oder, was dasselbe ist, aus den Winkelgeschwindigkeiten $-\pi, -\varkappa, -\varrho$, welche x', y', z' gegen ξ, η, ζ in Bewegung zu setzen geeignet sind.

4.

Die drei Gleichungen des Systems 11),

$$\Sigma\alpha'' P = n, \quad \Sigma\mathfrak{a}'' P = \Sigma a'' p, \quad \Sigma P^2 = \Sigma p^2$$

lassen sich unter Einführung der Differenzen 10), sowie der Werthe 7), 7') zunächst schreiben

$$\begin{aligned} &\Sigma\alpha''(\mathfrak{A}\mathfrak{a}'' - \mathsf{A}\alpha'') = n, \\ &\Sigma\mathfrak{a}''(\mathfrak{A}\mathfrak{a}'' - \mathsf{A}\alpha'') = a''p + b''q + c''n, \\ &\Sigma(\mathfrak{A}\mathfrak{a}'' - \mathsf{A}\alpha'')^2 = p^2 + q^2 + n^2, \end{aligned}$$

und durch Benutzung der Integrale 6), 6') und 3)

$$\begin{aligned} &\Sigma\,\mathfrak{A} a'' \alpha'' = n + \chi, \\ &\Sigma\,\mathsf{A}\alpha'' a'' = \mathfrak{h} - \left[l + \frac{A-C}{A} n c''\right], \\ &\Sigma(\mathfrak{A}\mathfrak{a}'' - \mathsf{A}\alpha'')^2 = 2Mc'' + h' + \frac{A-C}{A} n^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber der Cosinus c'' durch die letzte Gleichung 9) in Function der α'', $\mathfrak{a}''$ etc. gegeben. Setzt man noch der Einfachheit halber

$$\begin{aligned} &(A-C)n = A.2B, \\ &h' + 2Bn = h, \end{aligned} \tag{12}$$

so lassen sich also die vorstehenden Gleichungen im Verein mit den eben erst verwendeten Gleichungen 7), 7′) in folgendes System bringen:

$$
13)\quad
\begin{array}{rll}
\text{I.} & \Sigma\alpha''^2 = 1, & \text{III.}\ \Sigma\mathfrak{a}''^2 = 1,\\
\text{II.} & \Sigma A\alpha''^2 = \chi, & \text{IV.}\ \Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{a}''^2 = \mathfrak{h},\\
\text{V.} & \Sigma\mathfrak{A}\mathfrak{a}''\alpha'' = n + \chi, & \\
\text{VI.} & \Sigma(A + 2B)\alpha''\mathfrak{a}'' = \mathfrak{h} - \mathfrak{l}, & \\
\text{VII.} & \Sigma\mathfrak{A}^2\mathfrak{a}''^2 + \Sigma A^2\alpha''^2 - 2\Sigma(\mathfrak{A}A + M)\mathfrak{a}''\alpha'' = h. &
\end{array}
$$

Die Existenz desselben ist also die Bedingung der Ersetzbarkeit einer Lagrange'schen Rotation durch zwei Poinsot'sche Rotationen.

Sämmtliche Gleichungen 13) sind bezüglich der sechs in ihnen enthaltenen Cosinuswerthe α'', β'', γ''; $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ homogen vom zweiten Grade. Substituiren wir deshalb

$$
14)\quad
\begin{aligned}
\mathfrak{a}'' &= \lambda\alpha'',\\
\mathfrak{b}'' &= \mu\beta'',\\
\mathfrak{c}'' &= \nu\gamma'',
\end{aligned}
$$

worin die λ, μ, ν ganz willkürliche Functionen bedeuten, so erscheinen sieben Gleichungen, in welchen ausser den Proportionalitätsfactoren λ, μ, ν als Unbekannte nur mehr noch α''^2, β''^2, γ''^2 vorkommen. Sollen aber bezüglich der letzteren die Gleichungen verträglich sein, so müssen die Determinanten der Coefficienten von α''^2, β''^2, γ''^2 in je vieren dieser Gleichungen verschwinden. Es resultiren folglich vier Bedingungsgleichungen, welche ausser λ, μ, ν nur Constante erhalten, mithin

sind die Proportionalitätsfactoren λ, μ, ν constante Grössen.

Dieser Satz, dessen Existenz in der Darboux'schen Arbeit in nicht näher bezeichneter Weise aus dem Verhalten der Form der letzten Gleichung 13) im Unendlichen gefolgert wurde, lässt sich also, wie wir gesehen, elementar ganz einfach beweisen.

Wenn nun, so schliessen wir weiter, λ, μ, ν Constante bedeuten, so müssen, damit α''^2, β''^2, γ''^2 nicht constant werden, schon in je dreien der Gleichungen 13) die Determinanten der Coefficienten verschwinden — und nicht nur diese Determinanten, sondern auch jene, welche bei der Bestimmung von α''^2, β''^2, γ''^2 im Zähler auftreten würden. Nun zieht freilich das Verschwinden der Nennerdeterminante und einer der Zählerdeterminanten das Nullwerden der beiden anderen Zählerdeterminanten nach sich. Es bleiben folglich für jedes Gleichungstripel nur zwei unabhängige Bedingungsgleichungen bestehen, und da wir fünf verschiedene solcher Tripel aus dem System 13) bilden können, resultiren zunächst zehn Bedingungsgleichungen für die elf Unbekannten:

$$A,\ B,\ \Gamma,\ \chi;\quad \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{h};\quad \lambda,\ \mu,\ \nu.$$

Da aber die Integrale 6), 6′) nur zwei der Euler'schen Gleichungen 8), 8′) ersetzen können, so muss noch je eine der letzteren bestehen bleiben, welche nach Substitution der Werthe 14) mit nachfolgender Vergleichung die noch fehlende elfte Bedingungsgleichung liefert.

Die Weiterbehandlung des Problems wird sich von nun ab, in Ausführung des ausgesprochenen Gedankenganges, in zwei Untersuchungen theilen müssen. Die eine umfasst die Bedingungsgleichungen, welche durch das Verschwinden der Nennerdeterminanten veranlasst werden, und etwa die durch Comparation der Euler'schen Gleichungen erzielte Relation, im Ganzen also sechs Gleichungen; derselben ist der § 5 gewidmet. Die andere Untersuchung behandelt sodann die weiteren fünf Bedingungen, wie sie durch das Nullwerden der Zählerdeterminanten erhalten werden; ihre Resultate sind im § 6 aufgezeichnet, während § 7 die endgiltigen Folgerungen zieht.

5.

Setzen wir nach Substitution der Werthe 14) in die Gleichungen 13) die Determinanten der Coefficienten von α''^2, β''^2, γ''^2 Null, indem wir mit den beiden Gleichungen I und II jede der übrigen der Reihe nach combiniren, so erscheinen folgende Bedingungsgleichungen:

$$15)\qquad \begin{aligned} \Sigma\lambda^2(\mathsf{B}-\Gamma)&=0,\\ \Sigma\,\mathfrak{A}\lambda^2(\mathsf{B}-\Gamma)&=0,\\ \Sigma(\mathsf{A}+2B)\,\lambda(\mathsf{B}-\Gamma)&=0,\\ \Sigma\,\mathfrak{A}\lambda(\mathsf{B}-\Gamma)&=0,\\ \Sigma\,[\mathsf{A}^2+\mathfrak{A}^2\lambda^2-2\lambda(\mathfrak{A}\mathsf{A}+M)](\mathsf{B}-\Gamma)&=0. \end{aligned}$$

Vergleichen wir weiterhin die durch die nämliche Substitution reducirten Euler'schen Gleichungen 8), 8'), so erscheinen die Relationen

$$16)\qquad \begin{aligned} \lambda&=\frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{C}}{\mathsf{B}-\Gamma}\,\mu\nu,\\ \mu&=\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{\Gamma-\mathsf{A}}\,\nu\lambda,\\ \nu&=\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mathsf{A}-\mathsf{B}}\,\lambda\mu. \end{aligned}$$

Diese erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, die zwei ersten Gleichungen 15), so dass unter den acht angeschriebenen Gleichungen in der That nur sechs unabhängig voneinander sind; sie vereinfachen weiterhin die letzte Gleichung 15), so dass von letzterem System die drei Gleichungen übrig bleiben

$$17)\qquad \begin{aligned} \Sigma(\mathsf{A}+2B)\,\lambda(\mathsf{B}-\Gamma)&=0,\\ \Sigma\,\mathfrak{A}\lambda(\mathsf{B}-\Gamma)&=0,\\ \Sigma(\mathfrak{A}\mathsf{A}+M)\,\lambda(\mathsf{B}-\Gamma)&=-(\mathsf{A}-\mathsf{B})(\mathsf{B}-\Gamma)(\Gamma-\mathsf{A})=-\frac{M}{2}\cdot\Delta, \end{aligned}$$

worin Δ zur Abkürzung verwendet ist.

Aus den sechs noch bestehenden Gleichungen kann man nun durch eines der Grössentripel

$$\lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C};\quad \mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \Gamma$$

jedes der beiden anderen darstellen. Es fragt sich nur, welches derselben man auszeichnen soll, um es durch die weiteren Bedingungsgleichungen des nachfolgenden Paragraphen völlig zu bestimmen. In der citirten Darboux-schen Arbeit sind es die Grössen A, B, Γ, die reciproken Werthe der Hauptträgheitsmomente für die Poinsot'sche Bewegung, welche die Drehung der Hauptaxen x', y', z' des rotirenden Umdrehungskörpers regulirt; vielleicht dürfte es sich jedoch im Hinblick auf die Kürze der Darstellung empfehlen, die Proportionalitätsfactoren λ, μ, ν als unabhängig zu bevorzugen.

Bestimmen wir deshalb zuerst die Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus den übrigen!

Dieselben besitzen die Eigenschaft, in sämmtlichen Gleichungen 16) und 17) linear aufzutreten, und zwar, da die erste Gleichung 15) unabhängig von den Relationen 16) erfüllt ist, in vier verschiedenen Gleichungen. Es bestimmen sich demgemäss nicht nur die drei fraglichen Grössen — es bleibt auch noch eine blose Beziehung zwischen A, B, Γ, λ, μ, ν bestehen:

$$\mathfrak{A}\lambda = \frac{M}{2} \cdot \frac{\mu - \nu}{\mathsf{B} - \Gamma},$$

$$\mathfrak{B}\mu = \frac{M}{2} \cdot \frac{\nu - \lambda}{\Gamma - \mathsf{A}},$$

$$\mathfrak{C}\nu = \frac{M}{2} \cdot \frac{\lambda - \mu}{\mathsf{A} - \mathsf{B}}$$

und

$$\Sigma\lambda(\mathsf{B} - \Gamma) + \Delta = 0.$$

Unter dem Einflusse der letzteren Gleichung ergeben sich die Differenzenwerthe

$$\mathfrak{A}\lambda - \mathfrak{B}\mu = \mathsf{B} - \mathsf{A} \text{ u. s. w.}$$

oder es wird

$$\mathfrak{A}\lambda + \mathsf{A} = \mathfrak{B}\mu + \mathsf{B} = \mathfrak{C}\nu + \Gamma.$$

Natürlich ist dann auch

$$\mathfrak{A}\lambda + \mathsf{A} + 2B = \mathfrak{B}\mu + \mathsf{B} + 2B = \mathfrak{C}\nu + \Gamma + 2B.$$

Sind aber diese drei Summen wirklich gleich, so ergiebt die Addition der zweiten und dritten Gleichung 15), da $\Sigma\lambda(\mathsf{B} - \Gamma) = -\Delta$ für die Allgemeinheit des Problems* nicht verschwinden kann,

$$18) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}\lambda + \mathsf{A} + 2B &= 0, \\ \mathfrak{B}\mu + \mathsf{B} + 2B &= 0, \\ \mathfrak{C}\nu + \Gamma + 2B &= 0, \end{aligned}$$

während die von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ freien Relationen der Systeme 15) bezw. 16), 17) lauten

$$19) \quad \begin{aligned} \Sigma\lambda^2(\mathsf{B} - \Gamma) &= 0, \\ \Sigma\lambda(\mathsf{B} - \Gamma) + \Delta &= 0, \\ \Sigma\mathsf{A}\lambda(\mathsf{B} - \Gamma) - 2B\Delta &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Aufstellung dieser sechs übersichtlichen Gleichungen ist die Aufgabe des Paragraphen im Princip gelöst.

---

* Diese allein ist von Interesse, denn Annahmen von Beziehungsgleichungen zwischen den elf Bestimmungsgrössen setzen Beziehungen zwischen den Constanten der Lagrange'schen Bewegung selbst voraus.

Man könnte zwar noch aus den Gleichungen 19) $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ wirklich durch λ, μ, ν ausdrücken: es erschienen für jede der ersteren drei Grössen ziemlich einfache quadratische Gleichungen (während umgekehrt die λ, μ, ν aus den $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ durch lineare Gleichungen sich darstellen lassen). Doch scheint diese Darstellung verfrüht und in gar keiner Weise nothwendig. Denn da die Constanten n, h, l der Lagrange'schen Rotation in die Untersuchung noch nicht eingetreten sind, kann man auch noch nicht beurtheilen, ob unter Zuhilfenahme dieser Grössen neben λ, μ, ν die Darstellung der A, B, Γ nicht eine einfachere wird. Vorbereitend wollen wir jedoch einstweilen aus 19) das folgende lineare, wenn auch nicht ganz unabhängige System ableiten:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{B}(\lambda+\nu)-\Gamma(\lambda+\mu)+2B(\nu-\mu)=0,\\
20)\qquad &\Gamma(\mu+\lambda)-\mathsf{A}(\mu+\nu)+2B(\lambda-\nu)=0,\\
&\mathsf{A}(\nu+\mu)-\mathsf{B}(\nu+\lambda)+2B(\mu-\lambda)=0.
\end{aligned}
$$

6.

In diesem Abschnitte betrachten wir, wie es der Schluss des § 4 vorschreibt, die Zählerdeterminanten, welche bei der Bestimmung von α''^2, β''^2, γ''^2 des Systems 13) erhalten werden, nachdem man die Substitutionen 14) vorgenommen hat. Und zwar combiniren wir dieses Mal am besten mit den Gleichungen I und III die übrigen, weil die Constanten der rechten Seiten dieser zwei Gleichungen speciell gleich 1 sind. Durch Nullsetzen der Determinanten erhalten wir dann, wenn wir als Variable etwa μ, ν auszeichnen, der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
&\chi(\nu^2-\mu^2)+\mathsf{B}(1-\nu^2)-\Gamma(1-\mu^2)=0,\\
&(n+\chi)(\nu^2-\mu^2)+\mathfrak{B}\mu(1-\nu^2)-\mathfrak{C}\nu(1-\mu^2)=0,\\
21)\qquad &\mathfrak{h}(\nu^2-\mu^2)+\mathfrak{B}\mu^2(1-\nu^2)-\mathfrak{C}\nu^2(1-\mu^2)=0,\\
&(\mathfrak{h}-l)(\nu^2-\mu^2)+(\mathsf{B}+2B)\mu(1-\nu^2)-(\Gamma+2B)\nu(1-\mu^2)=0,\\
&h(\nu^2-\mu^2)+[(\mathfrak{B}\mu-\mathsf{B})^2-2M\mu](1-\nu^2)-[(\mathfrak{C}\nu-\Gamma)^2-2M\nu](1-\mu^2)=0.
\end{aligned}
$$

Entsprechend erscheinen natürlich zu jeder der vorstehenden Gleichungen noch zwei andere, in λ, ν bezw. μ, λ geschrieben. Jedes solche Gleichungstripel aber lässt durch Addition die Identität $0=0$ und durch Elimination der betreffenden Anfangsconstanten die nach 15) verschwindende Coefficientendeterminante erscheinen — so dass also im Ganzen doch nur fünf unabhängige Gleichungen zur Verfügung stehen, wie es sein muss.

Addiren wir die zwei ersten Gleichungen 21) und beachten die Beziehungen 18), so folgt sofort

$$22)\qquad 2\chi+2B+n=0$$

und analog ergiebt die Addition der dritten und vierten jener Gleichungen

$$23)\qquad 2\mathfrak{h}-l=0.$$

Hiermit sind die Constanten χ und $\mathfrak{h}$ der Poinsot'schen Bewegungen, welche bekanntlich die Drehungsantheile um die invariabeln Axen (s' und s)

feststellen, durch die bekannten Werthe n, $2B=\frac{A-C}{A}n$ und l der Lagrange'schen Bewegung in der denkbar einfachsten Weise ausgedrückt. Die Drehgrösse $\mathfrak{h}$ ist dabei nicht abhängig von den Hauptträgheitsmomenten A und C der letzteren Bewegung, sondern einzig und allein von der längs der Verticalaxe z auftretenden constanten Componente des den schweren Umdrehungskörper attaquirenden Momentankräftepaares.

Andererseits können aber auch die zwei Bestimmungsgrössen χ und $\mathfrak{h}$ von vornherein aus den Gleichungen 21) eliminirt werden, so dass noch folgende drei Gleichungen bestehen bleiben:

$$
24)\quad
\begin{aligned}
&(\mathfrak{B}\mu-\mathrm{B})\,(1-\nu^2)-(\mathfrak{C}\nu-\Gamma)\,(1-\mu^2)=n(\mu^2-\nu^2),\\
&(\mathfrak{B}\mu-\mathrm{B})\mu(1-\nu^2)-(\mathfrak{C}\nu-\Gamma)\,\nu(1-\mu^2)=l\,(\mu^2-\nu^2)+2B\,(\mu-\nu)(1+\mu\nu),\\
&(\mathfrak{B}\mu-\mathrm{B})^2\,(1-\nu^2)-(\mathfrak{C}\nu-\Gamma)^2(1-\mu^2)=h(\mu^2-\nu^2)+2M(\mu-\nu)\,(1+\mu\nu).
\end{aligned}
$$

Sollen dieselben für die Differenzen $\mathfrak{B}\mu-\mathrm{B}$ und $\mathfrak{C}\nu-\Gamma$ nebeneinander existiren können, so muss die Determinante der Coefficienten und der Constanten verschwinden. Hierdurch ergiebt sich zunächst eine neue lineare Combination der genannten Differenzen, welche dann zusammen mit den zwei ersten Gleichungen 24) eine Discriminante liefert, welche von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, B, Γ frei ist.

Die letztere schreibt sich nach Vornahme einiger leichter Vereinfachungen in der folgenden symmetrischen Form:

$$
\begin{vmatrix}
\mu+\nu & 1+\mu & n(\mu+\nu)\\
1+\mu\nu & \mu+\nu & l(\mu+\nu)+2B(1+\mu\nu)\\
n(\mu+\nu) & l(\mu+\nu)+2B(\mu+\nu) & h(\mu+\nu)+2M(1+\mu\nu)
\end{vmatrix}=0.
$$

Setzt man

$$\frac{1+\mu\nu}{\mu+\nu}=\Lambda,$$

so resultirt hieraus die Gleichung dritten Grades

$$25)\qquad (2M\Lambda^2+h-n^2)(1-\Lambda^2)-[l+(2B-n)\Lambda]^2=0.$$

Dieselbe wäre auch erhalten worden, wenn man, statt *a priori* bei Aufstellung der Relationen 21) μ und ν auszuzeichnen, eines der Werthepaare ν, λ; λ, μ gewählt hätte. Die drei Werthe für die Unbekannte sind also resp.

$$
26)\qquad
\begin{aligned}
\Lambda&=\frac{1+\mu\nu}{\mu+\nu},\\
\mathrm{M}&=\frac{1+\nu\lambda}{\nu+\lambda},\\
\mathrm{N}&=\frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu}.
\end{aligned}
$$

Nun aber besitzt die Gleichung 25) genau dieselbe Form wie der gleich Null gesetzte Radicand der Gleichung 4), wenn man in letzteren die Werthe

$$Cn = A(n-2B), \quad h' = h - 2B$$

aus den Abkürzungen 12) substituirt:

$$(2Mc'' + h - n^2)(1 - c''^2) - [l + (2B - n)c'']^2 = 0.$$

Diese Gleichung stimmt mit der obigen identisch überein, sobald $c'' = \Lambda$ gesetzt wird, und besitzt bekanntlich drei reelle Wurzelwerthe, so dass wir den bemerkenswerthen Satz verzeichnen:

Die von uns eingeführten Bestimmungsgrössen Λ, M, N, welche sich in einfacher Weise aus den Verhältnisswerthen λ, μ, ν der Winkelgeschwindigkeitscomponenten der zwei Poinsot'schen Rotationen zusammensetzen [26)], sind nichts Anderes, als die drei Parameterwerthe, welche in der Lagrange-schen Bewegung die Nutation c'' der Axe des Umdrehungskörpers gegen die Verticale bestimmen, und als solche alle drei reell.

7.

Nachdem in den beiden vorhergehenden Paragraphen von den elf zu bestimmenden Grössen des § 4 bereits χ und $\mathfrak{h}$ durch die Gleichungen 22) und 23) gegeben sind und Λ, M, N als bekannte Wurzeln einer cubischen Gleichung — und somit, wenn man will, auch λ, μ, ν — gefunden erscheinen, erübrigt es im Folgenden nur noch, die sechs übrigen Grössen

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma; \quad \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$$

alle durch Elemente der Lagrange'schen Rotation darzustellen.

Dieselben sind freilich zunächst durch die Gleichungssysteme 18), 19) mit den Grössen λ, μ, ν und nicht mit Λ, M, N verbunden; sie würden sich auch, wenn man aus dem Zusammenhange 26) der letzteren Grössentripel etwa λ, μ, ν durch Auflösung quadratischer Gleichungen in Functionen von Λ, M, N aufstellen wollte, in keiner einfachen Gestalt mehr präsentiren.

Wir können aber glücklicherweise, durch die eigenartige Form der Ausdrücke 26) veranlasst, jedwedes Wurzelzeichen vermeiden.

Setzen wir nämlich

$$27) \qquad \begin{aligned} \Lambda &= \operatorname{cotg} \Lambda', \\ \mathsf{M} &= \operatorname{cotg} \mathsf{M}', \quad \Lambda' + \mathsf{M}' + \mathsf{N}' = 2\Omega, \\ \mathsf{N} &= \operatorname{cotg} \mathsf{N}', \end{aligned}$$

so ergiebt sich nach den elementaren Regeln der Trigonometrie aus 26) das System

$$28) \qquad \begin{aligned} \lambda &= \operatorname{cotg}(\Omega - \Lambda'), \\ \mu &= \operatorname{cotg}(\Omega - \mathsf{M}'), \\ \nu &= \operatorname{cotg}(\Omega - \mathsf{N}'). \end{aligned}$$

Substituirt man den Werth 21) für χ in die erste Gleichung 22), so erscheint eine Gleichung, welche ausser B und Γ nur die Grössen λ, μ, ν als Variable enthält und also mit der ersten Gleichung 20) zusammen B, Γ

in linearer Darstellung liefert, und hiermit, nach dem Princip der cyklischen Vertauschung, auch A. Es werden

$$
29)\quad
\begin{aligned}
&\mathrm{A}(1+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)+2B(1-\lambda^2)+\left(B+\frac{n}{2}\right)(\lambda+\mu)(\lambda+\nu)=0,\\
&\mathrm{B}(1+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)+2B(1-\mu^2)+\left(B+\frac{n}{2}\right)(\mu+\nu)(\mu+\lambda)=0,\\
&\Gamma(1+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)+2B(1-\nu^2)+\left(B+\frac{n}{2}\right)(\nu+\lambda)(\nu+\mu)=0,
\end{aligned}
$$

Formeln, welche sich durch die trigonometrischen Substitutionen 28) noch mannigfach vereinfachen lassen. Mit A, B, Γ sind aber auch die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ linear durch die Gleichungen 18) mitbestimmt. Es schreiben sich die letzteren speciell in λ, μ, ν ausgedrückt:

$$
30)\quad
\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}\lambda+2B)(1+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)-2B(1-\lambda^2)-\left(B+\frac{n}{2}\right)(\lambda+\mu)(\lambda+\nu)=0,\\
&(\mathfrak{B}\mu+2B)(1+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)-2B(1-\mu^2)-\left(B+\frac{n}{2}\right)(\mu+\nu)(\mu+\lambda)=0,\\
&(\mathfrak{C}\nu+2B)(1+\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)-2B(1-\nu^2)-\left(B+\frac{n}{2}\right)(\nu+\lambda)(\nu+\mu)=0.
\end{aligned}
$$

Mit der nunmehr völlig durchgeführten Bestimmung der elf Elemente der zwei Poinsot'schen Rotationen, χ, $\mathfrak{h}$; λ, μ, ν; A, B, Γ; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ist das Jacobi'sche Theorem bewiesen.

Kleinere Mittheilungen.

XXI. Bemerkungen zu Schmid's Mittheilung: „Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Schwere etc.", S. 188 dieses Bandes.

In seiner Mittheilung beweist Herr Theodor Schmid den Satz, dass auf der Oberfläche eines Jacobi'schen dreiaxigen Gleichgewichtsellipsoides die Schwere proportional sei den Abschnitten der Normalen durch die drei Hauptebenen. Dieser Satz ist nicht neu. Derselbe findet sich schon in meinen Schriften: „Ueber die Gleichgewichtsfiguren homogener, freier rotirender Flüssigkeiten. Kiel 1857", S. 40 (34) und (38); und „Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. (Kieler Univ.-Chron.) Einladungsschrift zur Feier des Geburtstages König Friedrich VII. 1859", S. 31 (33) und (35).*

Die dort aufgestellten Relationen für die Schwere P sind

$$1)\qquad P = A\frac{n_{yz}}{a} = B\frac{n_{xz}}{b} = C\frac{n_{xy}}{c},$$

$$2)\qquad \frac{P}{A} = \frac{x^2 a}{a^2 n_{yz}} + \frac{y^2 a}{b^2 n_{xz}} + \frac{z^2 a}{c^2 n_{xy}},$$

$$3)\qquad \frac{P^2}{A^2} = \frac{a^2 x^2}{a^4} + \frac{a^2 y^2}{b^4} + \frac{a^2 z^2}{c^4}.$$

Da die angeführten Schriften wenig bekannt sein dürften, so will ich noch ein paar andere bemerkenswerthe Sätze aus denselben mittheilen, welche sich ebenfalls auf die Veränderlichkeit der Schwere auf dem Jacobi'schen Ellipsoide und innerhalb desselben beziehen. Unter Schwere ist hier, wie auch in dem Aufsatze von Schmid die Resultante der absoluten Massenanziehung und der Schwungkraft zu verstehen. Für die äusserste Niveaufläche ist

$$4)\qquad Rr = Xx + Yy + Zz = Aa = Bb = Cc,$$

wo R die nach der Richtung des Centrums oder der Rad. vect. r eines Punktes geschätzte Schwere, A, B und C die Schwerkräfte an den drei Polen bezeichnen. Die Gleichungen 1) bis 4), welche ebenfalls für die inneren Niveauflächen gelten, führen, wie in den Abhandlungen gezeigt ist, zu weiteren Sätzen über die isodynamischen (isobaren) Curven und Flächen des Jacobi'schen Ellipsoids. (S. 32 [1859].) Nimmt man nämlich P constant gleich mA an, wo m von Fläche zu Fläche variabel ist, so ist die allgemeine Gleichung der isobaren Flächen

---

* Man vergl. auch Bd. 16 dieser Zeitschrift, S. 290.

$$5)\qquad \frac{a^2x^2}{a^4m^2}+\frac{a^2y^2}{b^4m^2}+\frac{a^2z^2}{c^4m^2}=1,$$

d. h. die isodynamischen Flächen sind concentrische ellipsoidische Flächen im Innern der Masse, deren Halbaxen sich verhalten wie die Quadrate der Halbaxen des Hauptellipsoids oder wie die drei Normalen irgend eines Punktes einer Niveaufläche. Verzeichnet man die Durchschnittscurven dieser Flächen auf der Oberfläche des Jacobi'schen Ellipsoides

$$6)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

so erhält man ihre isobaren Curven. Ist $a<b<c$, also $2a$ die Rotationsaxe (Ivory), so wird

nach Elimination von z

$$7)\qquad \frac{(c^2-a^2)x^2}{(m^2c^2-a^2)a^2}+\frac{(c^2-b^2)a^2y^2}{(m^2c^2-a^2)b^4}=1,$$

nach Elimination von y

$$8)\qquad \frac{(b^2-a^2)x^2}{(m^2b^2-a^2)a^2}-\frac{(c^2-b^2)a^2z^2}{(m^2b^2-a^2)c^4}=1,$$

nach Elimination von x

$$9)\qquad \frac{(b^2-a^2)c^2y^2}{(c^2-m^2a^2)b^4}-\frac{(c^2-a^2)z^2}{(c^2-m^2a^2)c^2}=1.$$

Nun ist auf der Oberfläche $C<mA<A$ oder $a<cm<c$ und $m<1$; mithin sind die Projectionen der Isobaren auf die xy-Ebene, d. i. die Ebene der kleinsten und mittleren Axe, concentrische Ellipsen; die Projectionen auf die xz-Ebene, d. i. die Ebene der kleinsten und grössten Axe, concentrische Hyperbeln und die Projectionen auf yz-Ebene, d. i. die Ebene der mittleren und grössten Axe, concentrische Ellipsen. Ist die Gleichgewichtsfigur ein Rotationsellipsoid, also $c=b$, $a<b$, so gehen die beiden ersten Gleichungen in Parallelen, die dritte in Kreise über. Es sind die Projectionen der Breitenkreise auf einen Meridian und die Aequatorialebene.

Rostock, 17. Juli 1888. Ludwig Matthiessen.

XXII. Ueber rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke, welche einem Kegelschnitt einbeschrieben sind.

I.

Es ist folgender Satz allgemein bekannt:

Liegt der Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks auf einem Kegelschnitt C^2, und ist dasselbe dem Kegelschnitt einbeschrieben, so gehen die Hypotenusen AB aller rechtwinkligen Dreiecke, welche denselben Scheitel C haben, durch einen Punkt P auf der Normale des Kegelschnitts C^2 in C.

Hieran kann man nun die Frage reihen:

Welches ist der Ort des Punktes P, falls der Scheitel C alle möglichen Lagen auf C^2 einnimmt?

Sei nun zunächst irgend eine Sehne AB des Kegelschnitts gezogen und über derselben als Durchmesser ein Kreis beschrieben, so hat derselbe mit C^2 noch zwei weitere Punkte C gemein. Die Normalen in diesen Punkten C^2 bestimmen nun zwei Punkte P auf AB, oder AB hat mit der Ortscurve P zwei Punkte gemein.* Soll nun AB Tangente der Ortscurve sein, so müssen beide auf ihr gelegene Punkte P zusammenfallen. Dann ist dies jedoch auch mit den Punkten C auf C^2 der Fall. Nun wird jedoch PC zur gemeinschaftlichen Normale des Kreises und des Kegelschnitts C^2, oder P ist jetzt Halbirungspunkt von AB. Hiermit haben wir jedoch die Aufgabe auf die andere zurückgeführt:

Es soll der Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise bestimmt werden, welche einen Kegelschnitt berühren und nebstdem von demselben noch im Durchmesser geschnitten werden, oder auch, es soll der Ort des letzteren Durchmessers bestimmt werden.

II.

Zur weiteren Behandlung dieser Fragen dient folgender (von uns in Grunert's Archiv) gegebener Satz:

Beschreiben wir um einen Pol P mit irgend einem Halbmesser einen Kreis, so hat derselbe mit dem Kegelschnitt

$$C^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

irgend vier Punkte A, B, C, D gemein, welche einen Punkt S zum Schwerpunkt haben, der sich nicht ändert, wenn der Halbmesser des Kreises grösser oder kleiner wird. Sind (p, q) die Coordinaten des Mittelpunktes P, so sind die des Punktes S gegeben durch:

$$\xi = \frac{a^2 p}{a^2 - b^2}, \quad \eta = -\frac{b^2 q}{a^2 - b^2}.$$

Berührt jedoch der Kreis um P den Kegelschnitt in C^2 und hat mit demselben die Endpunkte AB eines Kreisdurchmessers gemein, so ist S der Halbirungspunkt von PC. Sind jedoch $(x_1 y_1)$ die Coordinaten des Punktes C, so folgt hieraus:

$$x_1 = 2\xi - p = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} p \quad \text{und} \quad y_1 = 2\eta - q = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} q.$$

Da letzterer Punkt C jedoch auf C^2 gelegen ist, so folgt daraus als Gleichung des Punktes P:

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 = 0.$$

* Schon hieraus können wir schliessen, dass die Ortscurve ein Kegelschnitt sein wird, und könnten uns damit begnügen, dessen Axen zu bestimmen.

Weiter erhalten wir noch die Relation:

$$\frac{x_1}{y_1} = -\frac{p}{q}.$$

Dies giebt den Satz:

Der Ort des Punktes P ist ein Kegelschnitt ähnlich dem gegebenen und zwar bilden die Geraden, welche den Mittelpunkt des Kegelschnitts mit den Punkten P und C verbinden, mit den Axen gleiche Winkel. (Vergl. Steiner, Ges. Werke, Bd. II S. 332.) Und:

Soll ein Kreis K^2 einen Kegelschnitt berühren und nebstdem von demselben im Durchmesser geschnitten werden, so ist der Ort des Mittelpunkts des Kreises und ebenso der Ort des genannten Durchmessers dieselbe Curve.

Setzen wir umgekehrt die Werthe von p und q in diese Ortsgleichung ein, so erhalten wir aus

$$p = \frac{\xi}{a^2}(a^2 - b^2), \quad q = -\frac{\eta}{b^2}(a^2 - b^2)$$

als Gleichung des Ortes des Schwerpunktes S:

$$S^2 = \frac{\xi^2}{a^6} + \frac{\eta^2}{b^6} - \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} = 0.$$

Oder:

Der Ort des Punktes S ist ebenfalls ein Kegelschnitt.

III.

Ist ferner der Kegelschnitt eine Parabel

$$y^2 = 2ax,$$

so erhalten wir für den Schwerpunkt S der Punkte, welche ein Kreis um den Mittelpunkt P (mit den Coordinaten p, q) mit der Parabel gemein hat, die Coordinaten

$$\xi = (p - a), \quad \eta = 0,$$

also für den Punkt C

$$x_1 = 2\xi - p = p - 2a, \quad y_1 = 2\eta - q = -q$$

den Ort:

$$q^2 = 2a(p - 2a),$$

d. h. eine Parabel. Dies giebt:

Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so ist der Ort des Punktes P ebenfalls eine Parabel.

IV.

Wenn ferner P der Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ABC ist, so hat der Umkreis des Dreiecks ABC mit dem Kegelschnitt noch einen vierten Punkt D gemein. Ist nun S der Schwerpunkt der vier Punkte A, B, C, D, so liegt derselbe auf PD und zwar so, dass $PS = \frac{1}{4} PD$ ist. Hieraus erhalten wir jedoch für die Coordinaten des Punktes D aus denen der Punkte $P (= pq)$ und $S (= \xi, \eta)$ die Werthe:

$$x_1 = 4\xi - 3p = \frac{a^2 + 3b^2}{(a^2 - b^2)} p, \quad y_1 = 4\eta - 3q = -\frac{3a^2 + b^2}{a^2 - b^2} q.$$

Da jedoch Punkt D auf dem Kegelschnitt C^2 gelegen ist, folgt hieraus als Gleichung des Ortes des Punktes P:

$$\frac{p^2(a^2+3b^2)^2}{a^2}+\frac{q^2(3a^2+b^2)^2}{b^2}=(a^2-b^2)^2.$$

Dies giebt uns:

Der Ort des Mittelpunktes aller gleichseitigen Dreiecke, welche einem Kegelschnitt C^2 einbeschrieben sind, ist ein Kegelschnitt.

Ist der Kegelschnitt C^2 insbesondere eine gleichseitige Hyperbel, also $a^2+b^2=0$, so wird die Gleichung des Ortes:

$$p^2-q^2-a^2=0.$$

Daraus folgt:

Beschreiben wir mit einem Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel um den einen Endpunkt einen Kreis, so bestimmt derselbe ausser dem andern Endpunkt des Durchmessers noch drei weitere Punkte auf der Hyperbel, welche Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind.*

Ist ferner der Asymptotenwinkel der Hyperbel 120^0, so wird der Ort:

$$p=\pm\frac{a}{2},$$

d. h. ein Paar gerader Linien parallel der Nebenaxe, welche die Abstände des Mittelpunktes von den Scheiteln der Hyperbel halbiren. Hieraus folgt insbesondere noch der Satz:

Sind A, A_1 die Scheitel einer Hyperbel, mit einem Asymptotenwinkel $=120^0$ und ist M deren Mittelpunkt, und beschreiben wir durch einen der Scheitel, etwa A, und denjenigen Brennpunkt F_1 derselben, der auf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunkts gelegen ist, einen Kreis, so bestimmt derselbe auf der Hyperbel noch drei weitere Punkte, welche Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind.

Ist dagegen der Asymptotenwinkel der Hyperbel $=60^0$, so folgt aus der Gleichung des Orts für dessen Mittelpunkt ein Paar imaginärer Geraden, welche durch den unendlich fernen Punkt der x-Axe gehen. Auch hier ist jeder Hyperbelpunkt Ecke eines solchen Dreiecks, von dem zwei Seiten den Asymptoten parallel sind, während die dritte Ecke auf g_∞ fällt. Daraus folgt:

Einem gleichseitigen Dreieck lässt sich keine eigentliche Hyperbel umschreiben, deren Asymptotenwinkel $=60^0$ ist.

Fragen wir ebenso nach dem Ort des Punktes S, so erhalten wir aus

$$\xi=\frac{a^2}{a^2-b^2}p,\quad \eta=-\frac{b^2}{a^2-b^2}q$$

dessen Gleichung:

---

* Diesen Satz, sowie den Satz, dass für den Fall der Parabel die Ortscurve ebenfalls eine Parabel ist, haben wir ebenfalls in Grunert's Archiv bereits früher bewiesen.

$$\xi^2\frac{(a^2+3b^2)^2}{a^6}+\eta^2\frac{(3a^2+b^2)^2}{b^6}=1,$$

also ebenfalls ein Kegelschnitt; oder:

Der Ort des Schwerpunktes S ist ebenfalls ein Kegelschnitt.

Weingarten (Württemberg). B. Sporer.

XXIII. Das elliptische Integral erster Gattung mit complexem Modul.

Herr Dr. W. Heymann theilt im „Journal für Mathematik"* eine Formel für das obengenannte Integral mit, die er bei Untersuchungen über Abel'sche Transcendenten gefunden habe. Da ich mich zufällig mit demselben Gegenstande beschäftigt hatte und zu einer der seinigen sehr ähnlichen Formel gelangt war, setzte ich Herrn Dr. Heymann von derselben und ihrer Ableitung in Kenntniss, und auf seine Anregung hin erlaube ich mir nun, die letztere hier folgen zu lassen.

Das Integral:

1) $$J=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-(\alpha+\beta i)x^2)}},$$

worin x reell, positiv und $\leqq 1$, α und β reell sein sollen, ist in einen reellen und einen rein imaginären Theil zu zerlegen. Zu dem Ende setze ich:

2) $$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha x^2-\beta i x^2}}=U+iV,$$

wobei U und V reelle Grössen bedeuten sollen, und z. A.:

3) $$1-\alpha x^2=A,\quad \beta x^2=B.$$

Dann ist:

$$1=(U^2-V^2+2iUV)(A-Bi)$$

und hieraus sehr leicht:

$$(A^2+B^2)(U^2-V^2)=A,\quad (A^2+B^2)UV=\tfrac{1}{2}B,$$

so dass UV das Zeichen von β hat. Dann ist weiter:

$$\left(\frac{U}{V}\right)^2-\frac{2A}{B}\,\frac{U}{V}=1,$$

daher:

$$\frac{U}{V}=\frac{A+\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}{B}\qquad \varepsilon=\pm 1,$$

folglich:

4) $$U^2=\frac{A+\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2+B^2)},\quad V^2=\frac{-A+\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2+B^2)}.$$

* Bd. 103 S. 87.

Da nun U und V reell, also U^2 und V^2 positiv sein müssen, so muss in diesen Formeln $\varepsilon=+1$ genommen und später $\sqrt{A^2+B^2}$ als positive Grösse bestimmt werden. Ich führe nun statt x die variable Grösse v mittels der Gleichung:

$$5)\qquad A^2+B^2=(1-\alpha x^2)^2+\beta^2x^4=(vx^2-1)^2$$

ein, woraus sich nach Fortlassung des Factors x^2 ergiebt:

$$6)\qquad x^2=\frac{2(v-\alpha)}{v^2-\alpha^2-\beta^2};$$

$$7)\qquad \frac{d(x^2)}{dv}=-2\frac{(v-\alpha)^2+\beta^2}{(v^2-\alpha^2-\beta^2)^2};$$

da v mit wachsendem (positivem) x abnimmt und, für $x=\infty$, $v^2=\alpha^2+\beta^2$ wird, so ist, wenn ich v von ∞ an abnehmen lasse, während x von 0 an wächst, stets:

$$v^2-\alpha^2-\beta^2>0.$$

Dem Anschein nach könnte ich auch v von α an abnehmen lassen, doch ist dies aus später anzugebendem Grunde unthunlich. — Nun ist nach 5) und 6):

$$8)\qquad \sqrt{A^2+B^2}=\frac{(v-\alpha)^2+\beta^2}{v^2-\alpha^2-\beta^2}\quad\text{und}\quad A=1-\alpha x^2=\frac{(v-\alpha)^2-\beta^2}{v^2-\alpha^2-\beta^2};$$

daher ist nach 4) (mit $\varepsilon=+1$):

$$U^2=\frac{(v-\alpha)^2(v^2-\alpha^2-\beta^2)}{((v-\alpha)^2+\beta^2)^2},\qquad V^2=\frac{\beta^2(v^2-\alpha^2-\beta^2)}{((v-\alpha)^2+\beta^2)^2},$$

also, wenn ±1 wieder durch ε bezeichnet wird:

$$9)\qquad U=\varepsilon\frac{(v-\alpha)\sqrt{v^2-\alpha^2-\beta^2}}{(v-\alpha)^2+\beta^2},\qquad V=\varepsilon\frac{\beta\sqrt{v^2-\alpha^2-\beta^2}}{(v-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Aus 6) und 7) folgt noch:

$$dx=-\frac{((v-\alpha)^2+\beta^2)\,dv}{\sqrt{2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)^3}},\quad 1-x^2=\frac{v^2-\alpha^2-\beta^2-2(v-\alpha)}{v^2-\alpha^2-\beta^2},$$

also wird:

$$10)\qquad J=\int_0^x\frac{(U+iV)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\varepsilon\int_v^\infty\frac{(v-\alpha+i\beta)\,dv}{\sqrt{2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)(v^2-\alpha^2-\beta^2-2(v-\alpha))}}.$$

Setze ich $\beta=0$, so wird aus 6):

$$v+\alpha=\frac{2}{x^2}$$

und hiermit nach 10):

$$J=\varepsilon\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\alpha x^2)}}.$$

Der Vergleich mit 1) zeigt, dass $\varepsilon=+1$ zu nehmen ist.

Hätten wir v von α an abnehmen lassen, wobei $\alpha^2+\beta^2-v^2$ positiv gewesen wäre, so würden wir zu dem Widerspruch gelangt sein, dass für $\beta=0$ der reelle Theil des Integrals verschwände.

Ist $x>1$, so ist ganz ebenso:

$$11)\quad \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-(\alpha+\beta i)x^2)}} = \int_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}^{v} \frac{(v-\alpha+i\beta)\,dv}{\sqrt{2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2+2(v-\alpha)-v^2)}}.$$

Für $x=1$ ist $v=1+\sqrt{(1-\alpha)^2+\beta^2}$.

In gleicher Behandlungsweise ist für das Integral zweiter Gattung, wenn die Grenzen x_0 und v_0, x_1 und v_1 einander entsprechen:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1-(\alpha+\beta i)x^2}\,dx}{\sqrt{\pm(1-x^2)}} = \int_{v_1}^{v_0} \frac{(v-\alpha)^2+\beta^2}{v^2-\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{(v-\alpha-i\beta)\,dv}{\sqrt{\pm 2(v-\alpha)(v^2-\alpha^2-\beta^2)(v^2-\alpha^2-\beta^2-2(v-\alpha))}}.$$

Königsberg, Juli 1888. LOUIS SAALSCHÜTZ.

XXIV. Note über das elliptische Integral mit complexem Modul.

Im XXXIII. Jahrg. dieser Zeitschrift, S. 51 (vergl. auch Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, Bd. 103) habe ich die Formel

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(e+f\sqrt{-1})u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2f}}\int_0^w \frac{(1+w\sqrt{-1})\,dw}{\sqrt{w\left(1+2\frac{e}{f}w-w^2\right)\left(1+2\frac{e-1}{f}w-w^2\right)}},$$

wobei u und w verbunden sind durch

$$\frac{1}{u^2}=\frac{f}{2w}\left(1+2\frac{e}{f}w-w^2\right),$$

mitgetheilt.

Herr Prof. L. Saalschütz machte mich nun brieflich darauf aufmerksam, dass sich meine Entwickelung für $f=0$ nicht unmittelbar als reell erweist, und daher möchte ich mir erlauben, noch einmal kurz auf den Gegenstand zurückzukommen.

Der beregte Uebelstand lässt sich ohne Weiteres beseitigen, wenn man in obige Entwickelung an Stelle von w eine neue Veränderliche v mittels

$$w = -\frac{v}{f}$$

einführt. Die so verbesserte Formel lautet:

$$1)\quad \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-(e+f\sqrt{-1})u^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_v^{v_1} \frac{(v+f\sqrt{-1})\,dv}{\sqrt{v(v^2+2ev-f^2)(v^2+2(e-1)v-f^2)}},$$

wobei u und v verbunden sind durch

$$2)\quad \frac{1}{u^2} = \frac{1}{2v}(v^2+2ev-f^2),$$

und diese gilt nun auch, wenn f verschwindet.

Für die obere Grenze v_1 hat man den Werth ∞ zu wählen; so lange f von 0 verschieden ist, dürfte v_1 auch gleich 0 gesetzt werden.

Will man die Formel auf ihre Richtigkeit prüfen, so ertheile man ihrer linken Seite die Form

$$\int_u^0 \frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{u^2}-1\right)\left(\frac{1}{u^2}-(e+f\sqrt{-1})\right)}}$$

und entnehme aus 2)

$$\left\{\begin{aligned} d\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{(v^2+f^2)\,dv}{\sqrt{v^3(v^2+2ev-f^2)}},\\ \frac{1}{u^2}-1 &= \frac{1}{2v}(v^2+2(e-1)v-f^2),\\ \frac{1}{u^2}-(e+f\sqrt{-1}) &= \frac{1}{2v}(v-f\sqrt{-1})^2. \end{aligned}\right.$$

Nach Einführung dieser Ausdrücke entsteht die rechte Seite von 1) unmittelbar.

Woldemar Heymann.

XXV. Ueber die Coefficienten der Kugelfunctionen einer Veränderlichen.

Die n^{te} Kugelfunction einer Veränderlichen x wird gewöhnlich durch folgenden Ausdruck wiedergegeben:

$$1)\quad P^n(x) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \ldots\right].$$

Herr G. Bauer* in München hat nun bemerkt, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x in der Kugelfunction $P^n(x)$, wenn sie auf die kleinste Benennung gebracht sind, im Nenner nur Potenzen von 2 enthalten.

Es muss also möglich sein, die Kugelfunction durch einen solchen Ausdruck wiederzugeben, dass diese Eigenschaft sofort in die Augen springt. Dieses soll im Folgenden geschehen, und dabei wird sich zeigen, dass die neue Darstellung vor der gewöhnlichen den Vortheil grösserer Durchsichtigkeit hat.

Der Zahlenfactor des allgemeinen (r^{ten}) Gliedes, mit dem x^{n-2r} multiplicirt ist, heisst

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-2r+1)}{2.4.6\ldots(2r).(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)}.$$

Dieser Ausdruck geht durch Kürzung mit

$$[(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)].[n(n-1)\ldots(n-r+1)]$$

in folgenden über:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-2r-1)}{1.2.3\ldots(n-r)}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-2r+1)}{2^r.1.2.3\ldots r},$$

und dieser durch Erweiterung mit $2.4.6\ldots(2n-2r)$ in

$$\frac{1.2.3\ldots(2n-2r)}{2^{n-r}.[1.2.3\ldots(n-r)]^2}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-2r+1)}{2^r.1.2.3\ldots r}$$
$$=\frac{1}{2^n}\cdot\binom{2n-2r}{n-r}\cdot\binom{n-r}{r}.$$

Die eingeklammerten Ausdrücke bedeuten Binomialcoefficienten und sind daher bekanntlich ganze Zahlen. Der neue Ausdruck für die n^{te} Kugelfunction heisst somit

$$2)\qquad P^n(x)=\frac{1}{2^n}\cdot\sum(-1)^r\cdot\binom{2n-2r}{n-r}\cdot\binom{n-r}{r}\cdot x^{n-2r},$$

worin r von 0 bis $\frac{n}{2}$ bez. $\frac{n-1}{2}$ geht.

Es sind daher nicht erst, wie Heine a. a. O. behauptet, die Coefficienten von $4^n.P^n(x)$, sondern schon diejenigen von $2^n.P^n(x)$ ganze Zahlen.

Mit Hilfe der Gleichung 2) gelingt auch sehr rasch der Beweis des wichtigen Satzes, dass

$$3)\qquad \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=2^n.\Pi(n).P^n(x),$$

worin $\Pi(n)$ die Gauss'sche Abkürzung für $1.2.3\ldots n$ ist. Nämlich

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum(-1)^r\cdot\binom{n}{r}(2n-2r)(2n-2r-1)\ldots(n-2r)x^{n-\ r}$$
$$=\prod(n)\cdot\sum(-1)^r\cdot\binom{n}{r}\cdot\binom{2n-2r}{n}\cdot x^{n-2r}.$$

* S. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. 1, 2. Aufl., S. 14.

Der Vergleich dieses Ausdruckes mit 2) und 3) zeigt, dass der Beweis erbracht ist, wenn es gelingt,

$$\binom{n}{r}\cdot\binom{2n-2r}{n} \text{ in } \binom{2n-2r}{n-r}\cdot\binom{n-r}{r}$$

überzuführen. Dieses ist aber leicht zu bewerkstelligen; denn

$$\binom{n}{r}\cdot\binom{2n-2r}{n}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\cdot\frac{[(2n-2r).(2n-2r-1)\ldots(n-r+1)].[(n-r)(n-r-1)\ldots(n-2r+1}{[1.2\ldots(n-r)][(n-r+1)\ldots(n-1)n]}$$

$$=\frac{(2n-2r)(2n-2r-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots(n-r)}\cdot\frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-2r+1)}{1.2\ldots r}$$

$$=\binom{n-r}{r}\cdot\binom{2n-2r}{n-r}, \text{ w. z. b. w.}$$

Augsburg. Dr. W. Braun.

XXVI. Ueber das „harmonisch-geometrische Mittel“.

Sind x, y irgend zwei Zahlgrössen, so nennt man bekanntlich ihr harmonisches Mittel die Grösse x_1, welche aus ihnen nach der Gleichung

$$\frac{2}{x_1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad \text{oder} \quad x_1=\frac{2xy}{x+y}$$

gebildet ist. Bezeichnet man ferner das geometrische Mittel von x und y mit y_1, so betrachten wir folgende Reihe von Grössenpaaren:

$$x_1=\frac{2xy}{x+y}, \quad y_1=\sqrt{xy},$$

$$x_2=\frac{2x_1y_1}{x_1+y_1}, \quad y_2=\sqrt{x_1y_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_\nu=\frac{2x_{\nu-1}y_{\nu-1}}{x_{\nu-1}+y_{\nu-1}}, \quad y_\nu=\sqrt{x_{\nu-1}y_{\nu-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ebenso wie bei dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels kann man beweisen, dass sich — bei passender Fixirung der Wurzelwerthe — für reelle und complexe x und y x_ν und y_ν stets einer und derselben Grenze $\overline{M}(x, y)$ nähern, welche man füglich als das harmonisch-geometrische Mittel von x und y bezeichnen kann. Wir wollen nun zeigen, dass diese Grenze sich in höchst einfacher Weise durch das arithmetisch-geometrische Mittel $M(x, y)$ ausdrückt. Es ist nämlich

$$x_1=\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\sqrt{xy}, \quad y_1=\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}y', \quad\quad =\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}x',$$

wenn wir mit x', y'; x'', y'' u. s. w. die aus dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels entspringenden Grössen bezeichnen. Hiernach ist

$$x_2 = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\,\frac{2x'y'}{x'+y'} = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\,\frac{2\sqrt{x'y'}}{x'+y'}\,y'',$$

$$y_2 = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\sqrt{x'y'} \quad = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\,\frac{2\sqrt{x'y'}}{x'+y'}\,x'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_\nu = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\,\frac{2\sqrt{x'y'}}{x'+y'}\cdots\frac{2\sqrt{x^{(\nu-1)}y^{(\nu-1)}}}{x^{(\nu-1)}+y^{(\nu-1)}}\,x^{(\nu)},$$

$$y_\nu = \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\,\frac{2\sqrt{x'y'}}{x'+y'}\cdots\frac{2\sqrt{x^{(\nu-1)}y^{(\nu-1)}}}{x^{(\nu-1)}+y^{(\nu-1)}}\,y^{(\nu)},$$

also ist

$$\overline{M}(xy) = M(x,y)\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{2\sqrt{x^{(\nu)}y^{(\nu)}}}{x^{(\nu)}+y^{(\nu)}}.$$

Führt man nun

$$t_\nu = \frac{x^{(\nu)}-y^{(\nu)}}{x^{(\nu)}+y^{(\nu)}} = \frac{x^{(\nu)}-x^{(\nu+1)}}{x^{(\nu+1)}}$$

ein, so ist

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\frac{2\sqrt{x^{(\nu)}y^{(\nu)}}}{x^{(\nu)}+y^{(\nu)}} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\sqrt{1-t_\nu^2}.$$

Bezeichnen wir dieses unendliche Product, das, wenn $|t|<1$, also auch, wenn erst ein bestimmtes $|t_\nu|<1$, durch passende Fixirung der Werthe der folgenden t_ν stets zu einem convergenten gemacht werden kann, mit B, so ist (vergl. Heft 3 S. 133)

$$-\frac{d\log B}{dt} = \frac{1}{1-t^2}\left(t + \tfrac{1}{2}tt_1 + \tfrac{1}{4}tt_1t_2 + \cdots\right)$$
$$= \frac{4}{1-t^2}A,$$

wenn wir uns derselben Bezeichnungen wie in unserer Notiz über das arithmetisch-geometrische Mittel bedienen. Nun ist

$$2A = t + (1-t^2)\frac{d\log M(1+t,\,1-t)}{dt},$$

sonach

$$-\frac{d\log B}{dt} = \frac{2t}{1-t^2} + 2\,\frac{d\log M(1+t,\,1-t)}{dt},$$

$$B = (1-t^2)\frac{1}{M^2(1+t,\,1-t)} = \frac{xy}{M^2(x,y)},$$

also

$$\overline{M}(xy) = \frac{xy}{M(xy)} \quad \text{oder} \quad M(xy)\,\overline{M}(xy) = xy.$$

Das geometrische Mittel aus dem arithmetisch-geometrischen und dem harmonisch-geometrischen Mittel von x und y ist also gleich dem geometrischen Mittel aus x und y.

Es genügt hiernach $\overline{M}(1+t,\ 1-t)$ der homogenen linearen Differentialgleichung:
$$\frac{d^2w}{dt^2}+\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}\frac{dw}{dt}+\frac{3+t^2}{(1-t^2)^2}w=0$$
oder, wenn $\tau=t^2$ gesetzt wird,
$$\frac{d^2w}{d\tau^2}+\frac{1}{\tau(1-\tau)}\frac{dw}{d\tau}+\frac{3+\tau}{4\tau(1-\tau)^2}w=0.$$

Man hätte übrigens noch einfacher zu dem vorstehend auseinandergesetzten Resultat gelangen können; wir haben den hier angegebenen Weg gewählt, weil uns die dabei auftretende Transcendente $B=\frac{1-t^2}{M^2(1+t,\ 1-t)}$ einiges Interesse darzubieten schien.

Berlin, December 1887.

Theodor Lohnstein,
Cand. math.

XXVII. Berichtigung.

Auf S. 130, in der Mitte etwa, heisst es:

„Bildet man unter dieser Einschränkung, welche offenbar zur Folge hat, dass x', y' innerhalb des durch den Nullpunkt und die Punkte x und y in der Zahlenebene gebildeten Dreiecks liegen etc.“

Dies ist nicht allgemein richtig, es muss vielmehr heissen:

„Bildet man unter dieser Einschränkung, welche offenbar zur Folge hat, dass x', y' innerhalb desjenigen der beiden durch den Nullpunkt, den Punkt x und den Punkt $\frac{\varrho}{\sigma}y$ (wo $\varrho \geqq \sigma$ angenommen ist) gebildeten Kreissectoren liegt, dessen Oeffnungswinkel $<\pi$ ist etc.“

Ferner muss es auf S. 136 an Stelle von „$E=F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,t^2)$“ heissen: „$E=\frac{\pi}{2}F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,t^2)$“.

Berlin, Juli 1888.

Theodor Lohnstein,
Cand. math.

XXVIII. Ein Interferenzversuch mit zwei schwingenden Saiten.

Zwei gleich lange und gleich stark gespannte Seidenschnüre werden durch je eine Zinke einer elektrischen Stimmgabel erregt. Jede der beiden Seidenschnüre theilt sich in n durch Knotenpunkte getrennte Schwingungsbäuche, wenn jede derselben bei der herrschenden Spannung und der gewählten Länge n-mal langsamer schwingt als die Stimmgabel. Bei der Beleuchtung mittels einer vom Verfasser construirten intermittirenden Lampe erscheinen die beiden Seidenschnüre als zwei Wellenzüge, welche um eine halbe Wellenlänge gegeneinander verschoben sind, so dass einem Wellenberge in der einen Seidenschnur ein Wellenthal in der zweiten gegenübersteht. Diese transversalen Schwingungen werden vom Verfasser in der Weise zur Interferenz gebracht, dass um zwei gegenüberstehende Schwingungsbäuche ein Seidenfaden einmal geschlungen und sanft zusammengezogen wird. Die von den beiden Zinken der Stimmgabel ausgehenden Wellenzüge vernichten sich in der Fadenschlinge und die Schnüre jenseits der Schlinge, als auch die beiden Hälften des Fadens bleiben in Ruhe. Dagegen wird die schwingende Bewegung ungehindert durch die Schlinge fortgepflanzt, wenn durch dieselbe blos eine Seidenschnur hindurchgeht, in welchem Falle auch der geschlungene Faden selbst in schwingende Bewegung geräth und in mehrere durch Knotenpunkte getrennte Schwingungsbäuche sich theilt.

Prag. Prof. Dr. Puluj.

(Aus den Sitzungsber. d. Wiener Akademie.)

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe.

Die philosophische Facultät der Universität Göttingen stellt für das Jahr 1891 folgende Aufgabe:

„Die fundamentale Bedeutung des Entropiegesetzes für die Theorie aller derjenigen physikalischen und chemischen Erscheinungen, welche mit einer Production oder Absorption von Wärme verbunden sind, ist in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr hervorgetreten; es ist insbesondere auch bei den Bearbeitungen des Energiegesetzes, welche durch die Beneke'sche Preisaufgabe von 1884 veranlasst worden sind, zur Geltung gekommen, dass das Energiegesetz des Entropiegesetzes als wesentlicher Ergänzung bedarf. Gleichzeitig sind die Arbeiten, welche die Begründung des Entropiegesetzes durch die allgemeinen Principien der Mechanik zum Ziele haben, in neuester Zeit wesentlich fortgeschritten. Eine zusammenfassende Darstellung der sämmtlichen mit dem Entropiegesetz zusammenhängenden Fragen erscheint daher zur Zeit besonders wünschenswerth.

Eine solche Darstellung würde einmal die Entwickelung der empirischen Beweise des Entropiegesetzes zu geben haben, im Anschlusse an eine eingehende Reproduction und Würdigung der Carnot'schen Arbeiten; sie würde ferner die Untersuchungen, die sich auf den Zusammenhang des Entropiegesetzes mit den allgemeinen Principien der Mechanik beziehen, nicht nur historisch, sondern auch kritisch besprechen müssen; sie sollte endlich einen umfassenden Bericht über die sämmtlichen Anwendungen enthalten, welche das Entropiegesetz bisher auf die Theorie physikalischer und chemischer Processe gefunden hat."

Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache mit einem versiegelten Brief, der den Namen, Stand und Wohnort des Verfassers enthält und durch den gleichen Spruch wie die Bewerbungsschrift bezeichnet ist, bis zum 31. August 1890 an die philosophische Facultät zu Göttingen einzusenden.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1891, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Facultät.

Der erste Preis beträgt 1700 Mark, der zweite 680 Mark.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Das Titelblatt einer Bewerbungsschrift muss auch die Bezeichnung der Adresse enthalten, an welche die Schrift, falls sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1888 und bis zum 31. August 1889 einzusenden sind, finden sich beziehungsweise im Jahrgang 1886 Nr. 8 und 1887 Nr. 5 der Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen, 1. April 1888.

XVIII.

Ueber die Bewegung von Ketten in Curven.

Von
Prof. F. August
in Berlin.

---

1. Die allgemeine Lösung des Problems der Bewegung einer Kette unter dem Einfluss bekannter Kräfte ist bisher noch nicht gelungen. Es ist deshalb von Interesse, gewisse specielle Fälle einer solchen Bewegung zu erforschen. So hat man namentlich Rotationen und unendlich kleine Schwingungen genauer untersucht.

Wir stellen uns die Aufgabe, zu prüfen, unter welchen Bedingungen sich eine homogene Kette in einer Curve bewegen kann, so dass also jedes folgende Element in die Stelle des vorhergehenden rückt, während doch im Allgemeinen eine Kette bei ihrer Bewegung eine Fläche beschreibt. Findet eine Bewegung der bezeichneten Art statt, so können wir die Curve, auf welcher sie vor sich geht, als Bahn der Kette bezeichnen.

Wir nehmen zur Masseneinheit die Masse der Längeneinheit der Kette und bezeichnen die rechtwinkligen Coordinaten des Elements ds mit x, y, z, die Axencomponenten der äusseren Kraft $P\,ds$ mit $X\,ds$, $Y\,ds$, $Z\,ds$. (Wir werden hierbei in der Folge des kürzeren Ausdrucks wegen den Factor ds oft weglassen, also die äusseren Kräfte durch die Beschleunigungen darstellen, die sie hervorzubringen streben.) Die Spannung im Punkte xyz sei T. Als Ursache der Spannung in irgend einem Punkte, mit Ausnahme der beiden Endpunkte, ist die Wechselwirkung zwischen den dort zusammenhängenden Theilen der Kette anzusehen. Wir bezeichnen sie alsdann als innere Spannung. In den Endpunkten der Kette aber muss die Spannung, sofern sie nicht Null ist, durch anderweitige Ursachen hervorgebracht werden. Dies sind die äusseren Spannungen oder Spannungen in den Endpunkten. Dieselben sind aber von den übrigen äusseren Kräften gesondert in Rechnung zu stellen. Wir zählen die Spannung positiv, wenn sie eine gegenseitige Anziehung, negativ, wenn sie eine Abstossung bedeutet.

Unter den gemachten Annahmen sind die Bewegungsgleichungen eines Elementes bei jeder beliebigen Bewegung der Kette bekanntlich, wenn t die Zeit bedeutet,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial T}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+T\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+X \text{ und die Analogen,}$$

und zwar sind die Coordinaten x, y, z der Lage des Elementes im Allgemeinen Functionen von s und t. Sollen sich nun alle Elemente in einer Bahn bewegen, und denken wir uns die Coordinaten x, y, z eines Punktes dieser Bahn als Functionen des Bogens σ dargestellt, so muss σ für einen bestimmten Punkt A der Kette Function von t allein sein, etwa gleich ϑ, für einen beliebigen zweiten Punkt B der Kette, der von A den Bogenabstand s hat, ist dann $\sigma=\vartheta+s$, und wenn wir einen begrenzten Bogen der Kette in Betracht ziehen, haben wir für s alle Werthe zwischen den Constanten s_1 und s_2 zuzulassen. Da also $x=x(\sigma)=x(\vartheta+s)$, $y=y(\sigma)=y(\vartheta+s)$, $z=z(\sigma)=z(\vartheta+s)$ ist, so wird, wenn wir die Ableitungen nach σ durch Accente bezeichnen und $\frac{d\vartheta}{dt}=v$, also $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$ setzen, so dass v die algebraische Grösse der Geschwindigkeit, $\frac{dv}{dt}$ die der tangentialen Beschleunigung der ganzen Kette bedeutet:

$$\frac{\partial x}{\partial s}=x', \quad \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=x'', \quad \frac{dx}{dt}=x'v, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=x''v^2+x'\frac{dv}{dt},$$

und analog für die anderen Coordinaten. Die drei Bewegungsgleichungen nehmen somit die Form an:

$$\text{I)} \qquad \begin{cases} x''(v^2-T)+x'\left(\frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}\right)=X, \\ y''(v^2-T)+y'\left(\frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}\right)=Y, \\ z''(v^2-T)+z'\left(\frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}\right)=Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage für unsere Untersuchung.

2. Wir betrachten zuerst den singulären Fall der geradlinigen Bewegung und nehmen als x-Axe die Bahn. Dann ist $y=0$, $z=0$, $x=\sigma=\vartheta+s$, $x'=1$, $x''=0$. Mithin folgt aus den beiden unteren Gleichungen I) $Y=0$ und $Z=0$, d. h. die angreifenden Kräfte müssen auch in die Richtung der x-Axe fallen, wie selbstverständlich. Die erste Gleichung I) aber wird

$$\text{II)} \qquad \frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}=X.$$

Wenn nun die Kraft $X\,ds$ allein von der Lage abhängt, so können wir setzen $X=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x)$, so dass $F(x)\,ds$ das Potential der Kraft bedeutet. $\frac{dv}{dt}$ ist unabhängig von s, da alle Punkte der Kette gleiche absolute Beschleunigung haben. Multipliciren wir die Gleichung II) mit ds und integriren zunächst zwischen s_1 und s_2, dann zwischen s_1 und s, so kommt

$$\text{III)} \quad \begin{cases} (s_2-s_1)\dfrac{dv}{dt} = (T_2-T_1)+F(\vartheta+s_2)-F(\vartheta+s_1) = T_2-T_1+F(x_2)-F(x_1). \\ (s-s_1)\dfrac{dv}{dt} = (T-T_1)+F(\vartheta+s)-F(\vartheta+s_1) = T-T_1+F(x)-F(x_1), \end{cases}$$

Sind nun die Spannungen in den beiden Endpunkten beliebig gegebene Functionen von t, so wird die Bewegung bei gegebenen Anfangszuständen durch die erste dieser Gleichungen bestimmt und die Spannung T im Punkte B durch die zweite.

Ist das Kettenstück frei, so sind die Spannungen in den Endpunkten Null, und man erhält einfacher

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} (s_2-s_1)\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = F(\vartheta+s_2)-F(\vartheta+s_1), \\ (s-s_1)\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = F(\vartheta+s) - F(\vartheta+s_1)+T. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}$ erhält man noch für die Spannung den Ausdruck

$$\text{V)} \qquad T = \frac{s-s_1}{s_2-s_1}F(\vartheta+s_2)+\frac{s_2-s}{s_2-s_1}F(\vartheta+s_1)-F(\vartheta+s),$$

welcher nur von der Lage der Kette und des betrachteten Elementes abhängt.

Als Beispiel für solche Bewegung eines freien Kettenstückes wählen wir zunächst *a)* den Fall, dass keine äusseren Kräfte vorhanden sind. Alsdann ist $X=0$, also F constant und $\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2}=0$, $T=0$, d. h. die Bewegung ist gleichförmig, die Spannung Null.

b) Ist zweitens die Kraft constant, etwa $X=-g$, so können wir setzen $F=-g(\vartheta+s)$ und erhalten

$$(s_2-s_1)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g(s_2-s_1) \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g,$$

und

$$T = -\frac{s-s_1}{s_2-s_1}(\vartheta+s_2)g - \frac{s_2-s}{s_2-s_1}(\vartheta+s_1)g+(\vartheta+s)g = 0.$$

Die Bewegung ist gleichförmig beschleunigt, die Beschleunigung $-g$, die Spannung ist Null.

c) Ist endlich die Kraft eine Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung vom Anfangspunkte, also $X=-\dfrac{K}{x^2}$, so können wir setzen $F=\dfrac{K}{x}=\dfrac{K}{\vartheta+s}$. Wir wählen ferner $s_1=-l$, $s_2=+l$, d. h. wir nehmen ϑ zur Abscisse des Mittelpunktes einer geradlinigen freien Kette von der Länge $2l$, so ist

$$2l\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = K\left(\frac{1}{\vartheta+l}-\frac{1}{\vartheta-l}\right) = \frac{-2Kl}{\vartheta^2-l^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{K}{\vartheta^2-l^2}.$$

Hierdurch ist die Bewegung bestimmt. Die in bekannter Weise auszuführende Integration ergiebt, wenn für $t=0$ $\vartheta=\vartheta_0$ und $v=v_0$ ist,

$$v^2=\frac{K}{l}\,ln\left(\frac{\vartheta+l}{\vartheta-l}\right)\gamma,\quad\text{wo } ln\gamma=v_0^2-\frac{K}{l}\,ln\frac{\vartheta_0+l}{\vartheta_0-l}\text{ ist,}$$

mithin

$$t=\sqrt{\frac{l}{K}}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{ln\frac{\gamma(\vartheta+l)}{\vartheta-l}}}$$

oder auch, wenn man v als unabhängige Variable wählt,

$$\vartheta=l\left[1+\frac{2\gamma}{e^{\frac{lv^2}{K}}-\gamma}\right];$$

$$t=\int_{v=v_0}^{v=v}\frac{d\vartheta}{v}=\frac{4\gamma l^2}{K}\int_{v_0}^{v}\frac{e^{\frac{lv^2}{K}}dv}{\left(e^{\frac{lv^2}{K}}-\gamma\right)^2}.$$

Für die Spannung findet man

$$T=\frac{l+s}{2l}\,\frac{K}{\vartheta+l}+\frac{l-s}{2l}\,\frac{K}{\vartheta-l}-\frac{K}{\vartheta+s}\quad\text{oder}\quad T=\frac{K}{\vartheta+s}\,\frac{l^2-s^2}{\vartheta^2-l^2}.$$

3. Wir wenden uns nun zu dem Falle, wo die Bahn gekrümmt ist. Dann sind x', y', z' die Richtungscosinus der Tangente, $\varrho=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}$ der Krümmungsradius, $x''\varrho$, $y''\varrho$, $z''\varrho$ die Richtungscosinus der Hauptnormale, $(y'z''-z'y'')\varrho$, $(z'x''-x'z'')\varrho$, $(x'y''-y'x'')\varrho$ die der Binormale, und es ergeben sich aus den Gleichungen I) in bekannter Weise die Gleichungen

$$\frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}=Xx'+Yy'+Zz'.$$
$$(v^2-T)=(Xx''+Yy''+Zz'')\varrho^2,$$
$$0=X(y'z''-z'y'')+Y(z'x''-x'z'')+Z(x'y''-y'x''),$$

Nennen wir α, β, γ die drei Winkel, welche die Angriffslinie von P mit der Tangente, der Hauptnormale und der Binormale der Bahn bildet, so können diese Gleichungen geschrieben werden

$$\text{VI)}\qquad\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}-\dfrac{\partial T}{\partial s}=P\cos\alpha,\\[2mm]\dfrac{v^2-T}{\varrho}=P\cos\beta,\\[2mm]0=P\cos\gamma.\end{cases}$$

Die letzte dieser Gleichungen sagt aus, dass die Angriffslinie der Kraft P, wenn diese nicht Null ist, in die Schmiegungsebene der Bahn fallen muss. In diesem Falle wird $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, und die beiden anderen Gleichungen können geschrieben werden:

$$\text{VI}')\qquad \frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}=P\cos\alpha,\quad \frac{v^2-T}{\varrho}=P\sin\alpha,$$

oder auch, wenn wir den Krümmungswinkel mit τ bezeichnen,

$$\frac{dv}{dt}ds=P\cos\alpha.ds+\partial T,\quad \frac{v^2}{\varrho}ds=P\sin\alpha.ds+T\,d\tau.$$

Soll sich also eine Kette in einer Curve bewegen, so ist die Schwungkraft $\frac{v^2}{\varrho}ds$ zusammengesetzt aus der Normalcomponente der äusseren Kraft $P\sin\alpha\,ds$ und der Componente $T\,d\tau$, beide in der Richtung der Hauptnormale wirkend. Die Tangentialkraft $\frac{dv}{dt}ds$ ist zusammengesetzt aus der Tangentialcomponente der äusseren Kraft $P\cos\alpha\,ds$ und dem Differential der Spannung.

Auch hier betrachten wir zuerst den Fall, dass keine äusseren Kräfte vorhanden sind. Dann ist die dritte der Gleichungen VI) durch jede Curve identisch erfüllt, und die beiden anderen werden

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial T}{\partial s},\quad v^2=T.$$

Da v unabhängig von s ist, so ist, wie die zweite dieser Gleichungen zeigt, auch T unabhängig von s, also ist $\frac{\partial T}{\partial s}=0$, mithin nach der ersten Gleichung auch $\frac{dv}{dt}=0$, d. h. v constant $=c$, $T=c^2$, ebenfalls constant.

Hat also eine Kette, auf welche keine äusseren Kräfte wirken, die Gestalt einer bis auf die zweiten Ableitungen stetigen, sonst aber beliebigen Curve, und ertheilt man jedem Element dieselbe absolute Geschwindigkeit c in der Richtung der Tangente, so bewegt sich die Kette mit dieser Geschwindigkeit in der Curve weiter, und die Spannung ist überall gleich c^2. Ist die Kette geschlossen, so hat man weiter keine äusseren Spannungen anzubringen; handelt es sich aber um eine begrenzte offene Kette, so muss in beiden Endpunkten die Spannung von der Grösse c^2 durch passende Vorrichtungen erhalten werden.

Würde z. B. eine Kette von einer Rolle mit constanter Geschwindigkeit abgerollt und auf eine andere Rolle mit gleicher Geschwindigkeit aufgerollt, so würde, falls keine äusseren Kräfte wirken, der freie Theil immer dieselbe Gestalt behalten können, da die Spannungen in beiden Endpunkten durch die Reibung entwickelt werden könnten.

Wenn die äusseren Kräfte nach Grösse und Richtung constant sind, so ist die relative Bewegung um den Schwerpunkt dieselbe, wie wenn keine äusseren Kräfte vorhanden wären. Dies ist z. B. bei der Schwerkraft der Fall, wenn g als constant angenommen wird. Eine geschlossene schwere Kette kann also so geworfen werden, dass der Schwerpunkt eine Parabel beschreibt, und die Kette sich selbst relativ gegen den Schwerpunkt mit irgend einer constanten Geschwindigkeit c in der durch die Anfangslage bestimmten Curve bewegt.

4. Wir gehen nun zu dem Falle über, dass äussere Kräfte vorhanden sind. Dann muss die Curve, wie wir gesehen haben, so beschaffen sein, dass die Angriffslinie der äusseren Kraft für jedes Element in die Schmiegungsebene fällt. Ausserdem müssen die beiden Bedingungen erfüllt sein

$$\text{VI}')\qquad \frac{dv}{dt}-\frac{\partial T}{\partial s}=P\cos\alpha,\quad v^2-T=\varrho\, P\sin\alpha.$$

Es ist nun ein wesentlicher Unterschied vorhanden, je nachdem die äusseren Kräfte nur von der Lage des Elementes abhängen, wie z. B. Schwerkraft, Gravitation u. dergl., vielleicht auch von der Richtung der Tangente und Hauptnormale der Bahn, wie dies der Fall ist, wenn die Kette gezwungen ist, sich auf einer festen Fläche oder Curve zu bewegen, — oder ob sie ausserdem die Zeit enthalten. Wir beschränken uns im Folgenden auf die zuerst genannten Fälle und nehmen zunächst an, dass die Kette im Raume frei beweglich ist.

Bei jeder wirklichen Bewegung können wir dann ϱ, $P\sin\alpha$ und $P\cos\alpha$ als Functionen von $\sigma=s+\vartheta$ ansehen, und wenn wir die Ableitungen nach σ wieder durch Accente bezeichnen, so folgt durch partielles Differenziren der zweiten Gleichung VI') nach s

$$-\frac{\partial T}{\partial s}=[\varrho\, P\sin\alpha]'.$$

Mithin wird die erste Gleichung VI'')

$$\text{VII})\qquad \frac{dv}{dt}=P\cos\alpha-[\varrho\, P\sin\alpha]'.$$

Die linke Seite dieser Gleichung $\frac{dv}{dt}$ ist unabhängig von s, also auch die rechte. Mithin kann die rechte Seite, da sie s nur in der Verbindung $s+\vartheta=\sigma$ enthält, auch nicht abhängig von σ sein, also sind beide Seiten constant, und wir können, indem wir diese Constante mit b bezeichnen, diese zweite Gleichung durch zwei Gleichungen ersetzen. Es ist zunächst

$$\text{VIII})\qquad P\cos\alpha-[\varrho\, P\sin\alpha]'=b.$$

Durch diese Differentialgleichung wird bei gegebener Kraft P unter Hinzunahme der die Schmiegungsebene betreffenden Bedingung eine Classe von Curven bestimmt, auf denen sich die Bewegung vollziehen kann. Es ist aber auch

$$\text{IX})\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=b,$$

d. h.: die Bewegung ist tangential gleichförmig beschleunigt.

Die Spannung T ergiebt sich schliesslich:

X) $$T = v^2 - \varrho P \sin\alpha.$$

Umgekehrt bewegt sich die Kette unter dem Einfluss der gegebenen äusseren Kräfte in jeder, den aufgestellten Bedingungen entsprechenden Bahn mit der tangentialen Beschleunigung b, vorausgesetzt, dass die Anfangszustände und die Spannungen in den Endpunkten ebenfalls den Bedingungen gemäss bestimmt werden.

Unter den verschiedenen Werthen von b ist der Werth $b=0$ besonders ausgezeichnet. Auf den durch sie bestimmten Curven bewegt sich die Kette bei passend gewählten Anfangszuständen und unter Aufrechterhaltung der Spannungen in den Enden mit beliebiger constanter Geschwindigkeit. Da diese Geschwindigkeit auch Null sein kann, so sind diese Curven auch die Gleichgewichtslagen der Kette für das gegebene Kräftesystem.

Umgekehrt stellt jede solche Gleichgewichtslage zugleich auch die Bahn für eine mit constanter Geschwindigkeit bewegte Kette dar.

Für die weitere Untersuchung sind nun specielle Annahmen über die gegebenen Kräfte erforderlich.

5. Wir nehmen zunächst eine nach Grösse und Richtung constante Kraft an, und zwar setzen wir $X=0$, $Y=-g$, $Z=0$ und $b=\beta g$. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Schwerkraft wirkt, wie wir auch der kürzeren Ausdrucksweise wegen in der Folge annehmen wollen. Da die Schmiegungsebene parallel der y-Axe sein muss, so muss die Curve ganz in eine Ebene parallel der y-Axe fallen, und bei passender Wahl der Axenrichtungen können wir diese Ebene selbst als xy-Ebene nehmen. Bedeutet ferner τ den Richtungswinkel der Tangente gegen die x-Axe, so ist $\alpha = -\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)$, also $\cos\alpha = -\sin\tau$, $\sin\alpha = -\cos\tau$, und die Gleichung VIII) wird

$$-\sin\tau + (\varrho\cos\tau)' = \beta,$$

also

$$\frac{d\varrho}{\varrho\, d\tau} = \frac{2\sin\tau}{\cos\tau} + \frac{\beta}{\cos\tau}.$$

Nach Ausführung der Integration ergiebt sich, wenn die Integrationsconstante mit h bezeichnet wird,

XI) $$\varrho = \frac{h}{\cos\tau^2}\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)^{\frac{\beta}{2}},$$

also

XII) $$\left\{\begin{aligned} &ds = h\frac{d\tau}{\cos\tau^2}\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)^{\frac{\beta}{2}}, \quad dx = \frac{h\, d\tau}{\cos\tau}\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)^{\frac{\beta}{2}}, \\ &dy = h\frac{\sin\tau\, d\tau}{\cos\tau^2}\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)^{\frac{\beta}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Führen wir in diese Differentiale die Variable $u = \left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$ ein, so wird

$$dx = h u^{\beta-1}\,du, \quad dy = \frac{h}{2}(u^{\beta} - u^{\beta-2})\,du, \quad ds = \frac{h}{2}(u^{\beta} + u^{\beta-2})\,du.$$

Wir wählen nun den Coordinatenanfang in dem Punkte der Curve, für welchen $\tau = 0$, also $u = 1$ ist, und zählen auch die Bogen von diesem Punkte aus. Dann ergiebt die Integration

$$\text{XIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} & x = h\left(\frac{u^{\beta}-1}{\beta}\right), \quad y = \frac{h}{2}\left[\frac{u^{\beta+1}-1}{\beta+1} - \frac{u^{\beta-1}-1}{\beta-1}\right], \\ & s = \frac{h}{2}\left[\frac{u^{\beta+1}-1}{\beta+1} + \frac{u^{\beta-1}-1}{\beta-1}\right]. \end{aligned} \right.$$

Die Brüche von der Form $\frac{u^{\gamma}-1}{\gamma} = \int_1^u u^{\gamma-1}\,du$ nehmen für $\gamma = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ an, ergeben aber als Grenzwerth den Werth des Integrals, nämlich $l n u$, so dass die Formeln XIII) in gewissem Sinne alle Fälle umfassen; indessen kommen in folgenden Fällen logarithmische Glieder vor: für $\beta = 0$, wo $x = h\,l n u$, und für $\beta = \pm 1$, wo das erste resp. zweite Glied der Klammer in den Ausdrücken für y und s gleich $l n u$ ist. In allen anderen Fällen sind die Ausdrücke sämmtlich algebraisch.

Endlich ergiebt sich noch

$$\text{XIV)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \varrho = \frac{h}{4}(u^2+1)^2 u^{\beta-2} \\ & \text{und} \\ & T = v^2 + \frac{gh}{\cos\tau}\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)^{\frac{\beta}{2}} = v^2 + \frac{gh}{2}(u^{\beta+1} + u^{\beta-1}). \end{aligned} \right.$$

Es sind somit alle in Betracht kommenden Grössen durch u ausgedrückt. Es hat auch keine Schwierigkeit, alle Grössen als Functionen von x darzustellen, worauf wir nicht weiter einzugehen brauchen.

Ueber die Gestalt der erhaltenen Curven erkennt man Folgendes. Ist $\beta = 0$, also auch die Beschleunigung b gleich Null, so hat man die gewöhnliche Kettenlinie, wie dies schon aus der allgemeinen Discussion hervorgeht. Der Coordinatenanfang ist der Scheitel. Wählt man die Integrationsconstante h positiv, so ist die Kettenlinie in der gewöhnlichen Lage, mit positiven Ordinaten. Für negatives h erscheint statt dessen dieselbe Curve, aber um die Scheiteltangente herumgeklappt, wie sie beim Gleichgewichtspolygon als Drucklinie bezeichnet wird. Während aber im Falle des Gleichgewichts hier die Spannung überall negativ ist, kann für eine mit hinlänglich grosser constanter Geschwindigkeit $v = c$ in sich selbst bewegte Kette die Spannung für eine beliebige Strecke zu beiden Seiten des Scheitels positiv gemacht werden, wie dies für eine praktische Realisirung der Bewegung mit gewöhnlichen Ketten nöthig ist.

Ist b von Null verschieden, so wollen wir zunächst b, also auch β, und h als positiv annehmen. Durchläuft τ nun alle Werthe von Null bis $+\frac{\pi}{2}$, so geht u von 1 bis $+\infty$, x, y und s gehen von Null bis $+\infty$, die Curve geht also ohne Asymptote (parabolisch) parallel der y-Axe ins positiv Unendliche. Durchläuft andererseits τ rückwärts die Werthe von Null bis $-\frac{\pi}{2}$, so geht u von 1 bis Null, x von Null bis $-\frac{h}{\beta}$. Doch sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich $\beta \leqq 1$, also $b \leqq g$, so wird y positiv und s negativ unendlich (für $\beta = 1$ logarithmisch, sonst algebraisch). Die Curve hat alsdann, rückwärts verfolgt, die Gerade $x = -\frac{h}{\beta}$ zur Asymptote. Die Spannung wird im Punkte $\tau = -\frac{\pi}{2}$ für $\beta = +1$ gleich $v^2 + \frac{gh}{2}$, für $\beta < 1$ wird sie unendlich; der Krümmungsradius wird im Punkte $\tau = -\frac{\pi}{2}$ stets unendlich. Ist aber $\beta > 1$, so wird für $\tau = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{h}{\beta^2 - 1}$ und $s = -\frac{h\beta}{\beta^2 - 1}$. Die Curve hat also die Gerade $x = -\frac{h}{\beta}$ zur Tangente und die Ordinate des Berührungspunktes C, bis zu welchem wir sie zunächst nur verfolgen können, ist $\frac{h}{\beta^2 - 1}$. Die Spannung im Punkte C ist ebenfalls endlich und zwar gleich v^2. Der Krümmungsradius ist im Puncte C unendlich, wenn $\beta < 2$; gleich $\frac{h}{4}$, wenn $\beta = 2$, und Null, wenn $\beta > 2$ ist. Wir wollen nun beliebige Werthe von h zulassen, ohne β zu ändern. Zwei verschiedenen Werthen h und h_1, entsprechen zwei ähnliche und ähnlich liegende Curven, welche bei unserer Wahl der Constanten den Coordinatenanfang O zum Aehnlichkeitspunkte haben. Ist das Aehnlichkeitsverhältniss $h_1 : h$ positiv, so ist der Punkt O äusserer Aehnlichkeitspunkt; ist $h_1 : h$ negativ, so ist er innerer. Die Curven mit negativem h sind also nach der Richtung der negativen Ordinaten (nach unten) concav. Auch das zweite Glied des Ausdrucks für die Spannung wechselt mit h zugleich das Vorzeichen. Da aber für diese Curve der Bogen s auch negativ erscheint, so ist die Richtung der Beschleunigung b nicht etwa die der wachsenden τ, sondern die der abnehmenden. Während also auf den nach oben concaven Curven die Beschleunigung nach dem parabolischen Aste hin gerichtet ist, ist sie auf den nach unten concaven Curven entgegengesetzt gerichtet, d. h. von dem parabolischen Ast rückwärts, nach dem asymptotischen Ast oder nach dem Punkt C zu gerichtet. Ersetzt man endlich, ohne h zu ändern, β durch $-\beta$ und gleichzeitig τ durch $\pi - \tau$, so bleiben die Gleichungen XII) ungeändert, und wir erhalten eine zur ersten Curve in Bezug auf die y-Axe symmetrische Curve, auf welcher die Beschleunigungsrichtung nach demselben Gesetz bestimmt ist wie vorher. Da die Wahl des Anfangspunktes eine beliebige ist, so können wir, um sämmtliche Curven zu erhalten, auf welchen sich die Kette bewegen kann, so verfahren, dass wir uns zunächst mit einem beliebigen Maassstab, der durch $+h$ bestimmt ist, und dem zu Grunde gelegten, ebenfalls beliebigen $+\beta$ die zuerst besprochene Curve construiren, ebenso ihr Spiegelbild gegen die y-Axe $(+h, -\beta)$ und die Spiegelbilder beider gegen die x-Axe $(-h, -\beta)$, $(-h, +\beta)$, und dann jede dieser Curven durch Parallelverschiebung im Raume beliebig verlegen. Die Richtung der Beschleunigung ist bei den nach oben concaven Curven die des parabolischen Astes, bei den nach unten concaven die entgegengesetzte. Ist $\beta^2 \overline{\overline{<}} 1$, so kommt für einen bestimmten Bewegungsvorgang nur eine, und zwar eine ganz beliebige dieser Curven als Bahn in Betracht; dieselbe hat einen parabolischen und einen asymptotischen Ast und ist entweder stets nach unten oder stets nach oben concav. Ist aber $\beta^2 > 1$, so würde jede einzelne Curve im Punkte C aufhören; die Bahn aber lässt sich alsdann über diesen Punkt C fortgesetzt denken, und zwar durch eine Curve, welche demselben Werthe von β^2, jedoch einem Werthe h_1 entspricht, der das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie h, aber ganz beliebigen absoluten Werth; jede der beiden Curven $(+h, \pm\beta)$ kann also im Punkte C fortgesetzt werden durch eine der beiden Curven $(-h_1, \pm\beta)$, so dass der ganze Linienzug im Allgemeinen aus zwei verschiedenen particulären Integralen sich zusammensetzt. Von den beiden Aesten, die in C zusammenhängen, ist der eine nach unten, der andere nach oben concav, beide gehen parabolisch ins Unendliche und bilden zusammen entweder in C einen Wendepunkt $(+h, +\beta)$ und $(-h_1, +\beta)$, oder nicht. Im letzteren Falle entsteht eine Schleife $(+h, +\beta)$, $(-h_1, -\beta)$. Diese Fortsetzung ist deshalb möglich, weil alsdann die Richtung und Grösse der Tangentialbeschleunigung für den ganzen Linienzug dieselbe bleibt, und auch die Spannung, welche in C — und nur in C — unabhängig von h gleich v^2 ist, auf dem ganzen Linienzuge sich stetig ändert. Eine anderweite Zusammensetzung zweier particulären Integrale ist ausgeschlossen. Wählt man speciell $h_1 = h$, so besteht der ganze Linienzug aus zwei congruenten Theilen und hat entweder C zum Mittelpunkt, oder die Horizontale durch C zur Symmetrieaxe.

Im Allgemeinen ist β irrational. Wenn β eine rationale Zahl ist, mit Ausnahme von 0, $+1$ und -1, so wird die Curve eine algebraische im engeren Sinne, und für ganzzahlige Werthe von β (mit denselben Ausnahmen) wird die Curve eine sogenannte rationale Curve. Ist z. B. $\beta = 2$ und setzt man $x + \frac{h}{2} = x_1$, $y - \frac{h}{3} = y_1$, so dass x_1, y_1 die Coordinaten in Bezug auf ein System sind, dessen Anfangspunkt in C liegt; setzt man endlich $h = 2c$, so wird

$$x_1 = cu^2, \quad y_1 = c\left(\frac{u^3}{3} - u\right),$$

woraus folgt

$$y_1 = \frac{x_1 - 3c}{3}\sqrt{\frac{x_1}{c}}, \quad y_1^2 = \left(\frac{x_1 - 3c}{3}\right)^2 \frac{x_1}{c}.$$

Diese Curve besteht aus einer Schleife, sie setzt sich also, algebraisch betrachtet, über den Verzweigungspunkt reell fort, wie dies bei rationalen Werthen von $\beta > 1$ überhaupt eintreten wird, und zwar werden die Curven, wenn man sie in der gewöhnlichen Form darstellt, im Punkte C im Allgemeinen Selbstberührungen haben, wenn sie irreducibel sind, in gewissen Fällen aber auch in zwei symmetrische Curven zerfallen, welche in dem Punkte C Wendepunktespitzen bilden, oder welche schleifenförmig sind und sich in ihren Scheiteln von aussen berühren. Die mechanische Fortsetzung der Bewegung über C hinaus braucht aber nicht mit dieser algebraischen zusammenzufallen, sondern kann so, wie es oben auseinandergesetzt ist, geschehen.

Man kann die hier betrachteten Bewegungsvorgänge in gewissen Fällen annähernd realisiren, indem man eine geschlossene Kette über eine Rolle mit horizontaler Axe legt, deren Umfang kleiner als die ganze Länge der Kette, aber nicht allzuklein gewählt werden möge (etwa halb so gross), so dass in der Ruhelage der untere Theil der Kette die Gestalt einer Kettenlinie annimmt. Versetzt man nun die Rolle in gleichförmige Rotation, so wird, wenn hinreichende Reibung zwischen Rolle und Kette vorhanden ist, die Kette mitbewegt, und nach einigen Schwankungen wird die bewegte Kette genau dieselbe Form zeigen, wie vorher die ruhende. Die Spannung in den beiden Endpunkten des freien Theiles wird nämlich durch Mitwirkung der Reibung — und zwar Reibung während der Ruhe — aufrecht erhalten, und die Schwankungen werden durch den Einfluss der Luft beseitigt, da jedenfalls, wenn die Kette sich in sich selbst bewegt, der gesammte Luftwiderstand so gering wie möglich ist.

Versetzt man die Rolle in eine gleichförmig beschleunigte Rotation, was angenähert durch ein Gewicht geschehen kann, welches an einem Faden hängt, der an der Welle der Rolle befestigt und hinlänglich oft darum geschlungen ist, so wird die bewegte Kette wieder nach einigen Schwankungen als Ganzes eine bestimmte Form zeigen, die aber unsymmetrisch ist, und zwar wird der tiefste Punkt von der Mitte in entgegengesetzter Richtung der Beschleunigung zurückweichen, um so mehr, je grösser die Beschleunigung b ist.

Ist die Beschleunigung der Kette grösser als g, so wird der freie Theil sogar in einem Punkte C eine verticale Tangente erhalten, und dieser Punkt ist dann ein Verzweigungspunkt, so dass die beiden dort zusammenhängenden Curven verschiedenen Constanten h und $-h_1$ entsprechen. Je grösser die Beschleunigung ist, desto höher rückt der Punkt C und desto grösser wird $\frac{h}{h_1}$; bei einer gewissen Grösse von b wird $\frac{h}{h_1} = 1$ und die Curve wird symmetrisch, so dass C auf gleicher Höhe mit der Axe der Rolle liegt; bei noch weiterer Vergrösserung von b würde C sogar über der Axe der Rolle liegen. Doch würde es schwer sein, diese Fälle, wo b sehr gross ist, zu realisiren, weil die beschleunigte Bewegung jedenfalls längere Zeit andauern müsste, bis sich die unveränderte Gestalt der Kette herstellt. Bei jeder gewählten Beschleunigung existirt noch eine Gestalt der Kette, die zu der zuerst besprochenen bei gleichem Drehungssinn symmetrisch ist in Bezug auf die durch die Axe der Rolle gelegte Horizontale. Eine Bewegung in dieser würde sich aber auf diese Weise nicht realisiren lassen, weil die Wechselwirkung zwischen Rolle und Kette (Normaldruck und Reibung) dann nicht im Stande wäre, die erforderlichen Kräfte hervorzubringen. Auch würden dazu sehr grosse Geschwindigkeiten erforderlich sein.

6. Wir wollen schliesslich noch für die frei bewegliche Kette die Voraussetzung machen, dass die äussere Kraft P eine centrale und ihre Grösse eine Function der Entfernung r ist. Das Potential der Beschleunigung sei $F(r)$, also die beschleunigende Kraft P gleich $\frac{dF(r)}{dr} = f(r)$. Ein positiver Werth von $f(r)$ bedeute eine Abstossung. Da die Schmiegungsebene die Angriffslinie der Kraft in sich enthalten muss, so ist die Curve eine ebene, und ihre Ebene geht durch das Centrum. Führen wir dann Polarcoordinaten ein und bezeichnen wir den Winkel α mit ψ, so sind die Tangential- und die Normalcomponente von P

$$f(r)\cos\psi \text{ und } -f(r)\sin\psi.$$

Die Gleichung VIII) wird also, wenn wir wieder die Differentiationen nach s durch Accente bezeichnen,

$$f(r)\cos\psi + (\varrho f(r)\sin\psi)' = b,$$

und es ist $\sin\psi = r\varphi'$, $\cos\psi = r'$, also $\psi = \arccos r'$, der Richtungswinkel $\tau = \varphi + \psi$, mithin

$$\frac{1}{\varrho} = \tau' = \varphi' + \psi' = \frac{\sqrt{1-r'^2}}{r} - \frac{r''}{\sqrt{1-r'^2}}, \text{ also } \varrho = \frac{r\sqrt{1-r'^2}}{1-r'^2-rr''}.$$

Setzen wir diese Werthe in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\text{XV)} \qquad f(r)r' + \left(f(r)\frac{r(1-r'^2)}{1-r'^2-rr''}\right)' = b,$$

eine Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen r und s, deren einmalige Integration liefert

$$\text{XVI)} \qquad F(r) + f(r)\frac{r(1-r'^2)}{1-r'^2-rr''} = bs + C.$$

Die weitere Integration scheint im Allgemeinen schwierig zu sein. Nehmen wir aber $b=0$, suchen wir also diejenigen Bahnen, auf welchen sich die Kette gleichförmig bewegen kann, und die zugleich auch die Gleichgewichtslagen darstellen, so ergiebt sich aus XVI)

$$\frac{r''}{1-r'^2} = \frac{1}{r} - \frac{\frac{dF(r)}{dr}}{C-F(r)},$$

oder nach Multiplication mit r'

$$\frac{r'r''}{1-r'^2} = \frac{r'}{r} - \frac{F'}{C-F}.$$

Nach Ausführung der Integration und kleinen Umformungen kommt

$$\sqrt{1-r'^2} = \frac{a}{r(C-F(r))},$$

also

$$r' = \frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2(C-F(r))^2}}, \text{ mithin } s = \int \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2(C-F(r))^2}}}.$$

Um zur Polargleichung zu gelangen, benutzen wir die Gleichung

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2, \text{ also } d\varphi^2 = \frac{dr^2}{r^2}\left(\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 - 1\right),$$

so dass wir erhalten

XVII) $$\varphi = a\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2(C-F(r))^2 - a^2}}.$$

Hiermit ist das Problem auf Quadraturen zurückgeführt.

Ist z. B. die Centralkraft die Newton'sche Attraction, also $f(r) = -\frac{K}{r^2}$, so können wir setzen $F(r) = \frac{K}{r}$, und wir erhalten als Polargleichung der Bahn

XVIII) $$\varphi = a\int \frac{dr}{r\sqrt{(Cr-K)^2 - a^2}},$$

ein Integral, welches sich ohne Schwierigkeit berechnen lässt, worauf wir hier nicht weiter eingehen, da das Problem des Gleichgewichtes der Kette für beliebige Centralkräfte, welche Functionen der Entfernung sind, bereits von Bernoulli gelöst ist. Es kam hier nur darauf an, zu zeigen, wie sich dasselbe aus unserem allgemeineren Problem ergiebt.

7. Wir haben bisher eine frei bewegliche Kette betrachtet. Wir gehen nun zu dem Falle über, dass die Kette gezwungen ist, sich auf einer festen Fläche zu bewegen, und zwar ohne Reibung. Es fragt sich wieder, unter welchen Bedingungen diese Bewegung in einer Bahn stattfinden kann. Wir bezeichnen den Winkel, den die Normale der Fläche mit der Hauptnormale bildet, mit ω, so dass sie mit der Binormale den Winkel $\frac{\pi}{2} - \omega$ bildet. Die in Richtung der Flächennormale wirkende Normalkraft, welche den Zwang hervorbringt, sei $N\,ds$. Dann tritt die Kraft $N\,ds$ zur äusseren Kraft $P\,ds$ hinzu, und die drei oben VI) aufgestellten Bedingungen werden:

XIX) $$\begin{cases} \frac{dv}{dt} - \frac{\partial T}{\partial s} = P\cos\alpha, \\ v^2 - T = \varrho(P\cos\beta + N\cos\omega), \\ 0 = (P\cos\gamma + N\sin\omega). \end{cases}$$

a) Wir nehmen zuerst den Fall, dass $\omega = 0$ ist. Dann fällt die Hauptnormale der Curve mit der Flächennormale zusammen. Die Bahn ist also eine geodätische Linie der Fläche. Soll die Bewegung in einer solchen

Bahn vor sich gehen, so muss $P\cos\gamma = 0$ sein, d. h. die äussere Kraft muss, wenn sie nicht Null ist, in die Schmiegungsebene der Bahn fallen. Die weiteren Schlüsse sind ganz dieselben wie in 2. Wir können die Grösse $P\cos\alpha$, wenn die Kraft P gegeben ist und nur von der Lage abhängt, als Function von $\sigma = \vartheta + s$ auffassen, wo σ den Bogen der Bahn bedeutet. Multipliciren wir die erste Gleichung mit ds und integriren zuerst zwischen s_1 und s_2, dann zwischen s_1 und s, so ergiebt sich

$$(s_2 - s_1)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = T_2 - T_1 + \int_{\vartheta+s_1}^{\vartheta+s_2} P\cos\alpha\, d\sigma.$$

$$(s - s_1)\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = T - T_1 + \int_{\vartheta+s_1}^{\vartheta+s} P\cos\alpha\, d\sigma,$$

Sind die Spannungen in den beiden Endpunkten als beliebige Functionen der Zeit gegeben, so bestimmt die letzte dieser Gleichungen ϑ als Function von t und somit die vorhergehende die Spannung T an einer beliebigen Stelle der Kette. Der Zwang $N ds$ ergiebt sich aus der zweiten Gleichung, nämlich

$$N = \frac{v^2 - T}{\varrho} - P\cos\beta.$$

Ist die Kette in ihren Endpunkten frei, so sind T_1 und $T_2 = 0$.

Dieser Fall zeigt, obwohl die Bedingungsgleichungen zunächst eine andere Form haben, wie in 2, doch sonst vollständige Analogie mit dem dort behandelten Falle der geradlinigen Bewegung einer frei beweglichen Kette, nur dass die Angriffslinie der äusseren Kraft weniger beschränkt ist. [Man vergl. die Formeln II) und III).]

b) Wir nehmen ferner an, die Bahn habe geodätische Krümmung, so dass ω von Null verschieden ist. Ist dann $P = 0$, so ist nach der dritten Gleichung XIX) auch $N = 0$, und die beiden anderen Bedingungen werden $\frac{dv}{dt} - \frac{\partial T}{\partial s} = 0$, $v^2 - T = 0$. Wir sind also auf den in 3 bereits behandelten Fall zurückgeführt. Die Kette bewegt sich auf einer beliebigen Curve der Fläche mit constanter Geschwindigkeit c. Die Spannung ist überall gleich c^2. Da die Zwangskraft Null ist, so ist es so gut, als wäre die Kette vollkommen frei beweglich. Natürlich würde die Bewegung dieselbe sein können, wenn äussere Kräfte vorhanden wären, welche normal zur gegebenen Fläche gerichtet sind; denn dies würde nur die Grösse der Zwangskräfte ändern. Dieser Fall träte z. B. ein, wenn die äusseren Kräfte ein Potential hätten und die Fläche Niveaufläche für dasselbe wäre.

Wir betrachten endlich allgemein den Fall, dass P von Null verschieden ist. Alsdann folgt aus der letzten Gleichung XII)

$$N = -\frac{P\cos\gamma}{\sin\omega}.$$

Es bleiben also die Gleichungen zu erfüllen

$$\text{XX)}\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial s} = P\cos\alpha, \\ v^2 - T \;= \varrho\, P(\cos\beta - \cos\gamma\, ctg\,\omega). \end{cases}$$

Da wir bei jeder wirklichen Bewegung, wenn die Kraft P nur von der Lage abhängt, ϱ, P, α, β, γ, ω als Functionen von $\sigma = \vartheta + s$ ansehen können, so ist die weitere Entwickelung genau wie in 4, und wir erhalten

$$\text{XXI)}\qquad \frac{dv}{dt} = P\cos\alpha - [\varrho\, P(\cos\beta - \cos\gamma\, cotg\,\omega)]' = b,$$

wo b eine Constante bedeutet, die beliebig gewählt werden kann.

Die Differentialgleichung

$$\text{XXII)}\qquad P\cos\alpha - [\varrho\, P(\cos\beta - \cos\gamma\, ctg\,\omega)]' = b$$

bestimmt diejenigen Curven auf der gegebenen Fläche, welche unter Voraussetzung gegebener äusserer Kräfte und der gegebenen Constanten b Bahnen der Kette sein können, und in jeder derselben kann sich die Kette mit einer tangentialen Beschleunigung bewegen, deren algebraischer Werth gleich b ist. Die Spannung T wird schliesslich durch die zweite Gleichung XX) bestimmt. Ist $b = 0$, so erhält man die Gleichgewichts- (Ruhe-) Lagen der Kette, auf denen sich die Kette aber auch gleichförmig entlang bewegen kann. Dieses Problem hat vollständige Analogie mit dem unter 4 behandelten der frei beweglichen Kette, nur dass die Angriffslinie der Kraft P nicht in die Schmiegungsebene der Bahn zu fallen braucht, vielmehr beliebig sein kann. [Man vergleiche namentlich die Formeln VII) bis IX).]

Die Ermittelung der Gestalt der möglichen Bahnen erfordert die Integration der Gleichung XXII), welche selbst unter einfachen Annahmen über die äusseren Kräfte und über die Gestalt der Fläche sehr verwickelt wird, so dass es mir nicht gelungen ist, ein Beispiel dafür durchzuführen, ausser dem folgenden. Ist nämlich die gegebene Fläche eine Ebene, so ist $\omega = \frac{\pi}{2}$, also $cotg\,\omega = 0$. Ist ferner P nach Grösse und Richtung constant, wie bei der Schwere, so ist die Form der Gleichungen genau dieselbe, wie im Raume, wenn eine constante Kraft wirkt (siehe 5). Man erhält also für die schwere Kette auf der schiefen Ebene genau dieselben Bahnen, wie im Raume.

8. Es bleibt noch der Fall übrig, dass die Kette gezwungen ist, sich auf einer festen Curve ohne Reibung zu bewegen unter dem Einfluss gegebener äusserer Kräfte. Bezeichnet dann $N\,ds$ wieder die Grösse der auf das Element ds entsprechend der geometrischen Bedingung wirkenden Zwangskraft und ω den Winkel, den ihre Angriffslinie mit der Hauptnormale der Curve bildet, so gelten wieder die Gleichungen XIX). Die äusseren Kräfte sind keiner Bedingung unterworfen. Die erste Gleichung XIX) bestimmt, wenn die Endspannungen T_1 und T_2 gegeben sind, die Bewegung und die Spannung, genau so wie in 2 und 7a entwickelt ist; die beiden anderen Gleichungen aber bestimmen N und ω, also Grösse und Richtung des auf das

Element ds wirkenden Zwanges. Dieser Fall ist analog der Bewegung in den geodätischen Linien auf einer Fläche und der geradlinigen Bewegung im Raume.

9. Es ist wohl der Uebersicht wegen nicht unnütz, die allgemeinen Resultate unserer Untersuchung noch einmal zusammenzufassen:

Wenn auf eine homogene Kette, welche entweder α) frei im Raume oder β) ohne Reibung auf einer festen Fläche, oder γ) ebenso in einer festen Curve beweglich ist, gegebene äussere Kräfte wirken, welche nur von der Lage abhängen, und wenn die nöthige Spannung in den Endpunkten durch geeignete Vorrichtungen hervorgebracht wird, so kann eine Bewegung derselben in einer Bahn, d. h. so, dass successive jedes folgende Element in die Stelle des vorhergehenden rückt, nur in einer der folgenden Weisen vor sich gehen:

A. in jeder mit der Beweglichkeit verträglichen Kürzesten, also α) im Raume in einer Geraden, und zwar wenn die Angriffslinie der Kraft in diese Gerade fällt, β) auf einer Fläche in jeder geodätischen Linie, und zwar wenn die Angriffslinie der Kraft in die Schmiegungsebene fällt, γ) auf der festen Curve bei beliebig gegebenen Kräften. Die Endspannungen können hierbei noch als beliebige Functionen der Zeit gegeben sein und die tangentiale Beschleunigung kann sich hierbei nach den verschiedensten Gesetzen ändern;

B. in den Fällen α) und β) ausserdem in gewissen anderen, nicht kürzesten Linien, aber immer nur mit constanter tangentialer Beschleunigung b. Gestalt und Lage dieser Bahnen ist bei gegebenen äusseren Kräften von der Grösse der tangentialen Beschleunigung b abhängig, aber unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit. Die Spannung ist bei jeder Lage und Geschwindigkeit für jeden Punkt der Kette bestimmt. — In den Bahnen, für welche $b=0$ ist, kann die Kette sich gleichförmig bewegen oder ruhen. (Gleichgewichtslagen.)

C. Wenn keine äusseren Kräfte vorhanden sind, kann die Kette jede mit ihrer Bewegungsfreiheit verträgliche Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit c und constanter Spannung c^2 beschreiben.

Wird in den Fällen β) und γ) auch noch Reibung vorausgesetzt, so modificiren sich diese Gesetze. Im Falle γ) ist der Einfluss der Reibung leicht zu berücksichtigen, im Falle β) bedürfte es noch einer grundlegenden Feststellung über den Einfluss der Reibung bei krummliniger Bewegung auf Flächen. Deswegen soll hier auf die Betrachtung der Reibung nicht eingegangen werden.

Berlin, im Juli 1888.

XIX.

Kinematische Flächenerzeugung vermittelst cylindrischer Rollung.

Von

Prof. Dr. L. Burmester

in München.

Hierzu Taf. VII Fig. 1—6.

Die Kinematik führt zu mannigfachen Flächenerzeugungen, die selbst in den einfachsten Fällen noch nicht behandelt sind. Wir wollen deshalb in dieser Mittheilung die einfache kinematische Flächenerzeugung betrachten, welche sich vermittelst Rollung einer Kreiscylinderfläche an einer festen Kreiscylinderfläche ergiebt, und die daraus folgenden interessanten Beziehungen darlegen, um damit die Richtung für die Untersuchung der Flächenerzeugungen vermittelst allgemeinerer Bewegungsvorgänge zu kennzeichnen.

Normale Conoidflächen.

Nehmen wir in Fig. 1, Taf. VII, einen festen Kreis π_1 und einen in demselben rollenden Kreis p_1 an, dessen Durchmesser gleich dem Radius des Kreises π_1 ist, so bewegt sich jeder Punkt des rollenden Kreises p_1 auf einem Durchmesser des festen Kreises π_1, und jeder andere mit dem rollenden Kreise p_1 verbunden gedachte Punkt beschreibt eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt Φ_1 des festen Kreises π_1 ist. Wenn aber insbesondere der beschreibende Punkt der Mittelpunkt F_1 des rollenden Kreises p_1 ist, geht die Ellipse in den Kreis über, dessen Radius $\Phi_1 F_1$ ist.*

Betrachten wir die Kreise π_1 und p_1 als die Basiskreise zweier Kreiscylinderflächen Π und P, die auf der Grundrissebene senkrecht stehen, und nehmen wir an, dass die Kreiscylinderfläche P in der festen Kreiscylinderfläche Π rollt, dann beschreibt jeder Punkt der rollenden Kreiscylinderfläche P einen Durchmesser der festen Kreiscylinderfläche Π und jeder andere mit der rollenden Kreiscylinderfläche P verbunden gedachte Punkt beschreibt in einer zum Grundriss parallelen Ebene eine Ellipse, deren Mittelpunkt sich

* Vergl. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888. Bd. 1 S. 26.

auf der Axe $\Phi\Phi'$ der festen Kreiscylinderfläche Π befindet.* Für jeden beschreibenden Punkt, welcher in der Axe FF' der rollenden Kreiscylinderfläche P liegt, geht die elliptische Bahn in einen Kreis über.

Ist in Fig. 1 eine beliebige, ebene oder räumliche Curve ξ durch ihre Projectionen ξ_1, ξ_2 im Aufriss und Grundriss gegeben, und erzeugen wir eine normale Conoidfläche $\mathfrak{C}$ durch eine an der Curve ξ und an der Axe $\Phi\Phi'$ senkrecht entlang gleitende Gerade, deren Lagen α, β, γ, ... sind, so bildet diese normale Conoidfläche $\mathfrak{C}$ mit den Kreiscylinderflächen Π, P die Schnittcurven π, p. Bei der Rollung der Kreiscylinderfläche P in der festen Kreiscylinderfläche Π rollt demnach die Curve p auf der festen Curve π, und die auf den Mantellinien α, β, γ, ... der Conoidfläche liegenden Punkte A, B, C, ... der Curve p durchlaufen auf diesen Mantellinien die Durchmesser der festen Kreiscylinderfläche Π. Hiernach wird durch die auf der rollenden Kreiscylinderfläche P liegende Curve p der Theil der Conoidfläche $\mathfrak{C}$ erzeugt, der sich innerhalb der festen Kreiscylinderfläche Π befindet. Diesen Theil der Conoidfläche, für den die Curve π die Begrenzungscurve ist, können wir durch Vergrösserung des Basiskreises π_1 der Kreiscylinderfläche Π, deren Axe die senkrechte Leitgerade $\Phi\Phi'$ ist, beliebig vergrössern und durch die entsprechende Curve p der zugehörigen rollenden Kreiscylinderfläche P erzeugen. Wir erhalten somit die Sätze:

Von jeder normalen Conoidfläche $\mathfrak{C}$ wird der innerhalb der festen Kreiscylinderfläche Π befindliche Theil vermittelst Rollung der Kreiscylinderfläche P durch die Curve p erzeugt, welche die Schnittcurve von $\mathfrak{C}$ und p ist; dabei rollt die Curve p auf der Begrenzungscurve π entlang, welche die Schnittcurve von $\mathfrak{C}$ und Π ist.

Jede normale Conoidfläche wird von allen gleichen Kreiscylinderflächen, welche die senkrechte Leitgerade der Conoidfläche als Mantellinie enthalten, in congruenten Curven geschnitten.

Aus diesen Sätzen folgen durch Betrachtung specieller Fälle manche interessante Ergebnisse, und wir wollen als Beispiele drei besondere Fälle hervorheben.

a) Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid.

Nehmen wir in Fig. 1 anstatt der Curve ξ eine Gerade, die zu jener senkrechten Leitgeraden $\Phi\Phi'$ windschief ist, dann ist die Conoidfläche $\mathfrak{C}$ ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid; denn dasselbe wird durch eine Gerade erzeugt, die an der Geraden ξ und senkrecht an der Geraden $\Phi\Phi'$ entlang gleitet. Die rollende Kreiscylinderfläche P, welche durch die senk-

* Ein im Raume befindliches Gebilde, Punkt, Gerade, Curve etc., bezeichnen wir durch Buchstaben ohne Index, die Grundriss- und Aufrissprojection desselben aber durch Anfügen des Index 1 resp. 2.

rechte Leitgerade $\Phi\Phi'$ geht, schneidet das gleichseitige hyperbolische Paraboloid in einer cubischen Curve p, die in diesem Falle ein cubischer Kreis ist und eine zur Leitgeraden $\Phi\Phi'$ parallele Asymptote besitzt. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Von einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid $\mathfrak{C}$ wird der innerhalb der festen Kreiscylinderfläche Π befindliche Theil vermittelst Rollung der Kreiscylinderfläche P durch den cubischen Kreis p erzeugt, der die Schnittcurve von $\mathfrak{C}$ und P ist; dabei rollt dieser cubische Kreis p auf der Begrenzungscurve π entlang, welche die Schnittcurve von $\mathfrak{C}$ und Π ist.

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid besitzt zwei sich rechtwinklig treffende Mantellinien, von denen die eine die Schaar der anderen Mantellinien senkrecht schneidet; und wir wollen diese beiden ausgezeichneten Mantellinien die Hauptmantellinien nennen. Hiernach kann die Erzeugung vermittelst zweifacher cylindrischer Rollung durch einen cubischen Kreis erfolgen, je nachdem die zusammen gehörenden beiden Kreiscylinderflächen der einen oder andern Hauptmantellinie parallel angenommen werden; und ferner folgt hieraus der Satz:

Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid wird von gleichen Kreiscylinderflächen, welche durch die eine oder die andere der beiden Hauptmantellinien desselben gehen, in congruenten cubischen Kreisen geschnitten.

Es ist überraschend, dass das gleichseitige hyperbolische Paraboloid durch diese Beziehungen von dem nicht gleichseitigen so besonders ausgezeichnet ist und ausser den beiden Mantellinienschaaren noch unendlich viele Paare von je zwei Schaaren congruenter cubischer Kreise enthält.

b) Die flachgewindige Schraubenfläche.

Ist in Fig. 1 die Curve ξ eine Schraubenlinie mit der Axe $\Phi\Phi'$, dann ist die Conoidfläche $\mathfrak{C}$ eine normale axiale Schraubenregelfläche, die wir, weil sie bei der Schraube mit flachem Gewinde auftritt, auch eine flachgewindige Schraubenfläche nennen. Die flachgewindige Schraubenfläche wird demnach durch eine Gerade erzeugt, die an der Schraubenlinie ξ und rechtwinklig an deren Axe $\Phi\Phi'$ entlang gleitet. Die Schnittcurve π, welche diese Schraubenfläche mit der festen Kreiscylinderfläche Π bildet, ist eine coaxiale Schraubenlinie von der Ganghöhe h der Schraubenfläche, und die Schnittcurve p, welche die Schraubenfläche mit der rollenden Kreiscylinderfläche P bildet, ist eine Schraubenlinie von der Ganghöhe $\frac{1}{2}h$, weil die Durchmesser der Kreiscylinderflächen P und Π sich wie $1:2$ verhalten. Während einer ganzen Umrollung in der festen Kreiscylinderfläche Π macht die rollende Kreiscylinderfläche P zwei Umwälzungen, und es rollen zwei Windungen der Schraubenlinie p auf einer Windung der Schraubenlinie π ab. Hieraus folgen die Sätze:

Von einer flachgewindigen Schraubenfläche $\mathfrak{C}$ wird der innerhalb der festen Kreiscylinderfläche Π befindliche Theil vermittelst Rollung der Kreiscylinderfläche P durch die Schraubenlinie p erzeugt, welche die Schnittcurve von $\mathfrak{C}$, P ist; dabei rollt die Schraubenlinie p auf der begrenzenden Schraubenlinie π entlang.

Die flachgewindige Schraubenfläche wird von gleichen Kreiscylinderflächen, welche die Axe dieser Schraubenfläche als Mantellinie enthalten, in congruenten Schraubenlinien geschnitten, deren Ganghöhe gleich der halben Ganghöhe der Schraubenfläche ist.

c) Die Plücker'sche Conoidfläche.

In Fig. 2 wollen wir eine Plücker'sche Conoidfläche* annehmen, deren senkrechte Leitlinie $\Phi\Phi'$ ist. Die Plücker'sche Conoidfläche schneidet die Kreiscylinderfläche Π bekanntlich in einer Curve π, die in der ebenen Ausbreitung dieser Kreiscylinderfläche Π eine aus zwei Wellenzügen bestehende Sinoide ist. Die entsprechende Curve p auf der rollenden Kreiscylinderfläche P ist demzufolge in der ebenen Ausbreitung dieser Kreiscylinderfläche P eine congruente, aus einem Wellenzuge bestehende Sinoide, welche aufgewickelt, auf der Kreiscylinderfläche P eine Ellipse bildet. Bei der Rollung der Kreiscylinderfläche P in der festen Kreiscylinderfläche Π bewegen sich die Punkte der Ellipse p auf den Mantellinien der Plücker'schen Conoidfläche $\mathfrak{C}$. Die Endpunkte A, B der grossen Ellipsenaxe AB bewegen sich auf den äussersten Mantellinien α, β, die windschief liegend zueinander senkrecht sind. Die Endpunkte C, D der kleinen Ellipsenaxe CD, welche gleich dem Durchmesser der Kreiscylinderfläche P ist, bewegen sich auf den sich rechtwinklig schneidenden Mantellinien γ, δ, deren Aufrissprojectionen zusammenfallen. Der Ellipsenmittelpunkt M beschreibt einen Kreis μ. Aus diesen Darlegungen ergiebt sich:

Von einer Plücker'schen Conoidfläche $\mathfrak{C}$ wird der innerhalb der festen Kreiscylinderfläche Π befindliche Theil vermittelst Rollung der Kreiscylinderfläche P durch die Ellipse p erzeugt, welche die Schnittcurve von $\mathfrak{C}$ und P ist.

Die Plücker'sche Conoidfläche wird von gleichen Kreiscylinderflächen, welche die senkrechte Leitgerade dieser Conoidfläche als Mantellinie enthalten, in congruenten Ellipsen geschnitten.

Nach diesem zweiten, längst bekannten Satze können wir die Plücker'sche Conoidfläche auch durch eine Gerade erzeugen, die an der Ellipse p

---

* Wir vermeiden die für die Plücker'sche Conoidfläche gebrauchte Benennung „Cylindroid", weil dieselbe bekanntlich schon viel früher bei einer andern Fläche verwendet ist.

und senkrecht an der Leitgeraden $\Phi\Phi'$ entlang gleitet. Da diese Leitgerade $\Phi\Phi'$ die Ellipse p in einem Punkte trifft, so liegt die durch diesen Punkt gehende Mantellinie der Conoidfläche in der Ellipsenebene und schneidet die die Ellipse P noch in einem zweiten Punkte. Dies ist der Berührungspunkt, in welchem die Ellipsenebene die Conoidfläche berührt. Die Ellipsenebene enthält also in allen ihren Lagen eine Mantellinie der Conoidfläche. Denken wir uns in Fig. 2 den Kreis p_1 in die Lage p'_1 gerollt, so sind die Grundrissprojectionen von den Endpunkten der grossen Ellipsenaxe nach A'_1, B'_1 gelangt. Die zu $A'_1B'_1$ Senkrechte $\Phi_1 U'_1$, die p'_1 in U'_1 schneidet, ist die Grundrissprojection der Mantellinie, welche in der Ebene der nach p' gerollten Ellipse liegt, und U'_1 ist die Grundrissprojection des Berührungspunktes, in dem diese Ebene die Conoidfläche berührt. Die Grundrissprojection $A'_1B'_1$ der grossen Ellipsenaxe umhüllt, weil A'_1, B'_1 als Endpunkte einer constanten Strecke sich auf den rechtwinkligen Geraden α_1, β_1 bewegen, eine vierspitzige Hypocykloide. Der geometrische Ort der Mitte H'_1 der entsprechenden auf $A'_1B'_1$ senkrechten Strecke $\Phi_1 U'_1$ ist für Φ_1 als Lothpunkt die Fusspunktencurve dieser Hypocykloide. Diese Fusspunktencurve ist eine vierblätterige sternförmige Trochoide, und demnach bilden die Grundrissprojectionen U'_1 ... der Punkte, in welchen die Ellipsenebene bei der cylindrischen Rollung die Conoidfläche berührt, eine ähnliche, im Verhältniss 1:2 vergrösserte vierblättrige sternförmige Trochoide.

Aendern wir den Durchmesser des durch Φ_1 gehenden Kreises p_1 und entsprechend den doppelt so grossen Durchmesser des Kreises π_1, dann erhalten wir auf der rollenden Kreiscylinderfläche P die zugehörige erzeugende Ellipse, deren Ebene eine entsprechende Neigung gegen den Grundriss oder gegen die Leitgerade $\Phi\Phi'$ besitzt. Nehmen wir umgekehrt in Fig. 2 eine beliebig geneigte Ebene e an, welche durch eine Mantellinie $V'U'$ der Conoidfläche geht, und bestimmen wir die Grundrissprojectionen A'_1, B'_1 der Schnittpunkte, welche diese Ebene e mit den äussersten Mantellinien α, β bildet, dann ist $A'_1B'_1$ der Durchmesser des entsprechenden Basiskreises p'_1 der rollenden Kreiscylinderfläche P. Denn diese durch die senkrechte Leitgerade $\Phi\Phi'$ gehende Kreiscylinderfläche P schneidet die Plücker-sche Conoidfläche in einer Ellipse p', deren Ebene mit der Ebene e identisch ist, weil die drei Ellipsenpunkte A, B, V in der Ebene e liegen.

Bewegt sich die constante Strecke AB mit ihren Endpunkten A, B resp. auf den Geraden α, β, dann bilden die Geraden $V'U'$, ..., welche die kürzesten Abstände der bewegten Geraden AB von der Leitgeraden $\Phi\Phi'$ enthalten, die Plücker'sche Conoidfläche, deren äusserste Mantellinien die Geraden α, β sind. Nehmen wir in der Ellipsenebene eine beliebige zur grossen Ellipsenaxe AB parallele Gerade LN, welche die Ellipse p in den Punkten L, N schneidet, so bewegen sich die Endpunkte L, N der constanten Strecke LN resp. auf den Geraden λ, ν. Die Geraden VU, $V'U'$, ..., welche die kürzesten Abstände der bewegten Geraden LN von der Leitgeraden $\Phi\Phi'$ enthalten, sind dieselben wie vorhin, und bilden somit dieselbe Plücker'sche Conoidfläche, zu der die Geraden λ, ν als Mantellinien gehören. Schneidet die zur Ellipsenaxe AB parallele Gerade LN die Ellipse p nicht, dann sind die Punkte L, N, sowie die Geraden λ, ν imaginär, und wir betrachten die Gerade LN als mit der rollenden Kreiscylinderfläche P verbunden. Hiernach ergiebt sich die folgende Erzeugungsweise der Plücker'schen Conoidfläche:

Ist mit der Kreiscylinderfläche P, die in der festen Kreiscylinderfläche Π rollt, eine schräge Gerade LN verbunden, dann erzeugen die Geraden, welche die kürzesten Abstände dieser bewegten Geraden von der festen Cylinderflächenaxe $\Phi\Phi'$ enthalten, eine Plücker'sche Conoidfläche.

Die durch die Gerade LN und ihren kürzesten Abstand von $\Phi\Phi'$ gelegte Ebene schneidet die rollende Kreiscylinderfläche P in der Ellipse p, welche dieselbe Plücker'sche Conoidfläche erzeugt; und die Endpunkte der grossen Axe der Ellipse bewegen sich auf den äussersten Mantellinien dieser Plücker'schen Conoidfläche.

Ist in einer gegen die Leitgerade $\Phi\Phi'$ geneigten Ebene e ein Strahlenbüschel mit dem nicht in $\Phi\Phi'$ liegenden Mittelpunkt S gegeben, so wird auch durch die Geraden, welche die kürzesten Abstände der Strahlen dieses Büschels von der Leitgeraden $\Phi\Phi'$ enthalten, eine Plücker'sche Conoidfläche erzeugt; denn die Fusspunkte der kürzesten Abstände auf den Strahlen befinden sich in dem elliptischen Schnitte, welchen die Ebene e mit der durch die Leitgerade $\Phi\Phi'$ und den Büschelmittelpunkt S gehenden Kreiscylinderfläche bildet, deren Durchmesser der Abstand S von $\Phi\Phi'$ ist.

Die Wringfläche.

Verbinden wir in Fig. 3 mit der Kreiscylinderfläche P, welche in der doppelt grossen festen Kreiscylinderfläche Π rollt, eine schräge Gerade g, und schneidet dieselbe die rollende Cylinderfläche P in zwei Punkten A, B, so bewegen sich diese als Endpunkte der constanten Strecke AB resp. auf den Durchmessern α, β der festen Kreiscylinderfläche Π und alle anderen Punkte der Geraden g beschreiben Ellipsen, deren Mittelpunkte in der Axe $\Phi\Phi'$ der festen Kreiscylinderfläche Π liegen und deren Ebenen senkrecht zu dieser Axe sind. Die so von der Geraden g erzeugte Regelfläche ist von der vierten Ordnung, weil die Gerade g bei vollständiger Umrollung von P in Π eine beliebig im Raume angenommene Gerade höchstens viermal trifft; und die Geraden α, β, auf denen jene Durchmesser während dieser Bewegung zweimal durchschritten werden, sind Doppelgeraden dieser Regelfläche, die ein specieller Fall der von Rohn ausführlich behandelten Flächen ist.* Um einen Theil dieser Regelfläche durch ein Modell darzustellen, bei dem die

* Mathematische Annalen, Bd. 28 S. 284.

Doppelgeraden α, β verschiedene Winkel bilden können, nehmen wir einige Drahtstäbe g', g'', ..., befestigen auf jedem derselben in einem constanten Abstande AB zwei Oesen $A'B'$, $A''B''$, ... und schieben die Oesen A', A'', ... auf einen Drahtstab α, die Oesen B', B'', ... auf einen Drahtstab β. Durch Windschiefhalten der Drahtstäbe α, β und Aenderung des Winkels derselben bildet sich durch die Drahtstäbe g', g'', ..., welche an α, β gleiten, die Regelfläche in verschiedenen Gestaltungen, die also gleichsam durch Wringen* der Drahtstäbe α, β entstehen. Wir wollen deshalb diese Regelfläche eine **Wringfläche** und die Gerade $\Phi\Phi'$ als ihre Axe bezeichnen. Demnach ergiebt sich:

Eine Wringfläche wird bei Rollung einer Kreiscylinderfläche in einer doppelt grossen festen Kreiscylinderfläche vermittelst einer schräg mit der rollenden Kreiscylinderfläche verbundenen Geraden erzeugt.

Eine Wringfläche wird von senkrecht auf ihrer Axe stehenden Ebenen in Ellipsen geschnitten, deren Mittelpunkte in dieser Axe liegen; und alle Mantellinien derselben werden von diesen Ebenen in congruenten Punktreihen geschnitten.

Bestimmen wir in Fig. 3 auf der Geraden g den Punkt J, welcher der Axe FF' der rollenden Kreiscylinderfläche P am nächsten ist, und nehmen wir auf g in gleichen Entfernungen von J die Punkte C, D an, dann beschreiben diese Punkte C, D die congruenten Ellipsen γ, δ, welche in der Zeichnung die untere und obere Begrenzung der durch g erzeugten Wringfläche bilden. In der Grundrissprojection entstehen die Ellipsen γ_1, δ_1 durch die Punkte C_1, D_1 der Geraden g_1, deren Punkte A_1, B_1 als Endpunkte einer starren Strecke sich auf den Geraden α_1, β_1 bewegen. Die Schnittpunkte, welche die Gerade C_1F_1 mit dem rollenden Kreis p_1 bildet, ergeben bekanntlich durch ihre Verbindung mit Φ_1 die Richtungen der Axen der Ellipse γ_1 und durch ihre Abstände von C_1 die halbe Grösse dieser Axen. Die Grundrisscontour τ_1 der Wringfläche wird als Umhüllungscurve der Geraden g_1 erzeugt und ist eine Aequidistante der vierspitzigen Hypocykloide, die von einem Punkte eines im Kreise π_1 rollenden, viermal kleineren Kreises beschrieben wird. Die Aufrisscontour θ_2 ist, wie man leicht erkennt, eine Hyperbel, die in besonderen Fällen zu zwei Geraden degenerirt.

Nehmen wir an, dass insbesondere die schräge erzeugende Gerade g die Axe FF' der rollenden Kreiscylinderfläche P schneidet, dann sind die windschiefen Doppelgeraden α, β rechtwinklig, und zu diesen sind die Axen der Ellipsen, welche von den Punkten der Geraden g beschrieben werden, parallel. Der Schnittpunkt der Geraden g, FF', beschreibt einen Kreis. In diesem Falle kann die erzeugte Fläche als die **normale Wringfläche** bezeichnet werden.

---

* Vergl. Sanders, Wörterbuch der deutschen Sprache.

Berührt die schräge erzeugende Gerade g die rollende Kreiscylinderfläche P, dann sind die beiden Doppelgeraden unendlich nahe aneinander und sind als eine einzige Doppelgerade zu betrachten. Schneidet die Gerade g die rollende Kreiscylinderfläche P nicht, dann sind die beiden Doppelgeraden imaginär. Die Gestaltungen der Wringfläche sind in diesen erwähnten Fällen sehr verschieden.

Nach früherer Darlegung ist jede Gerade, welche den kürzesten Abstand der Geraden g von der Axe $\Phi\Phi'$ der Wringfläche enthält, eine Mantellinie der Plücker'schen Conoidfläche, und diese wird von der rollenden Kreiscylinderfläche P in einer Ellipse geschnitten, deren Ebene durch die Gerade g und durch ihren kürzesten Abstand von $\Phi\Phi'$ geht. Demnach ergiebt sich der Satz:

Die Geraden der kürzesten Abstände der Mantellinien einer Wringfläche von deren Axe bilden eine Plücker'sche Conoidfläche.

Denken wir uns mit der rollenden Kreiscylinderfläche P alle diejenigen in einer schrägen Ebene liegenden Geraden verbunden, die parallel sind zu dem in dieser Ebene liegenden Schenkel des von der Axe $\Phi\Phi'$ mit ihr gebildeten Neigungswinkels, dann befinden sich die Geraden der kürzesten Abstände der Mantellinien aller erzeugten Wringflächen, deren gemeinsame Axe $\Phi\Phi'$ ist, auf einer Plücker'schen Conoidfläche.

Die cyklische Schraubenfläche.

In Fig. 4 sind zwei Schraubenlinien s, l dargestellt, deren Axen $\Phi\Phi'$, FF' parallel sind und auf der Grundrissebene senkrecht stehen. Denken wir uns die Schraubenlinie l mit der Schraubenlinie s verbunden und diese letztere in sich selbst bewegt, dann vollzieht die Schraubenlinie l eine schraubenförmige Bewegung und erzeugt eine cyklische Schraubenfläche, deren zur Axe senkrechte ebene Schnitte congruente cyklische Curven sind.* Da während der schraubenförmigen Bewegung der Schraubenlinie l die Grundrissprojection derselben resp. der Kreis l_1, dessen Mittelpunkt F_1 die Grundrissspur der Axe FF' ist, sich um den festen Punkt Φ_1 dreht, und der Schnittpunkt A_1, den l mit der Grundrissebene bildet, eine proportionale Drehung um F_1 auf dem Kreise l_1 vollzieht, so beschreibt der Punkt A_1 eine cyklische Curve α_1 in der Grundrissebene. Sind für die Schraubenlinien s, l die Ganghöhen h_s, h_l und ist das Verhältniss $h_s : h_l = 1 : \mu$ gegeben, so hat, wenn die Schraubenlinie l sich in der Axenrichtung um ihre Ganghöhe $h_l = \mu . h_s$ bewegt, der Punkt A_1 den Kreis l_1 durchlaufen und gleichzeitig hat der Punkt F_1 auf dem Kreise φ_1, dessen Umfang U sein möge, den Bogen $\mu . U$ durchschritten. Demnach ist das Umdrehungsverhältniss von A_1 auf l_1 und von F_1 auf φ_1 gleich $1 : \mu$, und beschreiben

* Vergl. Burmester, Bd. 18 dieser Zeitschrift S. 185.

wir um Φ_1 den Kreis π_1, um F_1 den Kreis p_1, die sich im Punkte $\mathfrak{P}_1$ berühren und deren Radien sich wie $1:\mu$ verhalten, so wird, wenn der Kreis p_1 auf dem festen Kreise π_1 rollt, von dem mit p_1 verbundenen Punkt A_1 die cyklische Curve α_1 erzeugt. Und die Punkte F_1 und A_1 drehen sich in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, je nachdem die Schraubenlinien s, l in entgegengesetztem oder gleichem Sinne gewunden sind. Die cyklische Curve α_1 wird noch auf eine zweite Weise durch Kreisrollung von dem Punkte A_1 erzeugt.*

Construiren wir das Parallelogramm $\Phi_1 F_1 A_1 F'_1$, welches in der bebetrachteten Lage ein Rechteck ist, ziehen wir die Gerade $A_1 \mathfrak{P}_1$, welche die Gerade $\Phi_1 F'_1$ im Punkte $\mathfrak{P}'_1$ schneidet, und beschreiben wir um Φ_1, F'_1 die Kreise π'_1, p'_1, die sich in $\mathfrak{P}'_1$ berühren, dann beschreibt, wenn der Kreis p'_1 auf dem festen Kreise π'_1 rollt, der mit p'_1 verbundene Punkt A_1 dieselbe cyklische Curve α_1. Alle Punkte des Kreises l_1, den wir uns mit dem rollenden Kreise p_1 verbunden denken, beschreiben congruente cyklische Curven. Dieselben congruenten cyklischen Curven werden auch von den Punkten des um F'_1 mit dem Radius $F'_1 A_1$ gezogenen Kreises l'_1 erzeugt, wenn wir uns denselben mit dem rollenden Kreise p'_1 verbunden denken.

Bei der doppelten Erzeugung der cyklischen Curven besteht die Beziehung

$$\frac{F_1 \mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_1 \Phi_1} + \frac{F'_1 \mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'_1 \Phi_1} = -1;$$

und ferner ist, wenn wir beachten, dass die Zahl μ positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem die Schraubenlinien s, l in ungleichem oder gleichem Sinne gewunden sind,

$$\frac{h_l}{h_s} = \frac{F_1 \mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_1 \Phi} = \pm \mu.$$

Demnach ergiebt sich, wenn wir den Kreis l'_1 als den Grundriss einer Schraubenlinie l' von der Ganghöhe h'_l betrachten und

$$\frac{h'_l}{h_s} = \frac{F'_1 \mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'_1 \Phi}$$

setzen, die Beziehung:

$$\frac{h'_l}{h_s} = \frac{F'_1 \mathfrak{P}'_1}{\mathfrak{P}'_1 \Phi} = -(1 \mp \mu).$$

Die betrachtete cyklische Schraubenfläche wird hiernach in einer zweiten Weise auch durch die Schraubenlinie l' erzeugt, wenn dieselbe mit der in sich selbst bewegten Schraubenlinie s verbunden ist und so schraubenförmig sich bewegt. Hiernach ergiebt sich:

Eine cyklische Schraubenfläche kann auf zweierlei Weise vermittelst gleicher schraubenförmiger Bewegung zweier verschiedener Schraubenlinien l, l' erzeugt werden.

* Vergl. G. Bellermann, Epicykloiden und Hypocykloiden, 1867. – Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888. Bd. 1 S. 184.

Betrachten wir die Kreise π_1, p_1 als Basiskreise zweier Kreiscylinderflächen Π, P, von denen P auf Π rollt, so wird die cyklische Schraubenfläche auch durch die mit der rollenden Kreiscylinderfläche P verbundene Schraubenlinie l erzeugt. Betrachten wir ferner die Kreise π'_1, p'_1 als Basiskreise zweier Kreiscylinderflächen Π', P', von denen P' auf Π' rollt, so wird dieselbe cyklische Schraubenfläche in zweiter Weise auch durch die mit der rollenden Kreiscylinderfläche P' verbundene Schraubenlinie l' erzeugt.

Eine cyklische Schraubenfläche kann auf zweierlei Weise vermittelst Rollung einer Kreiscylinderfläche P an einer andern Π durch eine mit P verbundene Schraubenlinie l erzeugt werden, oder vermittelst Rollung einer Kreiscylinderfläche P' an einer andern Π' durch eine mit P' verbundene Schraubenlinie l', wobei die Axen dieser Schraubenlinien den Kreiscylinderflächen parallel sind und die Axe der cyklischen Schraubenfläche die gemeinsame Axe der beiden festen Kreiscylinderflächen Π, Π' ist.

Bei der oben betrachteten flachgewindigen Schraubenfläche, die ein specieller Fall der cyklischen Schraubenfläche ist, sind diese beiden Erzeugungsweisen identisch.

Die Schraubenregelfläche.

Durch schraubenförmige Bewegung einer Geraden wird eine Schraubenregelfläche erzeugt, die ein Specialfall der cyklischen Schraubenfläche ist. In Fig. 5 ist die Schraubenlinie s gezeichnet, welche von dem Punkte E der Geraden l beschrieben wird, der den kürzesten Abstand von der Axe $\Phi\Phi'$ besitzt; und es ist diese Schraubenlinie s die engste von allen Schraubenlinien, die von den Punkten der Geraden l beschrieben werden. Für die coaxiale Schraubenlinie π, deren Tangenten mit einer zur Axe $\Phi\Phi'$ senkrechten Ebene denselben Winkel q wie die bewegte Gerade l bilden und deren Ganghöhe h gleich der Ganghöhe der Schraubenregelfläche ist, erhalten wir den Radius

$$\varrho = \frac{h . \cot q}{2 . 3{,}14 \ldots}.$$

Beschreiben wir um Φ_1 im Grundriss mit dem Radius ϱ den Kreis π_1, so ist derselbe die Grundrissprojection der Schraubenlinie π und kann zugleich als die Basis einer Kreiscylinderfläche Π betrachtet werden, auf der die Schraubenlinie π liegt. Denken wir uns die Schraubenlinie π auf der Kreiscylinderfläche Π so gezeichnet, dass der Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ einer an π gelegten Tangente p, welche einer bestimmten Lage der Geraden l parallel ist, mit dem Punkte E der Geraden l in gleicher Höhe liegt, dann können wir die Tangente p mit der Geraden l fest verbinden; und während die schraubenförmig bewegte Gerade l die Schraubenregelfläche erzeugt, beschreibt die Gerade p die abwickelbare Schraubenfläche, welche von den Tangenten der Schraubenlinie π gebildet wird. Legen wir nun an die feste

Kreiscylinderfläche Π die durch p gehende Tangentialebene P, deren Grundrissspur p_1 eine Tangente an den Kreis π_1, sowie auch die Grundrissprojection von p ist; und denken wir uns die Gerade l mit dieser Tangentialebene P verbunden, so wird, wenn die Tangentialebene P an der festen Kreiscylinderfläche Π rollt, von der Geraden l die Schraubenregelfläche erzeugt, und alle Punkte der Geraden l beschreiben in senkrechten Ebenen zur Axe $\Phi\Phi'$ congruente allgemeine Kreisevolventen. Hierbei rollt die Gerade p der Ebene P als Tangente an der Schraubenlinie π entlang. Die Grundrissspur B_1 der Tangente p beschreibt als Punkt der an dem Kreise π_1 rollenden Tangente p_1 eine gemeine Kreisevolvente; und die mit p_1 verbunden gedachte Grundrissspur A_1 der Geraden l beschreibt im Grundriss die allgemeine Kreisevolvente α_1. Somit ergiebt sich der Satz:

Die Schraubenregelfläche wird vermittelst Rollung einer Ebene P auf einer festen Kreiscylinderfläche Π durch eine mit der Ebene P verbundene parallele Gerade l erzeugt, die schräg zu den Mantellinien der Kreiscylinderfläche ist; und die Axe der Schraubenregelfläche ist auch die Axe der festen Kreiscylinderfläche.

Geht die mit der rollenden Ebene P verbundene schräge Gerade l durch die Axe $\Phi\Phi'$ der festen Kreiscylinderfläche Π, dann wird von der Geraden l die scharfgewindige Schraubenfläche erzeugt, welche bei der Schraube mit scharfem Gewinde vorkommt, und alle Punkte von l beschreiben congruente Archimedische Spiralen.

Liegt die Gerade l in der rollenden Ebene P, dann wird von der Geraden l eine abwickelbare Schraubenfläche erzeugt, und alle Punkte von l beschreiben congruente gemeine Kreisevolventen.

Die flachgewindige Schraubenfläche, welche als besonderer Fall aus der Schraubenregelfläche hervorgeht, wenn die Mantellinien derselben die Axe senkrecht schneiden, sowie die specielle Schraubenregelfläche, deren Mantellinien senkrecht, aber windschief zur Axe sind, können durch die betrachtete Rollung einer Ebene auf einer Kreiscylinderfläche nicht erzeugt werden; denn eine mit der rollenden Ebene verbundene Gerade, die senkrecht zu den Mantellinien der Kreiscylinderfläche ist, bewegt sich bei der Rollung in einer Ebene.

Wird in Fig. 6 während der Rollung einer Kreiscylinderfläche P in einer festen Kreiscylinderfläche Π der rollenden Kreiscylinderfläche P längs den Mantellinien eine gesetzmässige Längsbewegung ertheilt, dann wird der Bewegungsvorgang cylindrische Schrotung genannt; die Kreiscylinderfläche P schrotet an der festen Kreiscylinderfläche Π. Vermittelst der cylindrischen Schrotung ergeben sich mannigfaltige neue Flächenerzeugungen. Schrotet z. B. eine Kreiscylinderfläche P in einer doppelt grossen festen Kreiscylinderfläche Π derart, dass die Längsbewegung durch harmonische Schwingungen bewirkt wird, deren Schwingungszeit zu der Umrollungszeit in einem bestimmten Verhältnisse steht, dann beschreiben alle Punkte der schrotenden Kreiscylinderfläche P Lissajous'sche Curven in Ebenen, welche durch die Axe $\Phi\Phi'$ der festen Kreiscylinderfläche Π gehen. Ein Kreis auf der schrotenden Kreiscylinderfläche P, z. B. der Basiskreis p, erzeugt eine Fläche, die von den durch die Axe $\Phi\Phi$ gehenden Ebenen in Lissajous'schen Curven der verschiedenen Phasenunterschiede geschnitten werden; und diese Fläche lässt sich in zwei verschiedenen Weisen durch Parallelbewegung erzeugen.

Wenn insbesondere, wie beispielsweise in Fig. 6 angenommen ist, während der cylindrischen Schrotung einer vollen Umrollung eine ganze harmonische Schwingung entspricht, sind die Lissajous'schen Curven Ellipsen, welche einen gemeinsamen Mittelpunkt M in der Axe $\Phi\Phi'$ besitzen. Beginnt die Rollung und harmonische Schwingung in der Lage p_1 des Basiskreises p, dann schwingt der momentan mit dem Berührungspunkte der Basiskreise p_1, π_1 coincidirende Punkt A_1 von p_1 in der Ebene $\Phi\Phi'A$ auf der Geraden α resp. auf der geraden Strecke AA', die als eine degenerirte Ellipse zu betrachten ist. Ein Punkt B_1 des Kreises p_1 beschreibt in der Ebene $\Phi\Phi'B$ eine Ellipse β; und der Mittelpunkt F_1 des Kreises p_1 bewegt sich auf einer Ellipse φ. Die vermittelst dieser cylindrischen Schrotung von dem Kreise p_1 erzeugte Fläche gestaltet sich in diesem Specialfalle besonders einfach. Diese Fläche wird auch durch Parallelbewegung des Kreises p_1 erzeugt, wenn dessen Mittelpunkt F_1 auf der Ellipse φ bewegt wird. Alle Punkte des Kreises p_1 beschreiben dann in parallelen Ebenen Ellipsen, die der Ellipse φ congruent sind. Die Mittelpunkte dieser congruenten Ellipsen liegen auf dem Kreise μ, dessen Grundrissprojection auch der Kreis φ_1 ist. Demnach wird diese betrachtete Fläche auch durch Parallelbewegung einer dieser Ellipsen erzeugt, wenn deren Mittelpunkt auf dem Kreise μ sich bewegt. Die Grundrisscontour dieser Fläche wird durch den Kreis π_1 und die Aufrisscontour durch das Parallelogramm $A_2\Phi'_2A'_2\Phi_2$ dargestellt.

Vermittelst einer andern einfachen cylindrischen Schrotung, bei der die Längsbewegung der Rollung proportional ist, ergeben sich noch manche interessante Flächenerzeugungen; und nach dem Chasles'schen Princip der Umkehrung der Bewegung* treten durch Umkehrung der cylindrischen Rollung sowie der cylindrischen Schrotung wieder Erzeugungen neuer Flächen auf.

Die Erzeugung der Conoidflächen vermittelst Rollung wurde von mir im Januar 1888 vorgetragen und auch von Mannheim gefunden (Comptes rendus T. CVI, 19 mars 1888, p. 820), wie mir durch Separatabdruck bekannt geworden ist, nachdem diese Abhandlung zum Druck befördert war.

* Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, 1839, S. 447.

XX.

Construction einer Plücker'schen Complexfläche aus ihren vier singulären Strahlen.

Von
Stud. math. JOH. KLEIBER
in München.

Es soll sich in den folgenden Ueberlegungen darum handeln, die von Plücker in seinem Werke: „Neue Geometrie des Raumes" zuerst charakterisirte, einem Complexe zweiten Grades bezüglich irgend einer beliebigen Geraden des Raumes zugeordnete „Complexfläche" aus den vier ihr eigenthümlichen singulären „Strahlen" zu construiren.

Wir bemerken zu dem Ende und um zunächst unsere Vorstellung zu fixiren, dass jene Gerade G, bezüglich welcher ein gegebener Liniencomplex zweiten Grades unsere Fläche definirt, dem Liniencomplexe selbst als Element nicht angehöre, um die Pl.* Nr. 192 bezeichneten speciellen Configurationen auszuschliessen. Um diese Gerade denken wir uns nach dem Vorgange Plücker's sich drehend eine Ebene. Dann werden die jeweilig in ihr liegenden Complexgeraden einen sogenannten „Complexkegelschnitt" umhüllen, die Gesammtheit der Complexkegelschnitte aber die von uns zu betrachtende „Complexfläche" erzeugen. (Pl. Nr. 167.)

Indem sich nun die besagte Ebene um G dreht, kommt es im Ganzen viermal vor, dass der in ihr enthaltene Classenkegelschnitt in ein Punktepaar ausartet. Jeder einzelne dieser Punkte stellt einen Knotenpunkt der Fläche vor, deren somit im Ganzen acht sein können, wenn dieselben nicht paarweise imaginär werden. Wenn wir auch Letzteres in unserer Constructionsvoraussetzung nicht ausschliessen wollen, so müssen wir doch als wesentliche Bedingung die festhalten, dass die vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 reell seien, in denen die ausartenden Classenkegelschnitte zu liegen hätten. Aus diesem Postulat aber folgt dann weiter, dass die in diesen Ebenen E_i liegenden Verbindungslinien S_i der darin enthaltenen zwei Knotenpunkte reell sind, denn nach Lösung der biquadratischen Gleichung, welche die E_i bestimmt, sind die S_i in linearer Weise zu finden (Pl. Nr. 188). Die vier Linien S_i heissen die vier singulären „Strahlen" der Fläche.

* Die Bezeichnung „Pl." bezieht sich stets auf Plücker's Werk: „Neue Geometrie des Raumes etc., 1868."

In Bezug auf unseren späteren Zweck ist es nöthig, noch folgender Eigenschaften Erwähnung zu thun:

1. Die Gerade G ist Doppellinie der Fläche (Pl. Nr. 172). Die Fläche ist also vom vierten Grade.

2. Zugleich ist letztere von der vierten Classe und es läuft von jedem Punkte m der Geraden G, welche zugleich als Doppelaxe sich erweist, an die Complexfläche ein Tangentialkegel, der nur mehr vom zweiten Grade ist. Es ereignet sich bei Fortrücken des Punktes m auf der Doppelaxe G, wie oben, viermal, dass der Tangentialkegel in je ein Ebenenpaar ausartet. Die vier ausgezeichneten Punkte m sollen m_{I}, m_{II}, m_{III}, m_{IV} heissen. Die durch sie laufenden Ebenenpaare sind Doppeltangentialebenen unserer Complexfläche. Die Schnittlinie je zweier durch m_i gehenden Ebenen heisst nach Plücker eine „singuläre Axe" der Fläche (Pl. Nr. 189). Diese Axen wollen wir der Reihe nach A_{I}, A_{II}, $\mathsf{A}_{\mathrm{III}}$, A_{IV} benennen.

Die Polare Γ der Complexfläche.

Die von Plücker Nr. 178 erwähnte „Polare der Complexfläche" wird das eigentliche Hilfsmittel werden, mit dem wir später unsere Construction ermöglichen werden. Wir wollen uns hier deshalb ihre Definition noch einmal vergegenwärtigen, wenigstens nach der unseren Zwecken dienlichen Seite:

> „Die Polare Γ der Fläche ist der Ort der Pole (γ) des Doppelstrahles G bezüglich aller Complexkegelschnitte, deren Ebene E durch G läuft."

Aus dieser Definition folgt aber sofort:

> „Die Polare Γ trifft alle vier singulären Strahlen S_i."

Wenn wir beachten, dass nach Pl. Nr. 179 die Gerade Γ auch umhüllt wird von den Polarebenen, die man bezüglich G zu den Kegeln zweiter Ordnung construiren kann, die von letzterer Geraden auslaufen, so folgt ferner:

> „Die Polare Γ trifft auch alle vier singulären Axen A_i."

Wir erkennen hieraus schon eine grosse Aehnlichkeit im Verhalten von G und Γ bezüglich der acht singulären Linien:

> „Sowohl G wie Γ wird von den vier singulären Strahlen und den vier singulären Axen getroffen."

Die angedeutete Beziehung der Linien G und Γ wird im Laufe unserer Construction noch klarer zu Tage treten.

Trifft der singuläre Strahl S_i die Doppellinie G nach dem Punkte g_i, die Gerade Γ nach γ_i, so sind die Punkte g_i, γ_i harmonisch zu den beiden Knotenpunkten auf S_i. Analog: Heisst die Ebene, welche die singuläre Axe A_i mit G bestimmt, G_i, die Ebene, welche A_i mit Γ bestimmt, Γ_i, so trennen auch hier die Ebenen G_i und Γ_i die durch die singuläre Axe laufenden Doppeltangentialebenen harmonisch.

Die Berührcurve eines Complexkegels, dessen Spitze auf der Doppelgeraden G liegt.

Ein derartiger Complexkegel ist nach Früherem ein Tangentialkegel unserer Complexfläche vierten Grades. Da er selbst von der zweiten Ordnung ist, so gewinnen wir als erstes Resultat den Satz:

„Die Curve, nach welcher ein von einem Punkte der Doppelgeraden ausgehender Tangentialkegel die Fläche berührt, ist eine Raumcurve vierter Ordnung."

Diese Raumcurve wollen wir mit R_4 bezeichnen. Benennen wir ferner die Spitze des Kegels mit dem Buchstaben m, so können wir folgenden Satz erweisen:

„Die Raumcurve R_4 hat im Punkte m einen Doppelpunkt, dessen zwei Schmiegungsebenen durch die Doppelgerade G laufen und dessen zwei Tangenten die Polare Γ der Complexfläche schneiden."

Zum Beweise bemerken wir, dass von der Geraden G aus an den Complexkegel zwei Tangentialebenen laufen: $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, welche den Kegel mit der Spitze m nach den zwei Erzeugenden T_1 und T_2 berühren. Betrachten wir neben $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ noch eine dritte durch G laufende Ebene E, so enthält diese doch einen Complexkegelschnitt, dessen beide durch den Punkt m gehenden Complexlinien (Tangenten des Kegelschnittes) Erzeugende des Kegels m sind. In den Grenzlagen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ rücken diese zwei Erzeugenden zusammen, woraus folgt, dass die in den Ebenen $\mathfrak{T}_1$ bez. $\mathfrak{T}_2$ gelegenen Complexkegelschnitte die Geraden T_1 und T_2 im Punkte m jeweilig berühren müssen. Somit ist m auch Doppelpunkt der Berührcurve R_4, welche ganz auf dem Kegel m liegt; die Tangenten in dem Punkte m sind aber T_1 und T_2.

Da der Pol eines der in $\mathfrak{T}_1$ oder $\mathfrak{T}_2$ gelegenen Complexkegelschnitte auf den bezüglichen Tangenten T_1, T_2 gelegen sein muss, so ist ferner klar, dass die Tangenten T_1, T_2 des Punktes m der R_4 die Gerade Γ treffen.

Im Uebrigen liegt weder in $\mathfrak{T}_1$ noch $\mathfrak{T}_2$ ausser m ein Schnittpunkt der R_4, somit sind die beiden durch G laufenden Ebenen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zugleich Schmiegungsebenen der Raumcurve im Doppelpunkte m.

Wenn wir bedenken, dass irgend eine Ebene durch eine der Erzeugenden des Kegels die R_4 nach vier Punkten schneiden muss, von denen immer zwei durch den Punkt m repräsentirt werden, und die nicht alle zu gleicher Zeit in einer Geraden liegen können, so erhalten wir den weiteren Satz:

„Auf jeder Erzeugenden des Kegels aus dem Punkte m liegt ausser m noch ein einziger weiterer Punkt der R_4."

Wir bemerken überdies, dass der Kegel auch immer durch die acht Knotenpunkte laufen muss, woraus folgt:

„Die vier singulären Strahlen sind immer (eigentliche oder uneigentliche) Secanten der R_4."

Von den vier singulären Axen können wir das Gegentheil erweisen, denn die durch eine solche singuläre Axe A_i laufenden Doppeltangentialebenen müssen bekanntermassen je vier der acht Knotenpunkte der Fläche enthalten, durch deren keinen aber A_i hindurchgeht. Diese acht Knotenpunkte gehören aber der R_4 an.

Lässt man die Kegelspitze wandern, so werden natürlich die Tangentialebenen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ an die entstehenden Complexkegel immer andere, ebenso die Tangenten T_1, T_2, die aber immer die Polare Γ schneiden. Fortwährend gehen aber die entstehenden R_4 durch die acht festen Knotenpunkte der Complexfläche, während ihr Doppelpunkt die Doppelgerade G durchläuft.

Unter diesen möglichen Curven kommt es nun, wie wir sogleich ableiten werden, viermal vor, dass die R_4 in ein Paar von Kegelschnitten sich auflöst, und viermal, dass dieselbe in eine Gerade und eine Raumcurve dritter Ordnung degenerirt.

Wir haben früher mit m_{I}, m_{II}, m_{III}, m_{IV} die vier Punkte bezeichnet, für die der Complexkegel, der von ihnen jeweilig ausgeht, in je ein Ebenenpaar zerfällt. Die Doppellinie des letzteren war die singuläre Axe A_i. Diese Ebenenpaare aber stellen nichts Anderes vor, als je ein Paar Doppeltangentialebenen der Complexfläche. Wenn aber letztere eine ebene Berührcurve besitzen soll, so kann dies nur ein Kegelschnitt sein. Wir haben hiernach die Existenz zunächst von den vier Kegelschnittpaaren erwiesen, welche zusammen eine der R_4 repräsentiren, welche den Punkten m_{I}, m_{II}, m_{III}, m_{IV} zukommen.

Um auf die vier Raumcurven dritter Ordnung endlich zu gelangen, lassen wir die Kegelspitze m in einen der vier Punkte g_1, g_2, g_3, g_4 rücken. Mit g_i bezeichneten wir früher den Schnitt des singulären Strahles S_i mit der Doppelgeraden G. Der Complexkegel selbst zerfällt nicht, aber wir können auf ihm eine Erzeugende bezeichnen, die vier Punkte der R_4 auf sich enthält. Dies ist nämlich der singuläre Strahl S_i selbst. Er enthält nämlich, unserer Regel widersprechend, statt „eines" weiteren Punktes ausser m noch zwei, nämlich die beiden auf ihm liegenden Knotenpunkte. Wir haben somit den Satz:

„Der vom Schnittpunkt eines singulären „Strahles" mit der Doppelgeraden ausgehende Tangentialkegel berührt die Complexfläche nach einer Raumcurve dritter Ordnung; als Rest der R_4 spaltet sich der singuläre Strahl ab."

Die auftretenden Raumcurven dritter Ordnung.

Wir wollen zunächst den Satz erweisen:

„Jede der vier auftretenden Raumcurven dritter Ordnung hat die Eigenschaft, sowohl G wie Γ zu treffen; aber letztere zwei Gerade sind blos „Nichtsecanten der vier R_3"."

Dass die Gerade G getroffen wird, ist klar. Denn gehöre im Punkte g_i zum singulären, sich absondernden Strahl S_i die mit $R_3{}^i$ bezeichnete Raumcurve, so wird eben g_i zum Doppelpunkt der zerfallenden R_4, indem sich in ihm S_i und $R_3{}^i$ treffen.

Die Tangenten der R_4 im Doppelpunkte bezeichneten wir früher mit T_1 und T_2; sie lagen in den von G an den Kegel m gehenden Tangentialebenen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ und schnitten die Polare Γ. In unserem Falle ist die Ebene $\mathfrak{T}_1$ identisch mit der Ebene $[G, S_i]$, denn in dieser liegt der in die Doppellinie S_i degenerirte Punktkegelschnitt, so dass in S_i zwei Erzeugende des Kegels von g_i liegen. Die zweite Ebene $\mathfrak{T}_2$ dagegen specialisirt sich nicht in einer ähnlichen Art. Die in ihr liegende Tangente $\mathsf{T}_2{}^i$ für $R_3{}^i$ im Punkte g_i schneidet wie gewöhnlich Γ.

Denken wir uns eine Ebene durch G, die sich successive in die Lage der Tangentialebene $\mathfrak{T}_1$ bewegt, so erkennen wir unmittelbar aus der Definition unserer Berührcurve R_4, dass die Raumcurve dritter Ordnung durch den schon früher erwähnten Punkt γ_i gehen muss, der bezüglich der beiden auf dem singulären Strahl S_i liegenden Knotenpunkte zum Punkte g_i, d. i. der Kegelspitze harmonisch liegt. Da letzterer Punkt auch der Polaren Γ zugehört, so ist auch der Beweis erbracht, dass die $R_3{}^i$ mit Γ einen Punkt γ_i gemein hat. — Dass aber Γ keinen weiteren Punkt mit der $R_3{}^i$ gemein haben kann, folgt indirect ebenfalls aus der angestellten Betrachtung, da keine zwei singulären Strahlen durch denselben Punkt g_i hindurchgehen dürfen.

Da die $R_3{}^i$ auf dem Kegel mit der Spitze g_i nicht durch die beiden auf dem singulären Strahl S_i gelegenen Knotenpunkte laufen kann (wenn wir dieselben discret auf S_i annehmen), vielmehr durch den auf S_i liegenden Punkt γ_i geht, in welchem S_i von Γ getroffen wird, so können wir je acht Punkte einer jeden der vier Raumcurven dritter Ordnung in folgender Weise angeben:

> „Die Raumcurve $R_3{}^i$ geht ausser durch den Punkt g_i auf G noch durch den Punkt γ_i auf Γ und ferner durch jene sechs übrigen Knotenpunkte der Complexfläche, welche auf dem singulären Strahl S_i nicht liegen.“

Zum Obigen wollen wir noch bemerken, dass die im Punkte γ_i der $R_3{}^i$ existirende Tangente doch in der Tangentialebene $\mathfrak{T}_1$, die längs der Erzeugenden S_i den Kegel g_i berührt, liegen muss. Wir wollen diese Tangente der $R_3{}^i$ im Punkte γ_i etwa mit $\mathsf{T}_3{}^i$ bezeichnen. ($\mathsf{T}_2{}^i$ ist die Tangente derselben $R_3{}^i$ im Punkte g_i.) Da aber die Ebene $\mathfrak{T}_1$ durch die Doppellinie G der Complexfläche läuft, so wird natürlich auch G von $\mathsf{T}_3{}^i$ getroffen.

Indem wir hier die Frage nach der Lage dieser Tangente $\mathsf{T}_3{}^i$ behandeln, werden wir durch unsere Betrachtungsweise auch auf die im Punkte γ_i der $R_3{}^i$ existirende Schmiegungsebene geführt. Für den Punkt g_i kennen wir dieselbe bereits nach früheren Ueberlegungen: sie ist die Ebene $\mathfrak{T}_2$, die man durch G und T_2^i legen kann. Wir werden analog finden, dass die Schmiegungsebene im Punkte γ_i durch Γ und T_3^i hindurchgeht.

Dies zu erweisen, benützen wir folgenden elementaren Satz aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung:

„Durch eine sogenannte Nichtsecante einer Raumcurve dritter Ordnung, d. h. eine Gerade, welche blos einen Punkt mit der letzteren gemein hat, ist immer ein Hyperboloid bestimmt, auf welchem die Raumcurve dritter Ordnung liegt."

Mit Hilfe dessen gelingt es, folgende Behauptung zu erweisen:

„Das Hyperboloid $\mathfrak{H}_i$, welches man durch die Gerade G und die auf dem Kegel aus g_i liegende Raumcurve dritter Ordnung R_3^i legen kann, enthält in der „Nichtsecantenschaar" ausser der Geraden G noch die Polare Γ und in der „Secantenschaar" jene drei übrigen singulären „Strahlen", welche nicht S_i sind."

Denn wir brauchen zunächst nur zu bemerken, dass ein singulärer Strahl, welcher nicht S_i ist, z. B. S_k, nach früheren Betrachtungen eine Secante der R_3^i ist und ausserdem noch die Gerade G trifft, somit drei Punkte mit dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_i$ gemein hat und aus letzterem Grunde ganz auf $\mathfrak{H}_i$ gelegen sein muss. — Die Gerade Γ hinwiederum trifft nach Früherem sämmtliche singuläre Strahlen, also auch die drei auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_i$ liegenden, woraus eine der obigen analoge Schlussweise ergiebt, dass auch Γ auf $\mathfrak{H}_i$ liegt. Da Γ nur einen Punkt mit R_3^i gemein hat, so gehört es natürlich mit der Geraden Γ zur Nichtsecantenschaar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_i$.

Wir können sofort noch eine weitere zur Secantenschaar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_i$ gehörige Gerade bezeichnen. Es ist dies nämlich die Tangente T_2^i im Punkte g_i der R_3^i. Selbe schneidet die Raumcurve in den zwei zusammenfallenden Punkten g_i, ferner die Gerade Γ, wonach auch sie drei Punkte mit dem $\mathfrak{H}_i$ gemeinsam hätte, somit ganz auf $\mathfrak{H}_i$ liegt und natürlich als Tangente der R_3^i zur Secantenschaar zählt.

Aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung wissen wir aber, dass auf jedem durch dieselbe gelegten Hyperboloide zwei Erzeugende der Secantenschaar vorhanden sind, welche die R_3 in zwei zusammenfallenden Punkten treffen und welche somit Tangenten der R_3 sind. Dieselben können auch gleichzeitig verschwinden, indem die sie bestimmende Involution eine elliptische wird. In unserem Falle sind sie aber reell, da eine derselben, nämlich T_2^i, reell ist. In der That erkennen wir, dass dies die Gerade T_3^i sein muss, d. h. die Tangente im Punkte γ_i an R_3^i. Diese schneidet als Tangente R_3^i in den zwei zusammenfallenden Punkten γ_i, aber ausserdem die Gerade G, wie wir gesehen haben. Mit dem Hyperboloid hätte also auch T_3^i drei Punkte gemein, d. h. T_3^i liegt ganz auf $\mathfrak{H}_i$.

Wir entnehmen hieraus:

„Die beiden Tangenten der R_3^i in den Punkten g_i bez. γ_i, d. i. die Geraden T_2^i, T_3^i, liegen ebenfalls auf dem erwähnten Hyperboloid $\mathfrak{H}_i$."

Die Schmiegungsebenen der R_3^i in den beiden Punkten g_i und γ_i fallen dann bekanntermassen mit den in jenen Punkten existirenden Tangentialebenen zusammen, d. h. sie sind

für Punkt g_i die Ebene $G\mathsf{T}_2^i$,
„ „ γ_i „ „ $\Gamma\mathsf{T}_3^i$.

Hiermit haben wir die uns zur Construction der Complexfläche aus den vier singulären Strahlen nöthigen Hilfsmittel entwickelt. Wir kommen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe:

Die Construction der Complexfläche aus den vier singulären Strahlen.

Wir erwähnen zunächst, dass die Construction dann für geleistet zu erachten sein wird, wenn es uns gelingt, in jeder durch die, uns noch gemäss unserer Voraussetzung zwar unbekannte Doppellinie G gehenden Ebene E fünf solche Punkte anzugeben, welche den darin enthaltenen Complexkegelschnitt zu construiren ermöglichen.

Wir kennzeichnen die Art der folgenden Lösung dadurch, dass wir darnach streben, zuerst die beiden Geraden G und Γ zu ermitteln und hierauf die vier oben behandelten Raumcurven dritter Ordnung zu construiren, von denen wir wissen, dass sie ganz auf unserer Fläche liegen. In einer durch G gehenden Ebene E werden wir dann jeweilig sogar acht Punkte finden, die auf dem in der Ebene E liegenden Complexkegelschnitt liegen werden.

„Die acht Punkte ordnen sich, gemäss ihrer Zugehörigkeit zu den vier Raumcurven dritter Ordnung, zu vier Punktepaaren einer Involution auf dem Complexkegelschnitte an."

Die Geraden G und Γ aber sind aus den vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 sofort zu finden. Sie sind nämlich nichts Anderes, als jene beiden Secanten, welche zugleich alle vier singulären Strahlen treffen.

Ihre Realität vorausgesetzt, ist es ebenso einfach, weiterhin eine beliebige der vier Raumcurven dritter Ordnung zu construiren, denn diese hängen nicht specieller Weise von G und Γ ab, d. h. sie bleiben nach oben dieselben, wenn wir G und Γ vertauschten. Construiren wir etwa R_3^i. Zu dem Ende bezeichnen wir die Schnittpunkte von S_i mit G und Γ bez. mit g_i, γ_i und suchen die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden auf dem durch die übrigen singulären Linien gehenden Hyperboloid $\mathfrak{H}_i$, welche zur Schaar der S_k gehören. Diese beiden Erzeugenden sind dann T_2^i und T_3^i, d. h. die in g_i und γ_i existirenden Tangenten der gesuchten R_3^i. Da aber die Ebenen $(\mathsf{T}_2^i G)$ bez. $(\mathsf{T}_3^i \Gamma)$ in den Punkten g_i bez. γ_i die Schmiegungsebenen der Raumcurve R_3^i in g_i bez. γ_i repräsentiren, so können wir sagen:

„Von jeder der vier Raumcurven dritter Ordnung kennen wir je zwei Schmiegungsebenen, die darin enthaltenen Tangenten sammt zugehörigen Berührpunkten."

Diese sechs Stücke reichen bekanntermassen aus, eine Raumcurve dritter Ordnung eindeutig zu construiren.

Hiermit sind die zur Construction der Fläche nöthigen Daten erschöpft.

Wir bemerken zu Vorstehendem noch, dass die Aufgabe, aus vier Geraden, als singulären Strahlen, eine Complexfläche zu construiren, nach obigen Erläuterungen doppeldeutig ist. Die beiden construirbaren Complexflächen haben die acht Knoten und vier singulären Strahlen gemein, ebenso die vier Raumcurven dritter Ordnung; die wir zur Construction benützten. Diese letzteren bilden mit den vier singulären Strahlen den vollständigen Durchschnitt der beiden möglichen Complexflächen.

Anmerkung. Die Construction der Fläche aus den vier singulären Axen kann nach Vorstehendem sofort angegeben werden, indem wir statt der vier Raumcurven dritter Ordnung vier Developpable dritter Classe leicht einführen.

München, Januar 1888.

Kleinere Mittheilungen.

XXIX. Zur Eliminationstheorie.

(Auszug eines Schreibens an Herrn Dr. Vivanti.)

... Das Theorem, womit Ihre jüngste Arbeit „*Ein Satz aus der Eliminationstheorie*“ (Zeitschr. f. Math. u. Phys,, Bd. XXXIII S. 184) endigt, kann auch, ohne Ihr Verfahren anzuwenden, von dem Resultantenausdruck hergeleitet werden, zu welchem die dyalitische Methode führt. Sind nämlich die Coefficienten $a_\lambda, a_{\lambda+1}, \ldots, a_{m-\lambda}, b_\lambda, b_{\lambda+1}, \ldots, b_{m-\lambda}$ der Gleichungen

$$a_0 x^m + \cdots + a_m = 0, \quad b_0 x^m + \cdots + b_m = 0$$

ganze Functionen einer Variabeln y, deren Grad bis auf p steigt, so sind in der Sylvester'schen Determinante die λ ersten und die λ letzten Verticalreihen von y unabhängig. Entwickelt man daher obige Determinanten nach den Minoren der Matrix, welche aus den übrigen $2(m-\lambda)$ Verticalreihen entsteht, so schliesst man sogleich, dass die Resultante eines Grades $\leqq 2(m-\lambda)p$ in y ist, worin Ihr Satz besteht.

Dieses Raisonnement kann in ähnlichen, aber viel allgemeineren Fällen angewandt werden, auch wenn nämlich die Grade der betrachteten Gleichungen verschieden sind und ihre von y unabhängigen Coefficienten nicht symmetrisch am Anfang und Ende derselben Gleichungen vertheilt sind. Sind z. B. die Coefficienten a_2, a_3, b_2 der Gleichungen

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \quad b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0$$

p-dimensionale Functionen von y, während die übrigen Coefficienten kein y enthalten, so ist der Grad der Resultante $\leqq 4p$, wie man aus dem Ausdruck

$$\left|\begin{array}{cc:cccc:c}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3
\end{array}\right|$$

ersieht. Es würde unschwer sein, einen Satz auszusprechen, welcher den Ihrigen einschliessen und alle Fälle betreffen würde, welche ich oben charakterisirt habe.

Das nämliche Raisonnement erlaubt auch die Erniedrigungen zu bestimmen, die manchmal in jenen oberen Grenzen für den Grad der Resultante eintreten; sind z. B. die Gleichungen

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0, \quad b_0x^2 + b_1x + b_2 = 0$$

vorhanden, wo nur die Coefficienten a_1, a_2, a_3 p-dimensionale Functionen von y sind, so ist der Resultantengrad scheinbar $\leqq 3p$; doch kann man in diesem Falle von der inneren Matrix keine mehr als $2p$-dimensionale Determinante herausziehen; daher ist der Resultantengrad $= 2p$. (Uebrigens ist ersichtlich: wenn zwei Gleichungen gegeben sind, welche bis auf die Grade m, n steigen und die Coefficienten der ersten, alle oder einige, p-dimensionale Functionen von y sind, während die der anderen von y unabhängig sind, so ist der Resultantengrad $= np$.)

Endlich bemerke ich, dass eine leichte Untersuchung der Sylvester-schen Determinante selbst zu einer oberen Grenze für den Grad der Resultanten führen kann, wenn die Coefficienten beliebige ganze Functionen einer Variabeln sind. Und im Allgemeinen ist meine Ueberzeugung, dass, um die Fragen zu lösen, die der von uns besprochenen ähnlich sind, das Beste ist, sich der Sylvester'schen Form der Resultanten zu bedienen. ...

Genua, den 14. Juli 1888. Prof. Gino Loria.

XXX. Ueber eine Eigenschaft der Binomialcoefficienten.

Der im laufenden Jahrgang dieser Zeitschrift S. 190 von Geh. Rath Schlömilch aufgestellte Satz, nach welchem die Summe der $(2k)^{\text{ten}}$ Potenzen der Binomialcoefficienten $\binom{n}{\lambda}$ für jeden Werth von k durch $n+1$ theilbar ist, lässt sich folgendermassen beweisen.

Sei erstens $n+1$ eine Primzahl. Es ist:

$$n(n-1)\ldots(n-\lambda+1) \equiv (-1)^\lambda \lambda! \ (mod.\, n+1);$$

da aber $\lambda!$ prim zu $n+1$ ist und in $n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)$ aufgeht, so folgt:

$$\binom{n}{\lambda} = \frac{n(n-1)\ldots(n-\lambda+1)}{\lambda!} \equiv (-1)^\lambda \ (mod.\, n+1);$$

also:

$$S = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda}^{2k} \equiv 0 \ (mod.\, n+1).$$

Sei zweitens $n+1$ das Product zweier verschiedenen Primzahlen $p+1$, $q+1$. Die $n+1$ Binomialcoefficienten $\binom{n}{\lambda}$ können in $q+1$ Gruppen von je $p+1$ Elementen eingetheilt werden, nämlich:

$$\text{erste Zeile:}\quad \binom{n}{0} \qquad \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{p},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$h^{\text{te}}\text{ Zeile:}\quad \binom{n}{(h-1)(p+1)}\binom{n}{(h-1)(p+1)+1}\cdots \binom{n}{h(p+1)-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$(q+1)^{\text{te}}\text{ Zeile:}\quad \binom{n}{q(p+1)} \quad \binom{n}{q(p+1)+1} \quad \cdots\binom{n}{(q+1)(p+1)-1}.$$

Setzen wir:

$$a_h^{(\nu)} = \binom{n}{(h-1)(p+1)+\nu-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p+1;\ h = 1, 2, \ldots, q+1),$$

so dass $a_h^{(\nu)}$ das ν^{te} Element der h^{ten} Zeile darstellt, so ist:

$$\text{a)}\quad a_h^{(\nu+1)} = a_h^{(\nu)} \frac{n-(h-1)(p+1)-\nu+1}{(h-1)(p+1)+\nu} = a_h^{(\nu)} \frac{(n+1)-[(h-1)(p+1)+\nu]}{(h-1)(p+1)+\nu}$$

da aber $\nu < p+1$, also $(h-1)(p+1)+\nu$ prim zu $p+1$ ist, so folgt:

$$a_h^{(\nu+1)} \equiv -a_h^{(\nu)} \quad (mod.\, p+1),$$

und daher:

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} (a_h^{(\nu)})^{2k} \equiv (p+1)(a_h^{(1)})^{2k} \equiv 0 \quad (mod.\, p+1),$$
$$S = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda}^{2k} = \sum_{h=1}^{q+1} \sum_{\nu=1}^{p+1} (a_h^{(\nu)})^{2k} \equiv 0 \quad (mod.\, p+1).$$

Man beweist auf dieselbe Weise, dass S auch durch $q+1$ theilbar ist.

Sei drittens $n+1$ das Quadrat einer Primzahl $(p+1)$. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so ergiebt sich aus a), da $(h-1)(p+1)+\nu$ zu $p+1$ und folglich zu $n+1$ relativ prim ist,

$$\text{b)}\qquad a_h^{(\nu+1)} \equiv -a_h^{(\nu)} \quad (mod.\, n+1),$$

und hieraus:

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} (a_h^{(\nu)})^{2k} \equiv (p+1)(a_h^{(1)})^{2k} \quad (mod.\, n+1),$$
$$S \equiv (p+1) \sum_{h=1}^{p+1} (a_h^{(1)})^{2k} \quad (mod.\, n+1).$$

Nun ist:

$$a_{h+1}^{(1)} = a_h^{(p+1)} \frac{n-h(p+1)+1}{h(p+1)} = a_h^{(p+1)} \frac{(p+1)-h(p+1)}{h(p+1)} = a_h^{(p+1)} \frac{p+1-h}{h};$$

da aber, wegen b)

$$a_h^{(p+1)} \equiv (-1)_h^{p+1} a_h^{(1)} \quad (mod.\, n+1)$$

und h prim zu $p+1$ ist, so folgt:

$$a_{h+1}^{(1)} \equiv -(-1)^{p+1} a_h^{(1)} \quad (mod.\, p+1),$$
$$\sum_{h=1}^{p+1} (a_h^{(1)})^{2k} \equiv (p+1)(a_1^{(1)})^{2k} \equiv 0 \quad (mod.\, p+1),$$

also:

$$S \equiv 0 \quad (mod.\, n+1).$$

Bei den complicirteren Fällen verfährt man ganz analog. Ich werde als Beispiel den Fall

$$n+1=(p+1)^3$$

behandeln, wo $p+1$ eine Primzahl ist. Stellen wir die $n+1$ Binomialcoefficienten in $(p+1)^2$ Zeilen von je $(p+1)$ Elementen ein:

$$\begin{array}{l} a_1^{(1)} \quad \dots a_1^{(p+1)}, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{(p+1)^2}^{(1)} \dots a_{(p+1)^2}^{(p+1)}, \end{array}$$

so ist, wie früher (da ν prim zu $p+1$, folglich zu $n+1$ ist):

$$a_h^{(\nu+1)} \equiv -a_h^{(\nu)} \quad (mod.\ n+1),$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{p+1} (a_h^{(\nu)})^{2k} \equiv (p+1)(a_h^{(1)})^{2k} \quad (mod.\ n+1),$$

$$S \equiv (p+1) \sum_{h=1}^{(p+1)^2} (a_h^{(1)})^{2k} \quad (mod.\ n+1).$$

Ferner ist:

$$a_{h+1}^{(1)} = a_h^{(p+1)} \frac{n-h(p+1)+1}{h(p+1)} = a_h^{(p+1)} \frac{(p+1)^2-h}{h}.$$

Ist h prim zu $p+1$, so folgt:

$$a_{h+1}^{(1)} \equiv -a_h^{(p+1)} \,(mod.\ (p+1)^2) \equiv \pm\, a_h^{(1)} \,(mod.\ (p+1)^2);$$

geht aber $p+1$ in h auf, und setzt man $h=l(p+1)$, wo l nothwendig prim zu $p+1$ ist, so ergiebt sich:

$$a_{h+1}^{(1)} = a_h^{(p+1)} \frac{p+1-l}{l} \equiv -a_h^{(p+1)} \,(mod.\ p+1) \equiv \pm\, a_h^{(1)} \,(mod.\ p+1).$$

Aus den gefundenen Relationen folgt:

$$\begin{array}{llll} (a_1^{(1)})^{2k} & \equiv (a_2^{(1)})^{2k} & \equiv \dots \equiv (a_{p+1}^{(1)})^{2k} & \equiv P_1 \quad (mod.\ (p+1)^2), \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ (a_{(h-1)(p+1)+1}^{(1)})^{2k} & \equiv (a_{(h-1)(p+1)+2}^{(1)})^{2k} & \equiv \dots \equiv (a_{h(p+1)}^{(1)})^{2k} & \equiv P_h \quad (mod.\ (p+1)^2), \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ (a_{p(p+1)+1}^{(1)})^{2k} & \equiv (a_{p(p+1)+2}^{(1)})^{2k} & \equiv \dots \equiv (a_{(p+1)^2}^{(1)})^{2k} & \equiv P_{p+1} \quad (mod.\ (p+1)^2), \end{array}$$

$$P_1 \equiv P_2 \equiv \dots \equiv P_h \equiv \dots \equiv P_{p+1} \quad (mod.\ p+1),$$

also:

$$\sum_{h=1}^{(p+1)^2} (a_h^{(1)})^{2k} \equiv (p+1) \sum_{\lambda=1}^{p+1} P_\lambda \quad (mod.\ (p+1)^2),$$

$$\sum_{\lambda=1}^{p+1} P_\lambda \equiv (p+1) P_1 \,(mod.\ p+1) \equiv 0 \quad (mod.\ p+1).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\sum_{h=1}^{(p+1)^2} (a_h^{(1)})^{2k} \equiv 0 \quad (mod.\ (p+1)^2)$$

und endlich:

$$S \equiv 0 \quad (mod.\ n+1).$$

Mantua. G. Vivanti.

XXXI. Ueber den mittleren Abstand eines Planeten von der Sonne.

Man bezeichnet als den mittleren Abstand eines Planeten (Kometen) von der Sonne oder eines Satelliten vom Hauptplaneten die halbe grosse Axe seiner elliptischen Bahn — und in der That entspricht diese Bezeichnung auch der rein geometrischen Anschauungsweise am besten, mag man die halbe grosse Axe als das arithmetische Mittel des grössten und kleinsten Leitstrahls ansehen oder als den Grenzwerth für das arithmetische Mittel der die Ellipsenperipherie in gleiche Theile theilenden Leitstrahlen (vergl. Schlömilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, 3. Aufl., Bd. 2 S. 390).

Anders stellt sich die Sache vom astronomischen Standpunkte aus dar, wo es das Natürlichste ist, die Oerter des Planeten nach gleichen Zwischenzeiten zu Grunde zu legen, also seine Umlaufszeit in gleiche Theile getheilt zu denken und den Grenzwerth des arithmetischen Mittels der den einzelnen Zeittheilpunkten entsprechenden Leitstrahlen (für unendlich klein werdende Zwischenzeiten) als den mittleren Abstand gelten zu lassen. Hierauf will ich im Nachfolgenden in aller Kürze eingehen.

Nach dem ersten und zweiten Kepler'schen Gesetze kann statt der Zeit der Flächeninhalt des elliptischen Sectors, der seinen Scheitel im Brennpunkte hat, als unabhängig variabel eingeführt werden. Bildet also der zum Perihel gehende Leitstrahl den festen Grenzstrahl des elliptischen Sectors und bezeichnen beziehungsweise r, ϱ, ω, u einen beliebigen Leitstrahl, die gesuchte mittlere Entfernung, die wahre und die excentrische Anomalie, so hat man (S Flächeninhalt des elliptischen Sectors):

$$\varrho S = \int_0^S r\,dS = \tfrac{1}{2}\int_0^\omega r^3\,d\omega.$$

Zufolge der bekannten Formeln

$$r = a(1 - e\cos u), \quad d\omega = \frac{b}{a}\cdot\frac{du}{1 - e\cos u}$$

ist ferner

$$\int r^3\,d\omega = a^2 b \int (1 - e\cos u)^2\,du.$$

Demnach wird für die ganze Ellipse

$$\pi a b \varrho = \tfrac{1}{2} a^2 b \int_0^{2\pi} (1 - e\cos u)^2\,du,$$

mithin

$$\varrho = a + \tfrac{1}{4} a e^2.$$

Die zu diesem mittleren Abstande gehörige wahre Anomalie folgt dann aus $a + \frac{1}{4} a e^2 = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\omega}$, woraus $\cos\omega = \frac{-3e}{2+e^2}$, die zugehörige Zeit t (vom Durchgang des Planeten durch das Perihel an gerechnet) aus der bekannten Relation $\left(\frac{u - e\sin u}{2\pi}\right) T$, wo T die anomalistische Umlaufszeit des Planeten bedeutet, während die dem Vector a entsprechende wegen des dann statthabenden $u = \frac{\pi}{2}$ durch $\left(\frac{\frac{\pi}{2} - e}{2\pi}\right) T$ gegeben ist.

Für die Mehrzahl der Planeten unseres Sonnensystems ist e und um so mehr e^2 ein kleiner Bruch, demnach auch $\frac{1}{2}ae^2$ relativ nicht gross. Anders bei den stärker excentrischen Bahnen einzelner Planeten (Merkur, Pallas, Aethra) und noch weit mehr der Kometen. Die folgenden drei Beispiele mögen dies veranschaulichen.

Für unsern Wohnplaneten ist $e = 0{,}0167$, $e^2 = 0{,}00028$, a rot. 20 Millionen geogr. Meilen. Es wird hier $\frac{1}{2}ae^2 =$ rot. 2820 g. M., $\angle\omega = 91^0\, 26'\, 23''$, $\angle u = 90^0\, 28'\, 44'',4 = \frac{326724}{206265} = 1{,}58445$, $t = 91{,}13^D$, während für $r = a$ $t = 90{,}337^D$ ist (Zeitdifferenz $0{,}79^D$). Da die Erde gegenwärtig am 31. Januar durch ihr Perihel geht, so hat sie also am 3. (im Schaltjahr am 2.) April und am 2. October ihren mittleren Abstand von der Sonne.

Für Merkur, wo $e = 0{,}2056$, $a =$ rot. 7750000 g. M., ist $\frac{1}{2}ae^2 = 110985$ g. M., $\omega = 107^0\, 34'43'',6$, $u = 95^0\, 54'2'' = 1{,}67378$, $T = 87{,}97^D$, $t = 45^D$, während für $r = a$ $t = 21{,}76^D$ wird (Zeitunterschied $23{,}24^D$).

Für den Encke'schen Kometen, wo $e = 0{,}8467$, ist $\frac{1}{2}ae^2 =$ rot. 795000 g. M. Die mittlere Entfernung erreicht er $346{,}48^D$ nach (und vor) dem Periheldurchgang, $193{,}45^D$ später (bezw. früher) als die Entfernung a von der Sonne.

Liegnitz. Dr. O. Bermann.

XXXII. Weitere Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten.

In dieser Zeitschrift* ist gezeigt worden, wie sich Gammafunctionen mit negativem Argument durch ein Integral darstellen lassen; es ist nämlich, wenn k eine positive ganze Zahl bedeutet (wobei ich den a. a. O. gebrauchten Index 1 fortlasse):

$$1)\qquad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{1.2} \pm \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right) dx, \qquad -k > \alpha > -(k+1).$$

Ebenso lässt sich das Product $\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, welches für positive α und β gleich dem sogenannten Euler'schen Integral erster Gattung $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ oder $B(\alpha, \beta)$ ist, auch für negative Werthe von α und β in die Form eines Integrals bringen.

* Jahrg. 32 (1887), S. 246.

Nehmen wir zu dem Zwecke β zunächst als positiv an, während α zwischen $-k$ und $-(k+1)$ liegen soll. Schreiben wir dann in 1) yx statt x, y als positive Grösse vorausgesetzt, und multipliciren beiderseits mit $e^{-y}y^{\beta-1}\,dy$, so entsteht die Gleichung:

$$2)\quad \begin{aligned} \Gamma(\alpha)\,e^{-y}y^{\beta-1}\,dy = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\Big(e^{-y(1+x)}y^{\alpha+\beta-1} - e^{-y}y^{\alpha+\beta-1} \\ + xe^{-y}y^{\alpha+\beta} \mp \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k e^{-y}y^{\alpha+\beta+k-1}}{k!}\Big)\,dx\,dy, \\ -k > \alpha > -(k+1). \end{aligned}$$

Ist jetzt $\alpha+\beta$ positiv, so können wir diese Gleichung beiderseits nach y von 0 bis ∞ integriren und erhalten dann, wie sehr leicht zu sehen:

$$3)\quad \begin{aligned} \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty x^{\alpha-1}\Big(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+\beta}} - 1 + (\alpha+\beta)x \\ -(\alpha+\beta+1)_2x^2 \pm \dots + (-1)^{k+1}(\alpha+\beta+k-1)_k x^k\Big)\,dx. \end{aligned}$$

Ist aber $\alpha+\beta$ negativ und liegt etwa zwischen den ganzen negativen Zahlen $-h$ und $-(h+1)$, wobei $h<k$ sein muss, so ist der Coefficient von $x^{\alpha-1}\,dx\,dy$ in 2) auf eine etwas andere Form zu bringen. Bezeichnen wir ihn nämlich mit Q und setzen noch z. A. $\alpha+\beta=\gamma$, so schreibe ich:

$$\begin{aligned} Q = {} & y^{\gamma-1}\Big(e^{-y(1+x)} - 1 + y(1+x) - \frac{y^2(1+x)^2}{1.2} \pm \dots + (-1)^{h+1}\frac{y^h(1+x)^h}{h!}\Big) \\ & - y^{\gamma-1}\Big(e^{-y} - 1 + y - \frac{y^2}{1.2} \pm \dots + (-1)^{h+1}\frac{y^h}{h!}\Big) \\ & + xy^\gamma\Big(e^{-y} - 1 + y - \frac{y^2}{1.2} \pm \dots + (-1)^h\frac{y^{h-1}}{(h-1)!}\Big) \\ & \mp \dots + (-1)^{h+1}\frac{x^h y^{\gamma+h-1}}{h!}(e^{-y}-1) \\ & + (-1)^{h+2}\frac{x^{h+1}y^{\gamma+h}e^{-y}}{(h+1)!} + \dots + (-1)^{k+1}\frac{x^k y^{\gamma+k-1}e^{-y}}{k!} + Q_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 = {} & y^{\gamma-1}(1-1) - y^\gamma((1+x)-1-x) + y^{\gamma+1}\Big(\frac{(1+x)^2}{1.2} + \frac{1}{1.2} - x - \frac{x^2}{1.2}\Big) \\ & \mp \dots + (-1)^h y^{\gamma+h-1}\Big(\frac{(1+x)^h}{h!} - \frac{1}{h!} - \frac{x}{1}\cdot\frac{1}{(h-1)!} - \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{1}{(h-2)!} - \dots - \frac{x^h}{h!}\Big). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck Q_1 ist also identisch gleich 0, und setze ich nun für Q seinen Werth mit Fortlassung von Q_1 in 2) ein, so kann ich die Gleichung, da $\alpha+\beta$ zwischen $-h$ und $-(h+1)$, $\alpha+\beta+1$ zwischen $-(h-1)$ und $-h$ etc., $\alpha+\beta+h$ zwischen 0 und -1 liegt, während $\alpha+\beta+h+1, \dots, \alpha+\beta+k$ positiv sind, mit Rücksicht auf 1) von 0 bis ∞ nach y integriren, erhalte dann aber genau die Gl. 3) wieder, so dass deren rechte Seite ihrer Form nach nicht von der Lage von $\alpha+\beta$, sondern nur von der Lage von α abhängig ist.

Sei nunmehr ausser α auch noch β negativ und liege zwischen $-h$ und $-(h+1)$. Dann haben wir die Gl. 1) mit

$$y^{\beta-1}\left(e^{-y}-1+y\mp\cdots+(-1)^{h+1}\frac{y^h}{h!}\right)dy$$

zu multipliciren und nach Umformung der rechten Seite von 0 bis ∞ nach y zu integriren. Die Rechnung lässt sich für $h=0$ leicht durchführen, wird aber für grössere Werthe von h unbequem in der Darstellung und ich ziehe es vor, das Resultat hinzuschreiben und seine Richtigkeit zu beweisen. Setze ich unter Voraussetzung negativer α und β:

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\Big\{&\frac{1}{(1+x)^\gamma}-(1-\gamma x+(\gamma+1)_2x^2\mp\cdots+(-1)^k(\gamma+k-1)_kx^k)\\ &-\frac{1}{x^\gamma}\left(1-\frac{\gamma}{x}+\frac{(\gamma+1)_2}{x^2}\mp\cdots+(-1)^h\frac{(\gamma+h-1)_h}{x^h}\right)\Big\}\,dx,\end{aligned} \tag{4}$$

$$-k>\alpha>-(k+1),\quad -h>\beta>-(h+1),\quad \alpha+\beta=\gamma,$$

so behaupte ich, dass für beliebige negative Werthe von α und β:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=B(\alpha,\beta) \tag{5}$$

ist. Integrire ich nämlich 4) partiell, so kommt:

$$\begin{aligned}B(\alpha,\beta)=\Bigg[\frac{x^\alpha}{\alpha}\Big\{&\frac{1}{(1+x)^\gamma}-(1\mp\cdots+(-1)^k(\gamma+k-1)_kx^k)\\ &-\frac{1}{x^\gamma}\left(1\mp\cdots+(-1)^h\frac{(\gamma+h-1)_h}{x^h}\right)\Big\}\Bigg]_0^\infty\\ +\frac{\gamma}{\alpha}\int_0^\infty x^\alpha\Big\{&\frac{1}{(1+x)^{\gamma+1}}-(1-(\gamma+1)x\pm\cdots+(-1)^{k-1}(\gamma+k-1)_{k-1}x^{k-1})\\ &-\frac{1}{x^{\gamma+1}}\left(1-\frac{\gamma+1}{x}\pm\cdots+(-1)^h\cdot\frac{(\gamma+h)_h}{x^h}\right)\Big\}\,dx.\end{aligned}$$

Der vom Integralzeichen freie Summand ergiebt sich, wenn man beachtet, dass für x bez. kleiner oder grösser als 1:

$$\frac{1}{(1+x)^\gamma}-(1\pm\cdots+(-1)^k(\gamma+k-1)_kx^k)=(-1)^k\{(\gamma+k)_{k+1}x^{k+1}\mp\cdots\},\quad x<1;$$

$$\frac{1}{(1+x)^\gamma}-\frac{1}{x^\gamma}\left(1\pm\cdots+(-1)^h(\gamma+h-1)_hx^h\right)=(-1)^h\left\{\frac{(\gamma+h)_{h+1}}{x^{\gamma+h+1}}\mp\cdots\right\},\quad x>1$$

ist, in beiden Grenzen als Null und es wird:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\gamma}{\alpha}B(\alpha+1,\beta). \tag{6}$$

Setzt man ferner in 4) $\frac{1}{x}$ statt x, so erhält man einen ganz ähnlichen Ausdruck, in welchem nur gegen 4) α mit β, k mit h vertauscht ist. Die analoge Behandlung desselben führt zu der Gleichung:

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\gamma}{\beta}B(\alpha,\beta+1). \tag{7}$$

Gelte nun die Gleichung 5) für β zwischen 0 und -1, wofür, wie gesagt, der Beweis leicht zu führen ist, und liege nunmehr β zwischen -1 und -2, so gilt die Gleichung:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}=B(\alpha,\beta+1).$$

Es ist aber:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}=\frac{\Gamma(\alpha).\beta\,\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)}$$

und nach 7):

$$B(\alpha,\beta+1)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta),$$

somit:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=B(\alpha,\beta),$$

d. h. die Gl. 5) ist für ein zwischen -1 und -2 liegendes β und in gleicher Schlussart allgemein bewiesen. — Mittels der Substitution in 4):

$$x=\frac{v}{1-v}$$

nimmt die Gl. 5) die Form an:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)=\Gamma(\alpha+\beta)&\\ \times\int_0^\infty v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\Big\{1-\frac{1}{(1-v)^\gamma}\Big(1-\gamma\frac{v}{1-v}+(\gamma+1)_2\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^2\mp\cdots+(-1)^k(\gamma+k-1)_k\Big(\frac{v}{1-v}\Big)^k\Big)&\\ -\frac{1}{v^\gamma}\Big(1-\gamma\frac{1-v}{v}+(\gamma+1)_2\Big(\frac{1-v}{v}\Big)^2\mp\cdots+(-1)^h(\gamma+h-1)_h\Big(\frac{1-v}{v}\Big)^h\Big)\Big\}\,dv,&\\ -k>\alpha>-(k+1),\quad -h>\beta>-(h+1),\quad \alpha+\beta=\gamma,&\end{aligned} \tag{8}$$

worin auch gleichzeitig α mit β und h mit k vertauscht werden dürfen. In dieser Gl. 8) sind die in $\frac{1}{(1-v)^\gamma}$ multiplicirten Glieder fortzulassen, wenn α positiv ist, die in $\frac{1}{v^\gamma}$ multiplicirten, wenn β positiv ist.

Wenn $\alpha+\beta=\gamma$ eine negative ganze Zahl ist, so muss, da $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)$ einen bestimmten endlichen Werth behält, $\Gamma(\alpha+\beta)$ aber unendlich wird, das Integral gleich Null sein, und in der That lässt sich in diesem Falle leicht nachweisen, dass die Klammer $\{\,\}$ identisch verschwindet.

Beispiele der Anwendung.

Um zu zeigen, dass sich mit der Gl. 8) wirklich, so zu sagen, Etwas anfangen lässt, will ich durch Beispiele darthun, wie die bekannte Methode, Reihen umzuformen oder zu summiren,* sich auf negative α und β ausdehnen lässt.

* Siehe Schlömilch, Compend. d. höh. Analysis II, in der Abhandlung über die Gammafunctionen (§ VII).

1.

Wenn $x^2 < 1$ und v zwischen 0 und 1 einschliesslich der Grenzen liegt, so gilt für jedes μ die Entwickelung:

$$(1-x(1-v))^\mu = 1-(\mu)_1\, x(1-v) + (\mu)_2\, x^2(1-v)^2 \mp \cdots$$

oder:

$$9)\quad \left(1+\frac{x}{1-x}v\right)^\mu = \frac{1}{(1-x)^\mu}\{1-(\mu)_1\, x(1-v)+(\mu)_2\, x^2(1-v)^2 \mp \cdots\}.$$

Liegt jetzt x zwischen -1 und $+\frac{1}{2}$, mit Ausschluss der Grenzen, so gilt auch die Gleichung:

$$10)\quad \begin{aligned} &1+(\mu)_1\frac{x}{1-x}v+(\mu)_2\left(\frac{x}{1-x}\right)v^2+\cdots \\ &=\frac{1}{(1-x)^\mu}\{1-(\mu)_1\, x(1-v)+(\mu)_2\, x^2(1-v)^2 \mp \cdots\}.\end{aligned}$$

Multiplicire ich diese mit $v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\,dv$, so kann ich unter Voraussetzung positiver α und β von 0 bis 1 integriren und erhalte nach leichten Reductionen:

$$11)\quad \begin{aligned} &1+(\mu)_1\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x+(\mu)_2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}x^2+(\mu)_3\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}x^3+\cdots \\ &=\frac{1}{(1-x)^\mu}\left\{1-(\mu)_1\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{x}{1-x}+(\mu)_2\frac{\beta(\beta+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+\cdots\right\}.^{*}\end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung will ich nun für negative α und β erweisen. Dabei kann ich, wie die Gl. 8) zeigt, unabhängig voneinander erst α, dann β als negativ in Betracht ziehen. Liege nun also α zwischen $-k$ und $-(k+1)$; dann multiplicire ich 10) mit $v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}$ und bringe die linke Seite auf die Form $L+L_\alpha$:

$$12)\quad \begin{aligned} L=\;&v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\left\{1-\frac{1}{(1-v)^\gamma}+\frac{\gamma v}{(1-v)^{\gamma+1}}\mp\cdots+(-1)^{k+1}\frac{(\gamma+k-1)_k v^k}{(1-v)^{\gamma+k}}\right\} \\ &+(\mu)_1\frac{x}{1-x}v^\alpha(1-v)^{\beta-1}\left\{1-\frac{1}{(1-v)^{\gamma+1}}\pm\cdots+(-1)^k\frac{(\gamma+k-1)_{k-1}v^{k-1}}{(1-v)^{\gamma+k}}\right\} \\ &+(\mu)_2\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 v^{\alpha+1}(1-v)^{\beta-1}\left\{1-\frac{1}{(1-v)^{\gamma+2}}\pm\cdots+(-1)^{k-1}\frac{(\gamma+k-1)_{k-2}v^{k-2}}{(1-v)^{\gamma+k}}\right\} \\ &+\cdots \\ &+(\mu)_k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k v^{\alpha+k-1}(1-v)^{\beta-1}\left\{1-\frac{1}{(1-v)^{\gamma+k}}\right\} \\ &+\sum_{r=k+1}^{\infty}(\mu)_r\left(\frac{x}{1-x}\right)^r v^{\alpha+r-1}(1-v)^{\beta-1},\qquad \gamma=\alpha+\beta;\end{aligned}$$

---

* Vergl. Kummer, Ueber die hypergeometrische Reihe, in Crelle's Journ. Bd. 15.

$$L_a = \frac{v^{a-1}}{(1-v)^{a+1}}\left\{1-\gamma\frac{v}{1-v}+(\gamma+1)_2\left(\frac{v}{1-v}\right)^2 \mp \cdots + (-1)^k(\gamma+k-1)_k\left(\frac{v}{1-v}\right)^k\right\}$$
$$+(\mu)_1\frac{x}{1-x}\,\frac{v^a}{(1-v)^{a+2}}\left\{1-(\gamma+1)\frac{v}{1-v}\pm\cdots+(-1)^{k-1}(\gamma+k-1)_{k-1}\left(\frac{v}{1-v}\right)^{k-1}\right\}$$
$$+\cdots$$
$$+(\mu)_k\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\frac{v^{a+k-1}}{(1-v)^{a+k+1}}\cdot 1,$$

oder anders geordnet:

$$13)\quad L_a=\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{v^{a+n-1}}{(1-v)^{a+n+1}}\left\{(\gamma+n-1)_n-(\mu)_1(\gamma+n-1)_{n-1}\frac{x}{1-x}\right.$$
$$\left.+(\mu)_2(\gamma+n-1)_{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\mp\cdots+(-1)^n(\mu)_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\right\},$$

worin, wie auch in den folgenden Gleichungen, Binomialcoefficienten mit dem Index 0 als 1, mit negativem Index als 0 anzusehen sind.

Die rechte Seite bringe ich auf die Form $R+R_a$:

$$R=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{v^{a-1}(1-v)^{\beta+r-1}}{(1-x)^{\mu}}(\mu)_r x^r\left\{1-\frac{1}{(1-v)^{\gamma+r}}+\frac{(\gamma+r)v}{(1-v)^{\gamma+r+1}}\right.$$
$$\left.\mp\cdots+(-1)^{k-1}\frac{(\gamma+r+k-1)_k v^k}{(1-v)^{\gamma+r+k}}\right\},$$

und R_a, in der Art geordnet, dass aus jeder Zeile der Coefficient von $\frac{v^{a+n-1}}{(1-v)^{a+n+1}}$ genommen wird, ist:

$$14)\quad R_a=\frac{1}{(1-x)^{\mu}}\sum_{n=0}^{k}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^{n+r}\frac{v^{a+n-1}}{(1-v)^{a+n+1}}(\mu)_r(\gamma+n+r-1)_n x^r.$$

Nun ist, wenn μ und p beliebige, n und r aber ganze positive Zahlen bedeuten:

$$\sum_{r=0}^{\infty}(\mu)_r(p+r)_n x^r=\frac{1}{x^{p-n}}\frac{d^n(x^p(1+x)^{\mu})}{n!\,dx^n},$$

d. i. ausgeführt:

$$15)\quad \sum_{r=0}^{\infty}(\mu)_r(p+r)_n x^r$$
$$=(1+x)^{\mu}\left\{(p)_n+(\mu)_1(p)_{n-1}\frac{x}{1+x}+(\mu)_2(p)_{n-2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\cdots+(\mu)_n\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right\}.$$

Setze ich hierin $-x$ statt x und $\gamma+n-1$ statt p, so wird der Coefficient von $\frac{v^{a+n-1}}{(1-v)^{a+n+1}}$ in 14) genau gleich demjenigen in 13); somit ist:

$$L_a=R_a.$$

Ist β auch negativ und liegt zwischen $-h$ und $-(h+1)$, so sind zu L und R noch die der zweiten Zeile in 8) entsprechenden Glieder hinzuzufügen, die ergänzenden Glieder L_β und R_β sind also:

$$L_\beta=\sum_{n=0}^{h}(-1)^n\frac{(1-v)^{\beta+n-1}}{v^{\beta+n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}(\gamma+n+r-1)_n(\mu)_r\left(\frac{x}{1-x}\right)^r,$$

$$R_\beta = \frac{1}{(1-x)^\mu}\sum_{n=0}^{h}(-1)^n\frac{(1-v)^{\beta+n-1}}{v^{\beta+n+1}}\{(\gamma+n-1)_n+(\mu)_1(\gamma+n-1)_{n-1}x + \cdots + (\mu)_n x^n\}.$$

Setzt man aber in 15) $\frac{x}{1-x}$ statt x, also $\frac{1}{1-x}$ statt $1+x$ und x statt $\frac{x}{1+x}$, sowie $\gamma+n-1$ statt p, so sieht man, dass $L_\beta = R_\beta$ wird. Da nun:

$$L+L_\alpha+L_\beta = R+R_\alpha+R_\beta$$

ist, so ist nunmehr auch:

$$L=R$$

und die Multiplication mit dv und Integration von 0 bis 1 führt gemäss 8) wieder auf die Gl. 11). Man überzeugt sich übrigens leicht, dass dieselbe auch noch für $x=\frac{1}{2}$ gilt, wenn man die Bedingung:

$$\mu+\beta+1>0$$

hinzufügt.

2.

Setze ich in 9) $x=\frac{1}{2}$, so entsteht:

$$16)\quad (1+v)^\mu = 2^\mu\left\{1-\frac{(\mu)_1}{2}(1-v)+\frac{(\mu)_2}{2^2}(1-v)^2-\frac{(\mu)_3}{2^3}(1-v)^3\pm\cdots\right\}.$$

Multiplicire ich mit $v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}dv$, setze aber:

$$\mu=\beta-1,$$

so wird:

$$17)\quad \begin{aligned} &v^{\alpha-1}(1-v^2)^{\beta-1}dv \\ &= 2^{\beta-1}v^{\alpha-1}\left\{(1-v)^{\beta-1}-\frac{(\beta-1)_1}{2}(1-v)^\beta+\frac{(\beta-1)_2}{2^2}(1-v)^{\beta+1}\mp\cdots\right\}dv.\end{aligned}$$

Sind nun α und β positiv, so komme ich, wenn ich von 0 bis 1 (links mittels der Substitution $v^2=u$) integrire, sehr leicht zu dem Resultat:

$$18)\quad \begin{aligned} &1-\frac{(\beta-1)\beta}{1.(\alpha+\beta)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{(\beta-2)(\beta-1)\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\cdot\frac{1}{4}-\frac{(\beta-3)\ldots(\beta+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)\ldots(\alpha+\beta+2)}\cdot\frac{1}{8}\pm\cdots \\ &= \frac{1}{2^\beta}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}.\end{aligned}$$

Liege aber α zwischen $-2k$ und $-(2k+1)$ oder zwischen $-(2k+1)$ und $-(2k+2)$, $\frac{\alpha}{2}$ also zwischen $-k$ und $-(k+1)$, während β positiv bleibe, so muss auf der linken Seite von 17) (mit $v^2=u$) das Integral:

$$19)\quad \int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-u)^{\beta-1}.\left\{1-\frac{1}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+\beta}}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)u}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+\beta+1}} \mp\cdots+(-1)^{k+1}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+\beta+k-1\right)_k u^k}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+\beta+k}}\right\}\frac{du}{2},$$

dessen Werth nach 8) $\frac{1}{2}\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$ ist, zu erzielen gesucht werden. Ich habe also auf derselben Seite, um sie ungeändert zu lassen, noch die sofort aus 19) ersichtlichen Integrale hinzuzufügen. Addire ich ausserdem zu 17) vor der Integration die identische Gleichung:

$$20)\quad -\left\{u^{\frac{\alpha}{2}-1}-(\beta-1)_1 u^{\frac{\alpha}{2}}+(\beta-1)_2 u^{\frac{\alpha}{2}+1}\mp\cdots+(-1)^k(\beta-1)_k u^{\frac{\alpha}{2}+k-1}\right\}\frac{du}{2}$$
$$=-\left\{v^{\alpha-1}-(\beta-1)_1 v^{\alpha+1}+(\beta-1)_2 v^{\alpha+3}\mp\cdots+(-1)^k(\beta-1)_k v^{\alpha+2k-1}\right\}dv$$

und beachte, dass:

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\beta+r-1\right)_r=\left(\frac{\alpha}{2}+r\right)_r+\left(\frac{\alpha}{2}+r\right)_{r-1}(\beta-1)_1+\left(\frac{\alpha}{2}+r\right)_{r-2}(\beta-1)_2$$
$$+\cdots+(\beta-1)_r$$

ist, so kommt im Ganzen auf der linken Seite von 17) noch folgende Summe von Integralen J hinzu:

$$J=-\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}-1}\left\{1-\frac{1}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+1}}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)u}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+2}}\mp\cdots+(-1)^{k+1}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+k\right)_k u^k}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+k+1}}\right\}\frac{du}{2}$$
$$+(\beta-1)\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}}\left\{1-\frac{1}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+2}}\pm\cdots+(-1)^k\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+k\right)_{k-1}u^{k-1}}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+k+1}}\right\}\frac{du}{2}$$
$$-(\beta-1)_2\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}+1}\left\{1-\frac{1}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+3}}\pm\cdots+(-1)^{k-1}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}+k\right)_{k-2}u^{k-2}}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+k+1}}\right\}\frac{du}{2}$$
$$\pm\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}(\beta-1)_k\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{2}+k-1}\left\{1-\frac{1}{(1-u)^{\frac{\alpha}{2}+k+1}}\right\}\frac{du}{2}.$$

Diese Summe erhält aber den Werth [indem in 8) $\beta=1$ gesetzt wird]:

$$21)\quad J=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}-(\beta-1)_1\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+2\right)}\pm\cdots+(-1)^k(\beta-1)_k\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k+1\right)}\right\}$$
$$=-\frac{1}{\alpha}+\frac{(\beta-1)_1}{\alpha+2}-\frac{(\beta-1)_2}{\alpha+4}\pm\cdots+(-1)^{k+1}\frac{(\beta-1)_k}{\alpha+2k}.$$

Da ferner die rechte Seite der Gl. 16) aus derjenigen der Gl. 9) entsteht, wenn $x=\frac{1}{2}$, $\mu=\beta-1$ gesetzt wird, sonst aber in ihrer Form ganz ungeändert bleibt, so sind auch die derselben nach der Multiplication mit

$v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}$, aber vor der Integration fortzunehmenden und gleichzeitig hinzuzufügenden Glieder zunächst dieselben, wie bei jener, also mit Hinblick auf 14): R_α mit $x=\frac{1}{2}$, $\mu=\beta-1$, $2k$ oder $2k+1$ statt k. Dies R_α muss dann mit dv multiplicirt, um die rechte Seite von 20) vermehrt und dann von 0 bis 1 integrirt werden, so dass wir den Werth eines Integrales J_1:

$$22)\quad J_1=\int_0^1\{R_\alpha-(v^{\alpha-1}-(\beta-1)v^{\alpha+1}\pm\cdots+(-1)^k(\beta-1)_k v^{\alpha+2k-1})\}\,dv$$

zu bestimmen haben. Jetzt ist nach 15) die in R_α [s. 14)] vorkommende Grösse:

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^{\beta-1}}\sum_{r=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2})^r(\beta-1)_r(\alpha+\beta+n+r-1)_n$$
$$=(\alpha+n+\beta-1)_n-(\beta-1)_1(\alpha+n+\beta-1)_{n-1}+(\beta-1)_2(\alpha+n+\beta-1)_{n-2}\mp\cdots$$

Dies ist aber wieder, weil allgemein der Coefficient von x^n in $(1+x)^{p+q}(1-x)^q$ gleich dem von x^n in $(1+x)^p(1-x^2)^q$ ist,

$$=(\alpha+n)_n-(\alpha+n)_{n-2}(\beta-1)_1+(\alpha+n)_{n-4}(\beta-1)_2\mp\cdots,$$

bis die Reihe von selbst abbricht. Dies geschieht aber spätestens, da n höchstens gleich $2k$ oder gleich $2k+1$ werden kann, wenn im Index von n eine grössere (gerade) Zahl als $2k$ abgezogen wird. Daher nimmt, wenn über dem ersten Summenzeichen in 14) k durch m, in der Bedeutung $2k$ oder $2k+1$, ersetzt wird, R_α die Gestalt an:

$$R_\alpha=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\{(\alpha+n)_n-(\beta-1)_1(\alpha+n)_{n-2}+(\beta-1)_2(\alpha+n)_{n-4}$$
$$\mp\cdots+(-1)^k(\beta-1)\;\;(\alpha+n)_{n-2k}\}\frac{v^{\alpha+n-1}}{(1-v)^{\alpha+n+1}}.$$

Darin ist die Summation für $(\alpha+n)_n$ mit $n=0$, für $(\alpha+n)_{n-2}$ mit $n=2$, für $(\alpha+n)_{n-4}$ mit $n=4$ und so fort zu beginnen. Demnach wird nach 22):

$$-J_1=\int_0^1 v^{\alpha-1}\left\{1-\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{(\alpha+n)_n v^n}{(1-v)^{\alpha+n+1}}\right\}dv$$
$$-(\beta-1)_1\int_0^1 v^{\alpha+1}\left\{1-\sum_{n=2}^{m}(-1)^n\frac{(\alpha+n)_{n-2}v^{n-2}}{(1-v)^{\alpha+n+1}}\right\}dv$$
$$\pm\cdots+(-1)^k(\beta-1)_k\int_0^1 v^{\alpha+2k-1}\left\{1-\sum_{n=2k}^{m}(-1)^n\frac{(\alpha+n)_{n-2k}v^{n-2k}}{(1-v)^{\alpha+n+1}}\right\}dv.$$

Dies giebt aber, mag α zwischen $-2k$ und $-(2k+1)$ liegen, $(m=2k)$, oder zwischen $-(2k+1)$ und $-(2k+2)$ $(m=2k+1)$, den Werth:

$$-J_1 = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} - (\beta-1)\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+3)} + (\beta-1)_2\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+5)}$$

$$\mp \cdots + (-1)^k(\beta-1)_k\frac{\Gamma(\alpha+2k)}{\Gamma(\alpha+2k+1)}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{(\beta-1)}{\alpha+2} + \frac{(\beta-1)_2}{(\alpha+4)} \mp \cdots + (-1)^k\frac{(\beta-1)_k}{(\alpha+2k)}.$$

Demnach hat J_1 denselben Werth, den 21) zufolge J hat, und somit ist die Richtigkeit der Gl. 18) für positive und negative α, so lange β positiv bleibt, bewiesen.

Um auch den Fall eines negativen β zu erledigen, scheint eine analoge Methode unbequem zu sein; wir kommen aber sehr leicht in folgender Art zum Ziele. Denken wir in 18) α_1 statt α, β_1 statt β geschrieben und verstehen unter α_1 eine positive oder negative, unter β_1 eine positive Zahl, so ist die Gleichung richtig. Jetzt setzen wir:

$$\beta_1 = 1-\beta, \quad \alpha_1 = \alpha+2\beta-1,$$

dann bleibt die entstehende Gleichung sicher für jedes negative β richtig. Ihre linke Seite wird aber identisch mit derjenigen von 18), während die rechte Seite den Werth $\frac{1}{2^{1-\beta}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}+\beta\right)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha-1+2\beta)\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}$ annimmt. Bezeichnen wir denselben mit Y und multipliciren die folgenden drei Gleichungen miteinander, deren zweite und dritte aus dem Theorem von Gauss entspringen:

$$Y = 2^{\beta-1}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}+\beta\right)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha-1+2\beta)\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}+\beta\right)}{\Gamma(\alpha-1+2\beta)} = 2^{2-\alpha-2\beta}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)},$$

$$2^{1-\alpha} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2})},$$

so kommt:

$$Y = \frac{1}{2^\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)},$$

also die rechte Seite von 18), womit diese Gleichung also für positive und negative α und β bewiesen ist. — Schliesslich sei daran erinnert, dass Y in mancherlei Fällen sich in geschlossener Form darstellt. Solche Fälle sind:

1. β ist eine ganze Zahl; 2. α ist eine gerade Zahl; 3. $3\alpha + 2\beta$ ist eine gerade Zahl; 4. $\alpha + 2\beta$ ist eine ungerade Zahl; 5. $2\alpha + 2\beta$ ist eine ungerade Zahl.

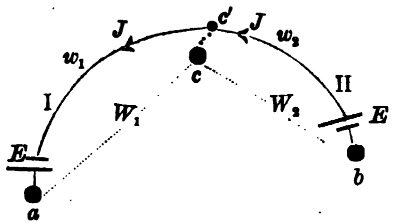
Königsberg, im Juni 1888. LOUIS SAALSCHÜTZ.

XXXIII. Die Widerstandsgleichung einer Potential-Niveaufläche.

In Bd. IX, 1888, S. 270 der Elektrotechn. Zeitschrift, Berlin,* ist vom Verfasser ein Satz aufgestellt, bewiesen und weiterhin (S. 373) der praktischen Verwerthung entgegengeführt worden, dessen Hauptinhalt sich wie folgt ausdrücken lässt:

> In einem körperlichen Leiter ohne elektromotorische Innenkräfte, in welchem durch Anlegung zweier Elektroden eine stationäre Strömung hergestellt wird, ist für die Punkte einer Potentialniveaufläche die Differenz der nach den beiden Elektroden gemessenen Widerstände constant.

Der an erwähnter Stelle gegebene Beweis übergeht im Interesse der Anschaulichkeit den strengeren Gedankengang auf einem kurzen Annäherungswege. Es möge gestattet sein, den strengen Beweis an dieser Stelle nachzuholen.



Verbindet man (s. Figur) die beiden Punkte a und b eines körperlichen Leiters mit den Polen einer constanten Säule, welche die elektromotorische Kraft $2E$ hat, und denkt man sich je die Hälfte dieser elektromotorischen Kraft, E, an die beiden Enden des Batteriebogens verschoben, so entsteht in letzterem ein Potentialgefälle, welches alle Potentialwerthe des körperlichen Leiters mit enthält. Man kann infolge dessen irgend einen Punkt c des Körpers mit einem Punkte c' des Batteriebogens widerstandslos verbinden, ohne dass das elektrische Verhalten der Zusammenstellung eine Veränderung erleidet.

Bezeichnet man mit w_1 und w_2 die Widerstände der Batteriebogentheile I (ac') und II $(c'b)$, mit W_1 und W_2 die zwischen a und c bez. c und b gemessenen Widerstände des körperlichen Leiters und mit J die sowohl in I wie in II vorhandene Stromstärke, so ist

$$1) \quad \begin{cases} \text{im Bogentheil I:} \quad J = \dfrac{E}{W_1 + w_1} + i_1, \\ \quad\text{"} \qquad \text{"} \qquad \text{II:} \quad J = \dfrac{E}{W_2 + w_2} + i_2. \end{cases}$$

---

* Vergl. auch Zeitschr. f. Elektrotechn., Wien 1888, Heft 5.

Hierin sind i_1 und i_2 die von der elektromotorischen Kraft und dem Leitungsvermögen des Nachbarbogens herrührenden Stromtheile.

Die von der benachbarten elektromotorischen Kraft E erzeugte Stromvermehrung — sie heisse αE — ist nach dem Satze von der gleichen gegenseitigen Wirkung elektromotorischer Flächenelemente in beiden Bogentheilen gleich. Von der Wirkung des benachbarten Bogenwiderstandes gilt im Allgemeinen nicht dasselbe, wohl aber in dem Falle der Gleichheit beider Hauptströme J und J und der wirkenden elektromotorischen Kräfte. Dies ergiebt sich aus folgender Erwägung:

Wird die vom Leitungsvermögen des benachbarten Bogentheiles herrührende Stromvermehrung mit j_1 bez. j_2 bezeichnet, so ist nach Früherem

$$2)\qquad i_1 = \alpha E + j_1, \quad i_2 = \alpha E + j_2.$$

j_1 lässt sich durch eine in den Bogen II eingefügte elektromotorische Kraft E_2 aufheben, welche in diesem Bogen den Strom $-\alpha E$ hervorzubringen im Stande sein würde. Diese Stromvernichtung ist in Hinsicht auf I gleichbedeutend mit der Hinwegnahme von II, welche in I das Erlöschen von j_1 zur Folge haben müsste.

Die Vernichtung von αE im Bogen II durch E_2 wird durch die Gleichung

$$3)\qquad \alpha E = \frac{E_2}{W_2 + w_2} + j_2 \frac{E_2}{E}$$

ausgedrückt, worin $j_2 \frac{E_2}{E}$ diejenige Stromsteigerung darstellt, welche durch Einwirkung des Bogens I eintreten würde und welche zu j_2 in dem an gegebenen einfachen Verhältnisse stehen muss.

Aus den Gleichungen 3), 2) und 1) finden wir

$$E_2 = \frac{\alpha E^2}{J - \alpha E}.$$

Da nun die Stromwirkung von E_2 in I die Grösse $j_1 = \alpha E_2$ haben muss, so ist j_1 und dementsprechend auch $j_2 = \frac{\alpha^2 E^2}{J - \alpha E}$, woraus nach Gl. 2) unmittelbar $i_1 = i_2$ und weiterhin nach Gl. 1)

$$4)\qquad W_1 - W_2 = w_2 - w_1$$

folgt; in Worten: mit c' haben alle diejenigen Punkte gleiches Potential, für welche $W_1 - W_2$ constant und zwar gleich $w_2 - w_1$ ist. Man kann demnach den Ausdruck

$$5)\qquad W_1 - W_2 = Const.$$

die Widerstandsgleichung einer Niveaufläche nennen.

Die Anwendung des Satzes auf Bestimmung von Niveaulinien und auf Erdleitungsmessungen ist an der eingangserwähnten Stelle besprochen worden.

Die Uebertragung des Satzes auf stationäre Wärmeströme bietet keine Schwierigkeit.

Dresden. Dr. R. Ulbricht,
Betriebstelegr.-Oberinspector.

XXXIV. Ein Satz über das dem Kegelschnitt umschriebene Siebeneck.

Bekanntlich spricht der Brianchon'sche Satz für das einem Kegelschnitt umschriebene Sechseck die Eigenschaft aus:

I. Berühren die Seiten

$$|12|\quad|23|\quad|34|\quad|45|\quad|56|\quad|61|$$

eines einfachen Sechsecks 123456 einen Kegelschnitt, so laufen die drei Diagonalen

$$|14|\quad|25|\quad|36|$$

durch einen Punkt.

An diesen Satz schliesst sich ein anderer über das einem Kegelschnitt umschriebene Achteck, welcher ein specieller Fall des allgemeinen Schnittpunktsatzes ist:

II. Berühren die Seiten

$$|12|\quad|23|\quad|34|\quad|45|\quad|56|\quad|67|\quad|78|\quad|81|$$

eines einfachen Achtecks 12345678 einen Kegelschnitt, so werden auch die Diagonalen desselben

$$|14|\quad|25|\quad|36|\quad|47|\quad|58|\quad|61|\quad|72|\quad|83|,$$

welche sich zu dem Achteck 14725836 zusammensetzen, einen neuen Kegelschnitt berühren.

[In der That, übertragen wir der kürzeren Aussprache wegen den Satz in seinen dual gegenüberstehenden, nehmen also ein dem Kegelschnitt einbeschriebenes Achteck

$$12345678,$$

so bilden die vier Seiten

$$1)\qquad |12|\quad|34|\quad|56|\quad|78|$$

eine ausgeartete Curve vierter Ordnung und die vier übrigen Seiten

$$2)\qquad |23|\quad|45|\quad|67|\quad|81|$$

eine zweite Curve vierter Ordnung; die 16 Durchschnittspunkte dieser beiden Curven bilden also die Grundpunkte eines Büschels von Curven vierter Ordnung und jede Curve vierter Ordnung, welche durch 13 dieser Punkte hindurchgeht, muss auch durch die drei übrigen gehen (Salmon-Fiedler, Höhere Curven, S. 22).

Von diesen 16 Durchschnittspunkten liegen aber acht, nämlich 1234 5678, auf einem Kegelschnitt, folglich muss der durch fünf der übrigen acht Punkte gelegte Kegelschnitt auch durch die drei letzten gehen, also liegen die acht Punkte

$$(12, 45),\quad (45, 78),\quad (78, 23),\quad (23, 56),$$
$$(56, 81),\quad (81, 34),\quad (34, 67),\quad (67, 12)$$

auf einem neuen Kegelschnitt, und diese sind die Ecken desjenigen Achtecks, dessen aufeinander folgende Seiten sind:

$$|12|\quad|45|\quad|78|\quad|23|\quad|56|\quad|81|\quad|34|\quad|67|.$$

Herr A. Hurwitz hat diesen Satz aus einer sehr einfachen Quelle abgeleitet, nämlich aus der Betrachtung eines auf dem einfachen Hyperboloid verlaufenden geradlinigen räumlichen Achtecks durch perspective Projection, ebenso wie der Brianchon'sche Satz aus der Betrachtung eines räumlichen Sechsecks auf dem Hyperboloid durch Projection abzuleiten ist. (Siehe: H. Schroeter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung, S. 121.) Aus derselben Quelle sind auch allgemeinere Sätze über das $2n$-Eck abzuleiten.

Zwischen den beiden Sätzen I. und II. steht nun aber in der Mitte ein Satz über das einem Kegelschnitt umschriebene Siebeneck, welcher, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden ist. Derselbe lautet:

III. Berühren die Seiten

$$|12| \quad |23| \quad |34| \quad |45| \quad |56| \quad |67| \quad |71|$$

eines einfachen Siebenecks 1234567 einen Kegelschnitt, so bilden die Diagonalen desselben, in der Reihenfolge genommen

$$|14| \quad |25| \quad |36| \quad |47| \quad |51| \quad |62| \quad |73|,$$

ein neues einfaches Siebeneck, welches einem zweiten Kegelschnitte einbeschrieben ist.

Dieser Satz lässt sich nicht durch Projection aus dem Hyperboloid ableiten und ist auch nicht ein specieller Fall des Schnittpunktsatzes. Den sehr einfachen synthetischen Beweis dieses Satzes stelle ich dem Leser anheim.

Breslau. Prof. H. Schroeter.

XXXV. Notiz über zwei Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

I. In der Einleitung zur „Théorie analytique des probabilités“ von Laplace wird — zunächst als Princip der Wahrscheinlichkeitsrechnung — folgender Satz angeführt:

„Es sei das Eintreffen eines Ereignisses E constatirt worden, das verschiedene Ursachen: A, B, C, ... haben konnte. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Ursache A das Ereigniss E herbeigeführt hat, verhält sich dann zur Wahrscheinlichkeit, dass B das Ereigniss herbeigeführt hat, wie die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E, wenn die Ursache A sicher ist, sich verhält zur Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E, wenn die Ursache B sicher ist.“

(a. a. O., 2me édition, Paris 1814, VIme principe, Introduction p. 10.)

Indem Laplace auf späteren Seiten (livre II, chap. 1, p. 182) einen strengen analytischen Beweis für jenen Satz erbringt — und zwar einen Beweis, der sich auf die Theorie „zusammengesetzter Ereignisse“ stützt —, verliert der obige Satz wieder die Bedeutung eines „Grundsatzes“, d. h. eines nicht beweisbaren „Princips“.

Auch im Nachfolgenden soll versucht werden, einen ganz elementaren und möglichst anschaulichen Beweis des obigen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung *a posteriori* begründenden Theorems zu geben; indem gezeigt wird, wie — durch die Möglichkeit der Umkehrung in den Bezeichnungen „Ursache“ und „Wirkung“ — der Beweis obigen Lehrsates den einfachen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung *a priori* zugänglich gemacht werden kann. Und zwar erreichen wir jenen Beweis im Unterschied von Laplace nicht durch das Hereinziehen jener „zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit“, sondern ausschliesslich mit Benützung der Definition der Wahrscheinlichkeit *a priori*, d. h. mit dem „ersten Princip“ der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir geben für die Aufgabe:

> „nach stattgefundenem Ereignisse E die Wahrscheinlichkeit für das Bestandenhaben einer der n Ursachen (von *a priori* gleicher Wahrscheinlichkeit), welche es herbeigeführt haben können, der Reihe nach zu bestimmen“

folgende Lösung.

Hier handelt es sich — mit anderen Worten — darum, nachdem das Ereigniss E eingetreten, seine Ursache aber noch nicht aufgedeckt ist, darauf zu wetten, dass eine bestimmte jener n Ursachen bei der Hervorbringung des Ereignisses E thätig war.

Obige Aufgabe kann aber kein verschiedenes Resultat geben, wenn man sich ein Mittel gegeben denkt, um jene Ursache, die gewirkt hat, durch das Ereigniss selbst zu constatiren, nachdem man auf das Bestandenhaben einer Ursache bereits gewettet hat. Dieser einfache Gedanke gestattet das Problem umzukehren, d. h. in eine Aufgabe der *a-priori*-Wahrscheinlichkeit zu verwandeln; man wettet eben nicht mehr auf die Vergangenheit, sondern auf das zukünftige Constatiren der Ursache.

Es seien n Ursachen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ gegeben; jede liefere μ mögliche Fälle, aber die einzelne Ursache c_i nur λ_i für das Ereigniss günstige Fälle unter ihren μ möglichen Fällen. So erhält man

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n$$

günstige Fälle unter $n.\mu$ möglichen Fällen; d. h. wenn E eingetreten ist, muss einer jener $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n$ ausgezeichneten Fälle eingetroffen sein.

Wir nehmen der Aufgabe nichts an ihrer Allgemeinheit, wenn wir voraussetzen: jeder dieser $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n$ günstigen Fälle trage bereits vor dem Ereignisse irgend ein ihn unterscheidendes Merkmal: einen Index i und eine Nummer; als letztere mag man in beliebiger Reihenfolge die Zahlen von 1 bis λ_i wählen, somit jeden der λ_i günstigen Fälle der Ursache c_i mit dem Index i und einer jeweilig verschiedenen Nummer bezeichnen (beispielsweise kann i als Exponent geschrieben werden).

Beispiel. Die günstigen Fälle für E der Ursache c_i tragen das Merkmal resp.

$$1^i,\ 2^i,\ 3^i,\ \ldots,\ \lambda_i^i$$

in beliebiger Anordnung.

Es sei dafür gesorgt, dass E jeweilig das Merkmal jenes Falles trägt, der es herbeigeführt hat. Und zwar sei dieses Merkmal am beobachteten Ereignisse E zunächst nicht sichtbar, man besitze aber Mittel, um dieses Merkmal zu beliebiger Zeit sichtbar zu machen. Wäre es sofort am Ereignisse E erkenntlich, so wäre damit auch die Ursache c_i erkannt, welche E herbeigeführt hat. — Sucht man hingegen die Ursache zu errathen, nachdem das Ereigniss E constatirt ist und bevor man sein Merkmal sichtbar gemacht hat, so fällt das Rathen (Wetten) auf das zum Vorschein kommende Merkmal zusammen mit dem Rathen auf den Fall, welchem E seine Entstehung verdankt, d. h. auf die Ursache c_i des Ereignisses.

Die Sichtbarmachung des noch unbekannten Merkmals von E kann

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n$$

verschiedene Merkmale liefern; so wird diese Sichtbarmachung selbst zu einer „Ursache, welche $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n$ verschiedene Wirkungen — Fälle — liefern kann".

Unter diesen möglichen Fällen, wie sie die Constatirung des Merkmals von E liefert, sind λ_i dem „Ereigniss" günstig, dass das Sichtbarmachen das Merkmal unter die λ_i Nummern mit i-Index der Ursache c_i einreiht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E (unbekannter Ursache) von der Ursache c_i herbeigeführt worden ist, fällt ganz zusammen mit der Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss E sich durch Constatirung seines Merkmals als zur Ursache c_i gehörig erweisen wird. Denn so oft eine Ursache c_i gewirkt hat, trägt ja das Ereigniss — zunächst unsichtbar — ihr Merkmal (i-Exponent), wird also eines der λ_i i-Merkmale $1^i, 2^i, \ldots, \lambda^i{}_i$ erscheinen lassen bei Sichtbarmachung des Merkmals von E.

Die Wahrscheinlichkeit aber, dass ein bis jetzt nicht sichtbares Merkmal, das sich übrigens unter $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n$ verschiedenen Merkmalen finden muss, sich bei Sichtbarmachung erweisen wird als zur Gruppe $\{1^i, 2^i, 3^i, \ldots, \lambda^i{}_i\}$, der Gruppe der c_i-Ursache gehörig, ist nach dem „ersten Princip", d. h. der Definition der Wahrscheinlichkeitsrechnung,

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_i + \cdots + \lambda_n}.$$

Demnach ist, wenn zum Eintreffen des Ereignisses E sämmtliche n Ursachen $c_1 - c_n$ thätig gewesen sein können und *a priori* gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{n}\right)$ ihrer Existenz aufweisen, die Wahrscheinlichkeit, dass die Ursache c_i gewirkt hat,

$$= \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.$$

Man kann also λ_i gegen λ_k wetten, dass, wenn eine der beiden Ursachen c_i und c_k sich herausstellt als gewirkt habend, eher c_i als c gewirkt hat.

Das Verhältniss $\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$ ist aber $=\frac{\lambda_i}{\mu}:\frac{\lambda_k}{\mu}$, d. h. gleich dem Verhältnisse der Wahrscheinlichkeit *a priori*, mit welcher einerseits c_i das Ereigniss E liefert, wenn c_i sicher ist, zu der, mit welcher andererseits c_k das Ereigniss E liefert, wenn c_k sicher ist, — w. z. b. w.

Der Verfasser glaubt, dass in diesem hier mitgetheilten Verfahren eine Vereinfachung gegenüber dem Laplace'schen Beweise gefunden werden kann.

Letzterer Nachweis benützt: 1. die unbekannte Wahrscheinlichkeit für das Bestandenhaben einer Ursache c_i nach stattgefundenem Ereigniss E; 2. die (zusammengesetzte) Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses überhaupt und für die spätere Constatirung, dass speciell c_i gewirkt hat; 3. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses überhaupt, mit Berücksichtigung sämmtlicher Ursachen c_1 bis c_n; 4. die *a-priori*-Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses, wenn eine bestimmte Ursache c_i sicher ist; 5. — was wir ebenfalls in Rechnung ziehen mussten — die *a-priori*-Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{n}\right)$ des Bestehens jeder Ursache vor dem Ereignisse.

(Vergl. von der deutschen Literatur: Citat aus Laplace in Meyer, „Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung", Leipzig 1876, S. 168.)

Anmerkung. Das Resultat: „Die Wahrscheinlichkeiten für das Bestandenhaben zweier Ursachen verhalten sich wie die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses bei gegebenen Ursachen" lässt eine identische Umformung zu: Es seien $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_n$ die Wahrscheinlichkeiten für die Ursachen $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ nach eingetretenem Ereigniss E, — $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ die Wahrscheinlichkeiten für das Ereigniss, wenn die Ursachen $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$ sicher wären. Dann ist nach dem Bewiesenen:

$$\alpha P_1 = p_1, \quad \alpha P_2 = p_2, \quad \alpha P_3 = p_3, \quad \ldots, \quad \alpha P_i = p_i, \quad \ldots, \quad \alpha P_n = p_n.$$

Da nach eingetretenem Ereigniss eine der Ursachen $c_1 - c_n$ als thätig gewesen constatirt werden muss, so ist $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$; durch Addition obiger Gleichungen entsteht also:

$$\alpha . 1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_n,$$

demnach durch Einsetzen:

$$P_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

II. A. „Es sei mit einer Urne U, die unendlich viele Kugeln von weisser und schwarzer Farbe enthielt, eine sehr ausgedehnte Versuchsreihe angestellt worden, welche als Resultat ergab, dass sich die Zahl der gezogenen weissen Kugeln zur Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln verhielt wie $a:b$.

Alsdann wird unter allen Vertheilungsarten, die man den unendlich vielen Kugeln im Innern von u zuschreiben könnte, jene am relativ wahrscheinlichsten (nach sehr oft wiederholten Ziehungen, die immer dasselbe Verhältniss $a:b$ erneuerten), nach welcher in der Urne U das Verhältniss der Anzahlen der unendlich vielen weissen und schwarzen Kugeln ebenfalls $= a:b$ ist."

(Dieser Satz A kann noch elementar bewiesen werden.)

B. „Aber es wird jener Vertheilungsmodus $a:b$ im Innern der Kugel nicht nur relativ am wahrscheinlichsten, d. h. im Vergleich zu allen anderen denkbaren Vertheilungsarten der beiden Farben, sondern die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen jener Farbenvertheilung $a:b$ im Innern der Urne wird absolut sicher $= 1$ nach unendlich oftmaliger Wiederholung der Versuche; mit anderen Worten: die Wahrscheinlichkeit für diese specielle Farbenvertheilung $a:b$ im Innern der Urne verdrängt alle Möglichkeit, eine andere Anordnung nur überhaupt mehr in Betracht zu ziehen, da sie selbst bereits $= 1$.

Man kann also nach unendlich oft wiederholten Versuchen, wenn sie für die gezogenen Kugeln immer dasselbe Verhältniss: je a weisse auf b schwarze, zu Tage förderten, a gegen b wetten, dass bei der nächsten Ziehung eher eine weisse, als eine schwarze Kugel erscheint."

Ueber diesen zweiten Theil B unseres Satzes bemerkt Laplace (a. a. O. p. 52, 53 der Einleitung), dass derselbe, obwohl *indiqué par le bon sens,* doch zu seinem strengen Nachweise so grossen analytischen Apparat in Anspruch nehme, dass Jacques Bernoulli mit Recht dem von ihm gelieferten algebraischen Beweise einen ganz besonders hohen Werth beilegte.

(Vergl. wegen des analytischen Beweises dieses Baye-Bernoulli-Laplace'schen Satzes: Laplace, a. a. O. livre II, chap. VI, Nr. 26, p. 367 der zweiten Ausgabe von 1814; ferner Meyer, Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 171, 226.)

Was im Nachfolgenden gebracht wird, will nur den Werth eines populären Beispiels in Anspruch nehmen, den eines Weges, auf welchem die Vorstellung sich dem von der Mathematik gelieferten Resultate nähern kann.

Wir können zeigen, dass für eine nahestehende Wissenschaft, nämlich die Chemie, dieser Satz angewendet wird, dort aber eigentlich gar keines Beweises mehr bedarf, insofern, als überhaupt die Chemie nicht existiren könnte, wenn der Chemiker jemals aufhören wollte, an die Richtigkeit des Satzes B zu glauben, bevor er ein Experiment unternimmt; er setzt jenes Theorem in der That als bewiesen voraus bei jeder seiner Untersuchungen.

Um sich über die Zusammensetzung einer ihm vorgelegten Mischung aus zwei Stoffen, die in einem grösseren Gefäss U enthalten ist, zu unterrichten, wird der Chemiker dem Gefäss U einen kleinen Theil u entnehmen und diese „Stichprobe" u für sich untersuchen.

Er schliesst, wenn die Stichprobe als Verhältniss von den zwei gemischten Stoffen den Quotienten $a:b$ ergiebt, dass auch im grösseren Gefässe U die Mischung das Verhältniss $a:b$ in den beiden Stoffen aufweist. Er nimmt dies mit Sicherheit an, wenn das Mischen der Stoffe ein möglichst inniges und vollständiges war; er schliesst weiterhin, dass bei einer weiteren Probe nochmals das Verhältniss $a:b$ der beiden Stoffe sich in der zum zweiten Male herausgenommenen Menge zeigen würde, wie es beim ersten Versuch constatirt wurde.

Dieser Schluss bildet aber genau den Inhalt des oben angeführten Satzes B der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In der Stichprobe kann allerdings der Chemiker die Moleküle der beiden gemischten Stoffe nicht zählen — ihre Anzahl ist unendlich gross, gerade wie nach der Voraussetzung über unsere Versuchsreihe unendlich viele Kugeln gezogen wurden —, aber er kann das Verhältniss ihrer Anzahlen bestimmen — nach chemischer Trennung der Stoffe und Abwägung. Der seiner Seele innewohnende, durch Beobachtung gewonnene und dem Gedächtnisse einverleibte Begriff einer „vollständigen Mischung" lässt es ihm dann als sicher erscheinen, dass die Anzahlen der unendlich vielen Moleküle zweierlei Art im Gefässe U sich verhalten wie in der Probe, wie $a:b$. Diese Behauptung ist, wie gesagt, weiter nichts, als unser oben gegebener Satz B.

Bei dieser Analogie entspricht also die Herausnahme einer kleinen Menge der „unendlich lang ausgedehnten" Versuchsreihe der ursprünglichen mathematischen Fassung des Satzes; das „Abwägen" kann erklärt werden als „Abzählen von unendlich vielen Dingen, den Molekülen".

Noch sicherer erscheinen diese in der Chemie fortwährend gebrauchten Schlüsse, wenn man, statt von einer „Mischung", von einer „Verbindung" spricht; denn die Chemie beweist, dass in einer „Verbindung" die Atome selbst keinerlei Zusammenballung des einen Elements in verschiedenen Theilen des zu untersuchenden Körpers dulden, sondern dass schon die nothwendige und einzig mögliche Anschliessung der Atome zu regelmässig gebauten Molekülen die Homogeneität des Körpers sichert — in Bezug auf das Verhältniss, in welchem sich an jeder Stelle des Körpers die Atome der beiden Elemente verbunden finden.

Was vorhin durch Voraussetzung einer möglichst vollständigen Mischung gesichert werden sollte, das leistet hier bereits das physikalische Verhalten der Atome.

Schon durch ihren Begriff versichert uns eine „Verbindung“ über die gleichmässige Vertheilung ihrer zwei verschiedenen Atome durch den ganzen Körper; noch viel mehr als vorhin wird also anzunehmen sein, dass eine probeweise Zerlegung eines Theilchens von einem als „Verbindung“ vorgelegten Körper genau die im Körper durchweg herrschende Vertheilung der Atome kennen lehrt. Leider hilft nur diese bei der Schwesterwissenschaft so absolut feststehende Wahrheit der — nicht empirischen — Mathematik um keinen Schritt weiter auf dem Wege des Beweises, wie letztere ihn fordert, so wenig, wie der von Laplace als Zeuge citirte *bon sens.*

München. Dr. Fritz Hofmann.

XXXVI. Parameterdarstellung von orthogonalen Substitutionen, welche identisch umkehrbar sind, auf geometrischem Wege.

Das Nullsetzen einer quadratischen Form, welche ausschliesslich Quadrate der Veränderlichen enthält, kann geometrisch gedeutet werden als die Gleichung einer „Fläche“ (letzteres Wort im übertragenen Sinne).

Beispiel. $F \ldots\ x^2+y^2+z^2+w^2=0$ ist die Gleichung einer (imaginären) Kugel.

Es sei nun $abcd$ ein ausserhalb der Fläche gelegener Punkt:

$$F(a,b,c,d)=a^2+b^2+c^2+d^2 \gtrless 0;$$

dann kann man zu jedem Punkte $x_1y_1z_1w_1$ auf der Fläche F jenen Punkt (linear) bestimmen, wo die Verbindungsgerade von $abcd$ nach $x_1y_1z_1w_1$ hin die Fläche F zum zweiten Male trifft: $x_2y_2z_2w_2$.

Die Coordinaten dieses zweiten Schnittpunktes sind von der Form:

$$x_2=a+\lambda x_1,\quad y_1=b+\lambda y_1,\quad z_2=c+\lambda z_1,\quad w_2=d+\lambda w_1.$$

Durch Einsetzen in F erhält man:

$$\lambda^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2+w_1^2)+2\lambda(ax_1+by_1+cz_1+dw_1)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=0.$$

Da nach der Voraussetzung

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+w_1^2=0,$$

so ist

$$\lambda=-\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2(ax_1+by_1+cz_1+dw_1)}.$$

Daher

$$\text{T)}\quad \begin{cases} \varrho x_2=2a(ax_1+by_1+cz_1+dw_1)-x_1(a^2+b^2+c^2+d^2),\\ \varrho y_2=2b(ax_1+by_1+cz_1+dw_1)-y_1(a^2+b^2+c^2+d^2),\\ \varrho z_2=2c(ax_1+by_1+cz_1+dw_1)-z_1(a^2+b^2+c^2+d^2),\\ \varrho w_2=2d(ax_1+by_1+cz_1+dw_1)-w_1(a^2+b^2+c^2+d^2). \end{cases}$$

So oft

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+w_1^2=0,\quad a^2+b^2+c^2+d^2\gtrless 0,$$

wird auch die nach den Formeln T) zu bildende Quadratsumme

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+w_2^2=0$$

sein.

Ist aber ein Werthesystem $x_2y_2z_2w_2$ auf diesem Wege ausgerechnet worden — von einem Werthesystem $F(x_1y_1z_1w_1)=0$, $F(abcd)\lessgtr 0$ ausgehend — und unterwirft man die Zahlen x_2, y_2, z_2, w_2 neuerdings dieser Transformation T), so erhält man jenen Punkt der Fläche F, welcher mit $x_2 y_2 z_2 w_2$ und $abcd$ auf einer Geraden liegt, d. h. das System $x_1 y_1 z_1 w_1$, von welchem man ausgegangen war.

Zahlenbeispiel. Für a, b, c, d sei gewählt 1, 1, 1, 1; für x_1, y_1, z_1, w_1 sei gewählt 6, 2, 3, $i7$. Man erhält als zweiten Schnittpunkt

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= 2.1(1.6+1.2+1.3+1.i7)-6(1^2+1^2+1^2+1^2)=-2+14i,\\ y_2 &= \quad 2(11+i7)-2.4=14+14i,\\ z_2 &= \quad 2(11+i7)-3.4=10+14i,\\ w_2 &= \quad 2(11+i7)-i.28=22-14i. \end{aligned}\right.$$

Demnach ist

$$(-2+14i)^2+(14+14i)^2+(10+14i)^2+(22-14i)^2=0.$$

Benützt man diese vier Coordinaten als neuerdings zu transformirende Werthe — nach T), so stellt sich ein

$$\begin{aligned} x'_2 &= 2[(-2+14i)+(14+14i)+(10+14i)+(22-14i)]-4.(-2+14i)=96,\\ y'_2 &= 2.4(11+7i)-4.(14+14i)=\ 32,\\ z'_2 &= 2.4(11+7i)-4.(10+14i)=\ 48,\\ w'_2 &= 2.4(11+7i)-4.(22-14i)=112i. \end{aligned}$$

Diese Zahlen stimmen bis auf den hinzugekommenen Factor 16 überein mit den Coordinaten 6, 2, 3, $i7$ des Ausgangspunktes.

Setzt man in die Gleichung F statt x, y, z, w resp. die nachfolgenden: X, Y, Z, W ein — in ihrer vollständigen Schreibweise in den x, y, z, w —, also

$$\mathfrak{T})\left\{\begin{aligned} &\text{statt } x\colon\ X\equiv 2a(ax+by+cy+dw)-x(a^2+b^2+c^2+d^2),\\ &\quad\text{„}\ \ y\colon\ Y\equiv 2b(ax+by+cz+dw)-y(a^2+b^2+c^2+d^2),\\ &\quad\text{„}\ \ z\colon\ Z\equiv 2c(ax+by+cz+dw)-z(a^2+b^2+c^2+d^2),\\ &\quad\text{„}\ \ w\colon\ W\equiv 2d(ax+by+cz+dw)-w(a^2+b^2+c^2+d^2), \end{aligned}\right.$$

so erhält man eine neue Gleichung F' in den x, y, z, w, welche die Bedingung ausdrückt, dass x, y, z, w so gelegen ist, dass der ihm nach $\mathfrak{T}$) zugeordnete Punkt auf F liegt. Offenbar haben alle Punkte der Fläche F selbst diese Eigenschaft.

Daher muss die transformirte Gleichung

$$F')\qquad X^2+Y^2+Z^2+W^2=0,$$

nachdem sie ausgeschrieben erscheint in den x, y, z, w [nach $\mathfrak{T}$)], bis auf einen Zahlenfactor identisch sein mit F.

Somit hat die Tabelle von Substitutionscoefficienten [vergl. $\mathfrak{T}$)]

$$M)\quad\left|\begin{matrix} (a^2-b^2-c^2-d^2) & 2ab & 2ac & 2ad\\ 2ba & (-a^2+b^2-c^2-d^2) & 2bc & 2bd\\ 2ca & 2cb & (-a^2-b^2+c^2-d^2) & 2cd\\ 2da & 2db & 2dc & (-a^2-b^2-c^2+d^2) \end{matrix}\right|$$

die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate der vier Elemente jeder Verticalreihe eine (für alle vier Reihen gleichbleibende) Constante ist; bei der Ausrechnung ergiebt sie sich als $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

Dagegen muss immer die Summe jener vier Producte verschwinden, welche entstehen durch Multiplication von je zwei gleichliegenden Elementen von zwei verschiedenen Verticalreihen. Beispielsweise muss die Summe der vier so gebildeten Producte für die beiden ersten Verticalreihen, nämlich:

$$(a-b^2-c^2-d^2).2ab+2ba(-a^2+b^2-c^2-d^2)+2ca.2cb+2da.2db=0$$

sein, weil ihre Verdoppelung den Factor von xy in der Entwickelung von $F'=F(XYZW)$ liefern würde. Dieser Factor muss aber verschwinden, da er in F nicht vorkommt.

Die Tabelle M) hat also wegen (ihrer Symmetrie und) diesen genannten beiden Beziehungen vollständig die Eigenschaften einer orthogonalen Substitutionstabelle, nachdem man noch schliesslich jedes in ihr vorkommende Element durch $(a^2+b^2+c^2+d^2)$ dividirt hat.

Sie besitzt aber die specielle Eigenschaft, dass die Auflösung des Systems $\mathfrak{T}$) nach x, y, z, w wieder alle Coefficienten und in derselben Lage auftreten lässt, wie sie die Tabelle M) aufweist, d. h. das System $\mathfrak{T}$) ist involutorisch, identisch umkehrbar. In der ausgerechneten Tabelle M) ist der — vorausgesagte — Charakter einer „involutorischen" Substitution in ihrer Symmetrie direct erkennbar (vergl. die ersten Zeilen der vorigen Seite).

Um eine involutorisch-orthogonale Substitution zu bilden für n Veränderliche, stehen n willkürliche Parameter zur Verfügung.* Wählt man dieselben: a, b, c, d, e, f, ..., so, dass

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+\cdots \gtrless 0,$$

so wird die Tabelle der Substitutionen gebildet nach dem Schema:

$$\mathrm{T}')\left\{\begin{array}{l}
X.N=(a^2-b^2-c^2-d^2-\cdots)x+2aby+2acz+2adw+\cdots,\\
Y.N=2bax+(-a^2+b^2-c^2-d^2-\cdots)y+2bcz+2bdw+\cdots,\\
Z.N=2cax+2cby+(-a^2-b^2+c^2-d^2-\cdots)z+2cdw+\cdots,\\
W.N=2dax+2dby+2dcz+(-a^2-b^2-c^2+d^2-\cdots)w+\cdots\\
\vdots
\end{array}\right.$$

Hierbei bedeutet N die Quadratsumme der n Parameter

$$N=(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+\cdots).$$

Zahlenbeispiele. I. (Drei Veränderliche.)

$$a=5,\quad b=2,\quad c=4;\quad N=45;$$

$45X=5x+20y+40z$, $45Y=20x-37y+16z$, $45Z=40x+16y-13z$ ist eine orthogonale Substitution.

II. (Vier Veränderliche.)

$$a=3,\quad b=1,\quad c=2,\quad d=-1;\quad N=15 \text{ giebt}$$

$$\left\{\begin{array}{rl}
X= & \frac{3}{15}x+\frac{6}{15}y+\frac{12}{15}z-\frac{6}{15}w,\\
Y= & \frac{6}{15}x-\frac{13}{15}y+\frac{4}{15}z-\frac{2}{15}w,\\
Z= & \frac{12}{15}x+\frac{4}{15}y-\frac{7}{15}z-\frac{4}{15}w,\\
W= & -\frac{6}{15}x-\frac{2}{15}y-\frac{4}{15}z-\frac{13}{15}w.
\end{array}\right.$$

---

* Darunter $(n-1)$ wesentliche, wegen der Homogeneität der Formeln T').

Im Allgemeinen, für $n > 3$, sind diese Formeln nicht aus den allgemeinen Hermite-Cayley'schen (auf Entwickelungen schiefer Determinanten sich stützenden) Formeln für orthogonale Substitutionscoefficienten herstellbar, will man eben nicht besondere Verfügungen treffen über die in den allgemeineren Formeln sich in grösserer Anzahl, $\frac{n(n-1)}{1.2}$, einstellenden Parameter.

Für $n = 3$ können unsere Formeln aus den allgemeinen abgeleitet werden durch folgendes Verfahren (gütige Mittheilung von Herrn Cayley).

Die allgemeinen Hermite-Cayley'schen Formeln für orthogonale Substitutionen bei drei Veränderlichen — wie sie entspringen aus den Vorschriften über die Anwendung von schiefen Determinanten — sind die folgenden (Baltzer, Determinanten, 5. Aufl., S. 194):

$$X = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \{(1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)x + 2(\alpha\beta-\gamma)y + 2(\alpha\gamma+\beta)z\},$$

$$Y = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \{2(\alpha\beta+\gamma)x + (1-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)y + 2(\beta\gamma-\alpha)z\},$$

$$Z = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cdot \{2(\gamma\alpha-\beta)x + 2(\beta\gamma+\alpha)y + (1-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)z\}.$$

Aber indem man statt α, β, γ schreibt $\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}$, erkennt man, dass auch das System

$$N = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2,$$

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\delta^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{N} & \frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{N} & \frac{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}{N} \\ \frac{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}{N} & \frac{\delta^2-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{N} & \frac{2(\beta\gamma-\alpha\delta)}{N} \\ \frac{2(\gamma\alpha-\beta\delta)}{N} & \frac{2(\beta\gamma+\alpha\delta)}{N} & \frac{\delta^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{N} \end{array}\right|$$

alle Bedingungen erfüllt für die Coefficiententabelle einer orthogonalen Substitution; bei beliebigen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (wobei höchstens $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \gtrless 0$ zu erwähnen).

Die Bedingungen für orthogonale Transformationscoefficienten sind Identitäten, wie sie sich ergeben bei Bildung der Quadratsumme der Elemente einer Reihe u. s. w.; — sie werden nicht geändert, und bleiben erfüllt, wenn man oben $\delta = 0$ setzt. Dies führt aber gerade auf jene Transformation involutorischer Eigenschaft, die unsere Methode direct herzustellen gestattet:

$$N = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

$$X = \frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{N}x + \frac{2\alpha\beta}{N}y + \frac{2\alpha\gamma}{N}z,$$

$$Y = \frac{2\beta\alpha}{N}x + \frac{-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{N}y + \frac{2\beta\gamma}{N}z,$$

$$Z = \frac{2\gamma\alpha}{N}x + \frac{2\gamma\beta}{N}y + \frac{-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{N}z.$$

München.

Dr. Fritz Hofmann.

Historisch-literarische Abtheilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.

XXXIII. Jahrgang.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1888.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Inhalt.

I. Abhandlungen.

Seite

II. Recensionen.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik, Algebra, Analysis.

Synthetische, analytische, descriptive Geometrie.

Mechanik, Physik, Meteorologie.

Historisch-literarische Abtheilung.

Zur Geschichte der annähernden Berechnung quadratischer Irrationalitäten.

Von

KARL HUNRATH

in Rendsburg.

Die nachstehenden Notizen bitte ich als Nachträge zu meiner 1884 bei Lipsius & Tischer in Kiel erschienenen Abhandlung:

„Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche“,

beziehungsweise zu der älteren grundlegenden Arbeit S. Günthers:

„Die quadratischen Irrationalitäten und deren Entwickelungsmethoden“ [Supplement zum 27. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 1882]

ansehen zu wollen.

Ausser auf diese Schriften, von denen die erstere im Folgenden kurz mit Abh., die letztere mit G. angeführt wird, werde ich des Oefteren auf Prof. Dr. Treutlein's Abhandlung:

„Das Rechnen im 16. Jahrhundert“
[Abhandlungen zur Gesch. der Math., I. Heft, Leipzig 1877]

— künftig kurz mit Tr. bezeichnet — Bezug nehmen müssen.

I. Zu dem Näherungswerthe $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+1}$.

Abh. S. 26 ist auf Günther's Autorität (G., S. 44) angeführt worden:

1. Beha-eddin's Essenz der Rechenkunst, arabisch und deutsch von Nesselmann, Berlin, 1843.

Dort findet sich ausser auf S. 16 $\sqrt{28\,172} = 358\frac{8}{717}$ auf S. 22 das bemerkenswerthere Beispiel

$$\sqrt{3\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{3\frac{5}{7}}{2} = 1\tfrac{6}{7}.$$

Sodann habe ich auf S. 37 nach Tr. S. 66 angegeben des

Gemma Frisius Methodus arithmeticae practicae, Antwerpen, 1540.

Von dieser Schrift hat mir vorgelegen die Ausgabe

2a. Arithmeticae practicae methodus facilis per Gemmam Frisium, Paris, 1553, ... huc accesserunt Jacobi Peletarij ... annotationes,

und die Uebersetzung

2b. Pierre Forcardel, l'Arithmétique de Gemme Phrison, traduite en François, ... Paris ... (in der Vorrede die Jahreszahl 1560).

In 2a. wird auf fo. 43 die Regel gegeben, aber ohne Beispiel; ein solches in den angehängten Anmerkungen des Peletarius: $\sqrt{1939} = 44\frac{3}{89}$. Dagegen findet sich auf fo. 50 von 2a., S. 78 von 2b. das Beispiel:

$$\sqrt{43\,600} = 208\tfrac{14}{17},$$

zu welchem der Uebersetzer a. a. O. bemerkt, es sei

$$208\tfrac{21}{26} > \sqrt{43\,600} > 208\tfrac{112}{139}, \quad \text{das heisst}$$
$$a + \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 + b} > a + \frac{b}{2a+1}.$$

Damit ist freilich Gemma's Näherungswerth keineswegs erklärt*, denn es ist

$$208\tfrac{14}{17}{}^* > 208\tfrac{21}{26} > 208\tfrac{112}{139}, \quad \text{nämlich}$$
$$208\tfrac{336}{408}{}^* > 208\tfrac{336}{416} > 208\tfrac{336}{417}.$$

Ferner habe ich Abh. S. 37 unter 3. nach Tr., S. 68, aufgeführt des

Petrus Ramus Arithmeticae libri III, Paris, 1555.

Ich habe Gelegenheit gehabt, einzusehen

3. P. Rami Arithmeticae libri duo, geometriae septem et viginti. Basel, 1569.

Auf S. 90, in Geom. libr. XII, cap. 8, habe ich das von mir a. a. O. schon benutzte Beispiel $\sqrt{148} = 12\frac{4}{25}$ wiedergefunden, ferner gefunden an derselben Stelle $\sqrt{7} = 2\frac{3}{5}$, sodann in Geom. l. XIX, c. 1 (S. 131) $\sqrt{27} = 5\frac{2}{11}$, und in demselben Buche c. VI (S. 133 und 134) den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite 8 zu $27\frac{39}{55}$, offenbar aus

$$4\sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{48} = \sqrt{768} = \sqrt{27^2 + 39} = 27 + \frac{39}{2 \,.\, 27 + 1}$$

und den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Schenkel 9 und der Basis 6 zu $25\frac{23}{51}$, offenbar aus

$$3\sqrt{9^2 - 3^2} = 3\sqrt{72} = \sqrt{648} = \sqrt{25^2 + 23} = 25 + \frac{23}{2 \,.\, 25 + 1}.$$

Endlich habe ich Abh. a. a. O. unter 4., gleichfalls nach Tr. S. 69, genannt

4. Christoph Clavius, Epitome arithmeticae practicae, Köln, 1584.

* Eine Erklärung werde ich unten, ad 13, versuchen.

Ausser einer Ausgabe dieses Schriftchens, Köln, 1592, welche das unten weiter zu besprechende Beispiel $\sqrt{20} > 4\frac{4}{9}$ (c. 27, S. 9) bringt, haben mir des

5. Clavius Opera mathematica, Mainz, 1611, vorgelegen.

Im 2. Bande, in Geom. pract. libr. IV, c. 2, habe ich folgende Näherungswerthe gefunden:

auf S. 108: $\sqrt{\frac{5719}{64}} = \frac{\sqrt{5719}}{8} = 75\frac{94}{151} : 8 = 9\frac{547}{1208}$ und $\sqrt{75} = 8\frac{11}{17}$,

auf S. 109: $\sqrt{72} = 8\frac{8}{17}$, $\sqrt{2592} = 50\frac{92}{101}$, $\sqrt{\frac{205884}{64}} = \frac{453\frac{675}{907}}{8} = 56\frac{2605}{3628}$, $\sqrt{126\,720} = 355\frac{695}{711}$,

auf S. 109 und 110: $\sqrt{\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{3.16}{16^2}} = \frac{\sqrt{48}}{16} > \frac{6\frac{12}{13}}{16}$ oder $> \frac{45}{104}$, dagegen

$$\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{3}{\sqrt{48}} < \frac{3}{6\frac{12}{13}} \quad \text{oder} \quad < \frac{13}{30}.$$

Weiteres Vorkommen der Regel bei Schriftstellern des 16. und 17. Jahrhunderts:

6. Orontii Finei Delphinatis ... Protomathesis, Paris, 1532.

Fo. 14 im „Notandum“ die Regel ohne Beispiel.

7. Merliers, la practique de Geometrie, Paris, 1575.

S. 5: *La racine quarrée de 32 sera presque* $5\frac{7}{10}$ *ou* $5\frac{7}{11}$.

8. Elice Vinet, L'Arpanterie, Bourdeaus, 1577.

Lib. I, c. 30: $\sqrt{5} = 2\frac{1}{5}$, $\sqrt{234} = 15\frac{9}{31}$;
lib. VII, c. 6 (unter Verweisung auf lib. I, c. 30): $\sqrt{800} = 28\frac{16}{57}$,
lib. VII, c. 7: $\sqrt{10} = 3\frac{1}{7}$, c. 11: $\sqrt{14} = 3\frac{5}{7}$.

9. Urstisii elementa arithmeticae, Basel, 1579, mit einem „appendix de analysi quadrati et cubi in numeris, ad inueniendum latus“. — S. 172: $\sqrt{40} = 6\frac{4}{13}$.

10. Errard, la géometrie et practique generalle d'icelle, IIe édition, Paris, 1602 (die Vorrede von 1594) S. 31, corollaire 3: ... *la racine de ce nombre sourd* 39 *(qui est* 6 *&* 3 *tresiesmes)* ...,

also $\sqrt{39} = 6\frac{3}{13}$, ferner auf S. 47: $\sqrt{363} = 19\frac{2}{39}$.

11. Gottschalk Müllinghausen's teutsche Arithmetik, Frankfurt, 1602.

S. 427: $\sqrt{\dot{1}1\,6\dot{1}\,4\dot{7}\,4\dot{4}} = 3408\frac{480}{6817}$.

12. Langii artis mathematicae elementa, Freiburg, 1617.

Auf S. 35 die Regel ohne Beispiel.

13. Ursini arithmetica practica, Köln, 1619.

In lib. III, c. 2, § 6 wird die Regel gegeben; bei dem Beispiel $\sqrt{43\,608} = 208\frac{344}{409}$ statt $208\frac{344}{417}$.

Ich nehme an, dass hier bei Ursinus und oben (s. ad 2b.) bei Gemma das gleiche Versehen zu Grunde liegt. G. berechnet a. a. O.

$\sqrt{119025}$ ganz in unserer Weise: er findet zunächst 3, bildet $2 . 3 = 6$, leitet aus $29 : 6 \ldots 4$ ab, bildet $64 . 4$ und zieht das Product von 290 ab, bildet $2 . 34 = 68$, leitet $342 : 68 \ldots 5$ ab, bildet $685 . 5$ und findet 3425. Da nun ohne Zweifel G. in gleicher Weise $208 < \sqrt{43600}$ gefunden, also zuletzt $408 . 8$ gebildet hat, so muss man als möglich zugeben, dass G., statt $2 . 208 = 416$ zu bilden, irrthümlich das zuletzt gebrauchte 408 genommen und so $\frac{14}{17}$ aus $\frac{336}{408}$ gefunden hat. In ähnlicher Weise könnte Ursinus $2b + 1 = 408 + 1 = 409$, statt $= 2 . 208 + 1 = 417$ gesetzt haben.

14. Stegmani institutionum mathematicarum libri II, Rakow, 1630.

S. 27: $$\sqrt{11038} = 105\tfrac{13}{211}.$$

15. Herigoni cursus mathematicus, tomus II, Paris, 1644 (lateinisch und französisch; Privileg von 1633).

S. 116: $$4\tfrac{4}{8} > \sqrt{20} > 4\tfrac{4}{9}.$$

II. Annäherungen höheren Grades im Sinne der unter I behandelten Methode.

Aus des Christoph Clavius Epitome arithmeticae practicae, Köln, 1592, c. 27 ist oben (I, ad 4) schon der Näherungswerth

$$\sqrt{20} > 4\tfrac{4}{9}$$

angeführt worden.

Aus diesem Werthe findet dann a. a. O. Clavius Annäherungen höheren Grades auf folgendem Wege.

Nachdem er

$$20 - (4\tfrac{4}{9})^2 = \tfrac{20}{81}, \quad 5 - 4\tfrac{4}{9} = \tfrac{5}{9}, \quad 2 . 4\tfrac{4}{9} + (5 - 4\tfrac{4}{9}) = 8\tfrac{8}{9} + \tfrac{5}{9} = 9\tfrac{4}{9}$$

berechnet hat, erhält er als Näherungswerth zweiten Grades

$$4\tfrac{4}{9} + \tfrac{20}{81} : 9\tfrac{4}{9} = 4\tfrac{8}{17}, \quad \text{wieder} < \sqrt{20}.$$

Darauf bildet er

$$(4\tfrac{8}{17})^2 = 19\tfrac{285}{289}, \quad 20 - 19\tfrac{285}{289} = \tfrac{4}{289}, \quad 5 - 4\tfrac{8}{17} = \tfrac{9}{17},$$
$$2 . 4\tfrac{8}{17} + (5 - 4\tfrac{8}{17}) = 8\tfrac{16}{17} + \tfrac{9}{17} = 9\tfrac{8}{17},$$

und findet als Näherungswerth dritten Grades:

$$4\tfrac{8}{17} + \tfrac{4}{289} : 9\tfrac{8}{17} = 4\tfrac{76}{161}, \quad \text{wieder} < \sqrt{20}.$$

Es wird dann noch angedeutet, wie man den Näherungswerth vierten Grades finden könne.

Abh. S. 37 habe ich nach Tr. S. 68 darauf hingewiesen, dass P. Ramus die Formel

$$\sqrt{a^2 + b} = a + x = a + \frac{b}{2a + 1}$$

daraus ableitet, dass er das Quadrat mit der Seite $a + 1$ ergänzt und dann die Correctur x aus der Proportion $(2a + 1) : 1 = b : x$ findet. Mit anderen Worten, wie diese Begründung des Ramus zeigt, und es auch an sich klar ist, die gedachte Formel beruht auf der nur annähernd richtigen Annahme, dass dem Wachsthum der Fläche eines Quadrats das Wachsthum der Seite proportional sei. Ich werde nachweisen, dass die hier wiedergegebene Methode des Clavius, Annäherungen höheren Grades zu finden, auf derselben Annahme beruht. Ergänzt man nämlich das Quadrat von $4\frac{4}{9}$ zu dem von 5: $[4\frac{4}{9}+(5-4\frac{4}{9})]^2$, so findet man die Ergänzung (den „Gnomon“) $=[2.4\frac{4}{9}+(5-4\frac{4}{9})]\frac{5}{9}$ und die Correctur des Näherungswerthes ersten Grades aus der Proportion:

$$[2.4\tfrac{4}{9}+(5-4\tfrac{4}{9})]\tfrac{5}{9}:\tfrac{5}{9}=[20-(4\tfrac{4}{9})^2]:x,\quad \text{also } x=\tfrac{20}{81}:9\tfrac{4}{9}.$$

Und ergänzt man wieder $(4\frac{8}{17})^2$ zu 5^2, so ist die Ergänzung

$$[2.4\tfrac{8}{17}+(5-4\tfrac{8}{17})]\tfrac{9}{17},$$

und aus der Proportion

$$[2.4\tfrac{8}{17}+(5-4\tfrac{8}{17})]\tfrac{9}{17}:\tfrac{9}{17}=[20-(4\tfrac{8}{17})^2]:x$$

erhält man die neue Correctur $x=\frac{4}{289}:9\frac{8}{17}$.

Nach heutiger Bezeichnungsweise kann man das Verfahren des Clavius durch die recurrirende Formel

$$u_{n+1}=u_n+\frac{a^2+b-u_n^2}{u_n+a+1}=\frac{(a+1)u_n+a^2+b}{a+1+u_n}\quad [a+1>\sqrt{a^2+b} \text{ oder } b<2a+1]$$

darstellen. Unter den weiteren Voraussetzungen

$$u_n<\sqrt{a^2+b}\quad \text{und}\quad a^2+b>1$$

folgt, wenn man $a+1=\sqrt{a^2+b}+x$, $u_n=\sqrt{a^2+b}-y$ setzt, $[1>x>0$ und $1>y>0$, daher auch $x-y<1]$:

$$u_{n+1}=\frac{(\sqrt{a^2+b}+x)(\sqrt{a^2+b}-y)+a^2+b}{\sqrt{a^2+b}+x+\sqrt{a^2+b}-y}=\frac{2(a^2+b)+\sqrt{a^2+b}\,(x-y)-xy}{2\sqrt{a^2+b}+x-y}$$

$$=\sqrt{a^2+b}-\frac{xy}{2\sqrt{a^2+b}+x-y},\quad \text{also } <\sqrt{a^2+b}.$$

Nun ist $u_0=a<\sqrt{a^2+b}$, mithin auch $u_1, u_2, \ldots, u_n<\sqrt{a^2+b}$. Das Verfahren liefert daher Werthe, die, so sehr sie sich auch nähern, doch stets zu klein bleiben.

III. Zu dem Näherungswerthe $\sqrt{a^2\pm b}=a\pm\frac{b}{2a}$.

Häufig wird für $\sqrt{a^2+b}$ neben $a+\frac{b}{2a+1}$ der Näherungswerth $a+\frac{b}{2a}$ angewendet; ausser bei

1. Merliers (s. I ad 1) und
2. Herigonus (s. I ad 15) bei
3. Forcardel (s. I ad 2b).

Zu der Regel, die bei Gemma in der lateinischen Ausgabe lautet:

„ex residuo vero, si quod fuerit, minutias quodãmodo collige hoc pacto: Dupla radicem inventam, dein unitatem adiice, huic numero tanquam denominatori suprascribeto residuum“

macht F. in seiner Uebersetzung den Zusatz:

„alors la racine sera plus petite: mais si le double tant seulement est pris pour dénominateur, ce, qui se prẽd au lieu de racine, sera plus grãd que la racine“.

4. **Clavius** (s. I ad 4, auch II und IV) giebt für $\sqrt{20}$ als erste Näherungswerthe $4\frac{1}{2} > \sqrt{20} > 4\frac{4}{9}$.

5. **Fineus** (s. I ad 6) setzt in der dort angeführten „Protomathesis“ fo. 14 im Text $\sqrt{17} = 4\frac{1}{8}$, und fo. 26 $\sqrt{\frac{5}{11}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}} = 2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ [$\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ wohl Druckfehler für $\frac{1}{40}\ \frac{1}{3}$], ferner in der Schrift

De re et praxi geometrica, **Paris**, 1556

auf S. 25: $\sqrt{50} = 7\frac{1}{14}$.

6. Die Formel $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$ weist

Luca Pacioli (Abh. S. 36, S. 39 flg.)

für $b = 2a$ zurück und empfiehlt für diesen Fall die Formel $\sqrt{a^2 - b} = a - \frac{b}{2a}$. Nach der Ausgabe der „Summa flgg.“ von 1494, fo. 46 (soll heissen fo. 45) sagt er:

da für $\sqrt{8}$ aus $\sqrt{2^2 + 4}$ sich ergebe $2 + \frac{4}{2.2} = 3$,

da für $\sqrt{24}$ aus $\sqrt{4^2 + 8}$ sich ergebe $4 + \frac{8}{2.4} = 5$,

so solle man $\sqrt{8} = \sqrt{3^2 - 1} = 3 - \frac{1}{2.3} = 2\frac{5}{6}$ und $\sqrt{24} = \sqrt{5^2 - 1} = 5 - \frac{1}{2.5} = 4\frac{9}{10}$ setzen. Gleicher Weise wird von

7. **Maurolycus**, arithmeticorum libri duo, **Venedig**, 1575

im lib. II, prop. 25a, S. 110—112 $\sqrt{8} = 3 - \frac{1}{6}$ angenommen.

8. Aus dem Näherungswerthe $\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$ hat, wie

Tannery im „Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, 2e série, t. VIII, sept. 1884,

bekannt gegeben hat, der dem 14. Jahrhundert angehörende Byzantiner **Rhabdas** den Werth

$$\sqrt{a^2 \pm b} = \frac{a^2 \pm b}{\sqrt{a^2 \pm b}} > \frac{a^2 \pm b}{a \pm \frac{b}{2a}}$$

abgeleitet. In der oben, I ad 5, wieder gegebenen Bestimmung zweier Grenzwerthe für $\sqrt{\frac{3}{16}}$ aus $\frac{\sqrt{48}}{16}$, bezw. aus $\frac{3}{\sqrt{48}}$:

$$\frac{6\frac{12}{13}}{16} < \sqrt{\frac{3}{16}} < \frac{3}{6\frac{12}{13}}$$

ist eine sinngemässe Anwendung dieses Verfahrens auf den Näherungswerth $\sqrt{a^2 + b} > a + \frac{b}{2a + 1}$ unschwer zu erkennen.

IV. Annäherungen höheren Grades im Sinne der unter III behandelten Methode.

Bei dem eben genannten Rhabdas hat Tannery a. a. O. auch die Annäherung zweiten Grades:

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a \pm \frac{b}{2a}\right)}$$

nachgewiesen. Hierzu bemerkt er S. 14: „*La méthode est, sans doute, antérieure au XIV. siècle, et il s'agirait d'en retrouver des traces à une époque plus réculée, soit chez les Grecs, soit chez les Occidentaux, soit chez les Arabes.*"

Dass im 13. Jahrhundert Leonardo von Pisa dieses Verfahren gekannt und angewandt hat, glaube ich Abh. S. 29, 3. Absatz, gezeigt zu haben. Vordem hat

Wöpcke, Traduction du traité d'arithmétique d'Alkalsâdî, Rome, 1859*,

dasselbe für diesen Araber nachgewiesen (S. 40 und 41). Endlich möchte ich eine Regel im

Talkhys des Ibn Albannâ, publié et traduit par A. Marre, Rome, 1865*,

dahin deuten. Ich lasse die Stelle (a. a. O. S. 23) im Wortlaut der französischen Uebersetzung folgen:

... (Erst wird die Regel gegeben, $\sqrt{a^2+b}$ solle man $= a + \frac{b}{2a}$ für $b \leqq a$, aber $= a + \frac{b}{2a+1}$ für $b > a$ setzen) ... „*ce qui tu obtiens c'est la racine qui, multipliée par elle-même, donne le nombre dont on a demandé la racine par approximation. Et si tu veux raffiner l'approximation, tu dénommes par le double de la racine et tu soustrais le résultat de la racine, il reste une racine dont le carré est plus approché du nombre dont on demande la racine que le carré primitif*".

Die mit den Worten „*Et si tu veux*" beginnende Anweisung, einen Näherungswerth zweiten Grades zu finden, kann, da die Correctur abgezogen werden soll („*et tu soustrais le résultat de la racine*"), sich nur auf den zu grossen Näherungswerth ersten Grades, auf $a + \frac{b}{2a}$, beziehen. Nun wird nicht gesagt, welcher Zahl man das Doppelte der „Wurzel", d. h. des ersten Näherungswerthes, als Nenner geben soll; doch geht voran, wenn man diesen mit sich selbst multiplicire, so erhalte man den Radicand näherungsweise. In der That erhält man zu viel, und zwar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ zu viel,

* Extrait des „Atti dell' Academia de' Nuovi Lincei", t. 12 (1859), bezw. t. 17 (1864).

und diesen Ueberschuss sehe ich als Object zu *„dénommes par la double de la racine“* an. Zum Vergleich setze ich die Regel Alkalsâdî's in Wöpcke's Uebersetzung hierher:

„L'opération (de rendre l'approximation plus exacte) consiste a dénommer la partie qui répresentait le degré de l'approximation, d'après le double de la racine, et à retrancher le résultat de la racine.“

Hier wird die Regel durch ein Beispiel erläutert: $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} : 5$.

Es ist bekannt, dass das in Rede stehende Verfahren durch die recurrirende Formel

$$u_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left[u_n + \frac{a^2 + b}{u_n}\right]$$

ausgedrückt werden kann. Doch lässt sich eine unmittelbare Anwendung dieser recurrirenden Formel (Abh. S. 42) bei den älteren Italienern nicht nachweisen. Eine solche will Heiberg (Revue critique d'histoire et de littérature, 18^e^ année, Nr. 18) in der Logistik des byzantinischen Mönchs Barlaam (ed. Chamber, Paris, 1600, II, 39) gefunden haben.

Ganz nach der Weise der Italiener berechnet Clavius (s. I und III ad 4, auch II) in der „Epitome“ a. a. O.:

$\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 4} = 4 + \dfrac{4}{2.4} = 4\frac{1}{2}$, $\sqrt{20} = \sqrt{(4\frac{1}{2}^2 - \frac{1}{4})} = 4\frac{1}{2} - \dfrac{1}{4.9} = 4\frac{34}{72}$ (hier durch einen Druckfehler $4\frac{14}{72}$);

$\sqrt{20} = \sqrt{(4\frac{17}{36})^2 - \frac{1}{1296}} = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{1296} : 8\frac{17}{18} = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{5473}{11592}$.

Soweit in genauer Uebereinstimmung mit Cardano (Abh. S. 40), der dasselbe Beispiel behandelt; Clavius giebt noch die Anweisung, die Annäherung vierten Grades aus $\sqrt{(4\frac{5473}{11592})^2 - \frac{1}{134374464}}$ zu finden.

V. Die Annäherung nach Nicolas Chuquet.

Treutlein, S. 66 (vergl. Abh. S. 43), hat bei

Estienne de la Roche, L'arismetique nouellement composée, Lyon, 1520,

ein absonderliches Verfahren nachgewiesen, aus einem oberen und einem unteren Grenzwerth einer Wurzel einen genaueren Mittelwerth zu finden. Es sei $\frac{a}{b} > \sqrt{A} > \frac{c}{d}$: so solle man $\dfrac{a+c}{b+d}$ bilden $= \frac{e}{f}$, versuchen, ob $\left(\frac{e}{f}\right)^2 \gtrless A$ sei, dann nach Befinden $\dfrac{e+c}{f+d}$ oder $\dfrac{a+e}{b+f}$ bilden und dieses Verfahren beliebig weit fortsetzen.

Nach Tannery (Bibliotheca Mathematica, 1887, S. 17) hat de la Roche diese Methode einem älteren Autor entnommen:

Nicolas Chuquet; Le triparty en la science des nombres, (von 1484 datirtes Manuscript, herausgegeben von Marre im Bullett. di bibliogr. d. sc. math. 13, 1880, S. 696—699).

Nach Eneström (Bibl. Math. 1887, S. 18—19, Anmerkung) hat die Methode Erwähnung gefunden bei

Butéon, Logistica quae et Arithmetica vulgo dicitur, Lugduni, 1559, S. 76 und 77.

Nun findet sich in dem auf der Landesbibliothek zu Kassel enthaltenen Exemplar der Arithmetik des Gemma (s. I ad 2^{a}) auf fo. 43 zu der Regel $\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a+1}$ am Rande eine handschriftliche Bemerkung in lateinischer Sprache folgenden Inhalts:

„$a+\frac{b}{2a+1}$ sei zu klein, dagegen $a+\frac{b}{2a}$ zu gross,

zum Beispiel $2\frac34>\sqrt{7}>2\frac35$;

wolle man eine grössere Annäherung finden, so solle man $\frac34=\frac68$ und $\frac35=\frac{6}{10}$ setzen und $\frac{6}{(10+8):2}=\frac{6}{18:2}=\frac69=\frac23$ bilden: $2\frac23$ sei dann ein genauerer Näherungswerth, und zwar ein zu grosser, da $(2\frac23)^2>7$ sei. Darum solle man $\frac35=\frac{12}{20}$ und $\frac23=\frac{12}{18}$ setzen und $\frac{12}{(20+18):2}=\frac{12}{19}$ bilden. Aehnlich finde man für $\sqrt{7\frac12}$ zunächst $3>\sqrt{7\frac12}>2$, dann $\sqrt{2^2+3\frac12}=2+\frac{3\frac12}{2.2}=2+\frac{3\frac12}{4}=2\frac78$, bezw. $=2+\frac{3\frac12}{2.2+1}=2+\frac{3\frac12}{5}=2\frac{7}{10}$, und zwar $2\frac78$ zu gross, $2\frac{7}{10}$ zu klein, hierauf, da $2\frac79$ die „intermedia“ der „fractiones“ $\frac78$ und $\frac{7}{10}$ sei, als genaueren Werth $2\frac79$. Ebenso folge aus $3>\sqrt{7\frac23}>2$ … $\sqrt{2^2+3\frac23}<2+\frac{3\frac23}{4}$, aber $>2+\frac{3\frac23}{5}$, also $2\frac{11}{12}>\sqrt{7\frac23}>2\frac{11}{15}$, und da für $\frac{11}{12}=\frac{22}{24}$, $\frac{11}{15}=\frac{22}{30}$ die „media fractio“ $\frac{22}{27}$ sei, als genauerer Näherungswerth $2\frac{22}{27}$.“

Während Chuquet und Butéon (s. Tannery a. a. O.) und de la Roche (Tr.) die Grenzwerthe a und $a+1$ zum Ausgang nehmen, geht hiernach der unbekannte Rechner von den Grenzwerthen $a+\frac{b}{2a}$ und $a+\frac{b}{2a+1}$ aus. Bemerkenswerth ist noch das Verfahren desselben, die Brüche, zwischen denen er mittelt, in solche mit gleichem Zähler und durch 2 teilbaren Nennern zu verwandeln.

VI. Annäherung nach der Formel $\sqrt{n}=\sqrt{na^2}:a$.

Aehnlich wie Alkarchî (Abh. S. 26) giebt diese Regel Ibn Albannâ in seinem Talkhys mit den in Marre's Uebersetzung (s. unter IV) folgendermassen lautenden Worten (S. 23):

„*Dans l'approximation il y a une autre méthode: c'est que tu multiplies le nombre dont on demande la racine par un nombre carré plus grand que lui* ($a^2>n$), *tu prends par approximation la racine du produit, et tu divises par la racine du carré-multiplicateur; ce qui en résulte, c'est la racine par approximation demandée.*“

Da Ibn Albannâ Beispiele so wenig giebt wie Alkarchî, so kann man nur vermuthen, dass das Verfahren auf a gleich 10 oder gleich einer höheren Potenz von 10 angewendet werden soll.

Ausdrücklich auf die Grundzahl 10 angewandt erscheint ausser bei den von Tr. (S. 69—71) und von mir (Abh. S. 43 flgg.) bereits angeführten Schriftstellern diese Methode bei

1. O. Fineus, Protomathesis (s. I ad 6).

Nach einer ausführlichen Anweisung behandelt er (fo. 10) das Beispiel $\sqrt{10}$: er bestimmt $\sqrt{10000000} = 3162$, findet als ganze Zahl 3 und verwandelt den Decimalbruch $\frac{162}{1000}$ in den Sexagesimalbruch $9' 43'' 12'''$. Dasselbe Vorgehen ist schon bei Joannes Hispalensis (Abh. S. 28), bei Johann von Gemunden (Abh. S. 43), bei Rabbi Elia (Abh. S. 44) nachgewiesen worden; es ist dort auch S. 28 an den Fehler erinnert worden, den man begeht, wenn man bei Näherungswerthen von $\frac{1}{1000}$ auf $\frac{1}{60^3}$ schliesst: im gegebenen Fall z. B. ist $\sqrt{10}$ in Sexagesimalbrüchen $= 3^0 9' 44'' 12'''$, beträgt also der Fehler eine volle Secunde. Von Bedeutung ist die Schlussbemerkung des Fineus durch den ausdrücklichen Hinweis auf Systembrüche mit der Grundzahl 10:

„*Posses tamen, inuenta radice 3162, accipere 3 pro integris, ueluti supra fecimus: sed 1 pro decima unius integri parte, 6 autem pro sex decimis eiusdem partis decimae, 2 tandem pro duabus decimis unius decimae alterius decimae partis integri, denaria numerorum obseruata ratione.*“

2. Maurolyci arithm. etc. (s. unter III) a. a. O.:

Für $\sqrt{8}$ könne man $29 > \sqrt{800} > 28$ bestimmen und so $2\frac{9}{10} > \sqrt{8} > 2\frac{8}{10}$ finden; es wird hingewiesen auf

$$\frac{1}{100}\sqrt{80000} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1000}\sqrt{8000000}.$$

3. Clavius wendet ausser den anderen schon erwähnten Methoden (s. I und III ad 4, II und IV) sowohl in der Epitome arithm. pract., c. 27, als auch in der Geom. pract. lib. VI, prop. 20 und 21,

das in Rede stehende Verfahren an. Ein gewisses Interesse gewähren von den Beispielen folgende:

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \frac{\sqrt{20000}}{\sqrt{30000}} = \frac{141}{173} \quad \text{und} \quad \sqrt{\tfrac{6}{7}} = \frac{\sqrt{6000000}}{\sqrt{7000000}} = \frac{2449}{2645}.$$

Ganz neu, wenigstens für weitere Kreise, dürfte die Anwendung der Formel $\sqrt{n} = \sqrt{na^2} : a$ auf die Grundzahl 4 sein. Ich habe dieselbe gefunden in

De arte supputandi, libri quatuor Cutheberti Tonstalli, hactenus in Germania, nusquam ita impressi.

Argentorati. Mense Februario anno MDXLIIII.*

In Worten lautet die Regel Tonstall's (S. 166 flgg.) allgemein:

---

* Graesse, trésor de livres rares et précieux, giebt die Jahreszahl 1551 an; Kästner (Gesch. d. Math. I, 94) hat die Originalausgabe, London, 1522, gesehen. — Der im Text angeführten Ausgabe hat der bekannte Schulmann Sturm auf dem Titelblatt ein empfehlendes Vorwort mitgegeben.

„Post primam in integris radicis exquisitionem, in qua reliquum superest: numerum illum non quadratum, cuius in integris radix inuenta est: per denominatorem cuiuscunque partis, quam optas, multiplica. Deinde per eundem denominatorem iterũ multiplica numerum productum. Quod cum factum erit: radicem numeri per secundam multiplicationẽ producti, exquire. Haec namque radix secũda, cunctas illius denominationis partes in numeri primo propositi radice contentas, demonstrabit. Atque ideo, si per partium denominatorem radicem illam secundam seces: numerus sectionis perferet primae radicis integra, & praeterea etiam partes aliquot illius denominationis. Caeterum aliquot minutiae semper restabunt quae minus quàm unam partem faciant, ut ad integrũ formandum partes illae nunquam deduci queant.“

Als Beispiel wird $\sqrt{8}$ gewählt, $8.4 = 32$, dann $32.4 = 128$ gebildet, $\sqrt{128} = 11$, $\sqrt{11} = 2\frac{3}{4}$ gefunden; um ein genaueres Ergebniss herzuleiten, wird $128.4 = 512$, $512.4 = 2048$ gebildet, $\sqrt{2048} = 45$, $\sqrt{8} = 2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}$ gefunden.

Die Regel für das Ausziehen der Cubikwurzel wird (S. 169) wieder allgemein gefasst. Ein Beispiel fehlt.

Schlussbemerkung.

Es liegt die Versuchung nahe, die bei Tonstall aufgefundene Methode auf die Erklärung der Archimedischen Näherungswerthe anzuwenden, da $\sqrt{5472132\frac{1}{16}} > 2339\frac{1}{4}$, $3013\frac{3}{4} > \sqrt{9082321}$, $2017\frac{1}{4} > \sqrt{4069284\frac{1}{36}}$ aus $\sqrt{n} = \sqrt{n.4^2} : 4$, und die sonst so grosse Schwierigkeiten machenden Werthe

$$\sqrt{349450} > 591\tfrac{1}{8}, \quad \sqrt{1350534\tfrac{33}{64}} > 1172\tfrac{1}{8}$$

aus $\sqrt{n} = \sqrt{n.4^4} : 4^2$ hergeleitet werden können. Aber abgesehen davon, dass ausser dem dritten heikelen Werthe $1838\frac{9}{11} > \sqrt{3380929}$ auch $1009\frac{1}{6} > \sqrt{1018405}$ sich ohne weitere Annahmen der Methode Tonstall's nicht fügt — es wäre erst der Nachweis zu liefern, dass die Griechen Brüche bevorzugt haben, deren Nenner Potenzen von 4 sind.

Recensionen.

Ueber anschauliche Quadratur und Kubatur, von Dr. Carl Gusserow, Oberlehrer am Dorotheenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit 4 Holzschnitten. Berlin 1886, R. Gärtner's Verlagsbuchhandlung. 8°. 10 S. Preis 60 Pf.

Verf. bespricht die „Umsetzung" zweier Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe in einander. Die Ausdehnung auf beliebige Vielecke ergebe sich leicht. Dabei verweist er auf den von ihm verfassten Leitfaden der Stereometrie. Sodann geht er zur Umsetzung eines Parallelflächners in einen Cubus über. Endlich wird das Pyramidenproblem besprochen.

K. Schwering.

Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe, dargelegt von Dr. Otto Reichel. Hilfsbuch für den Unterricht. Theil I: Natürliche, algebraische, gebrochene Zahlen. Berlin, Haude & Spener'sche Buchhandlung. 1886. 8°. 32 S. Preis?

Wir haben hier ein Werkchen vor uns, welches von rein formalen Grundsätzen aus nicht nur wissenschaftlich haltbare, sondern auch den Zwecken der Schule dienende Ergebnisse liefern will. Wie es scheint, ist die Zahl der Schulmänner, welche gleiche Ziele anstreben, im Wachsen begriffen. Das darf Niemand Wunder nehmen, der selbst den Wunsch hegt, das Beste, was er wissen kann, doch auch den Jungen wieder zu sagen. Der Verfasser geht von den Gesetzen der Addition und Multiplication aus und stellt nun die Rechnungsarten für Differenzen und Brüche neben einander. Es ist das den Lehrbüchern gegenüber, welche zuerst die Differenzen und dann die Brüche behandeln, ein zweifelloser pädagogischer Fortschritt. Referent glaubt noch einen Schritt weiter gehen zu müssen und spricht es als seine entschiedene Ueberzeugung aus, dass an die Multiplicationsgesetze sofort die Lehre von den Brüchen anzureihen ist, denen alsdann die Lehre von den Differenzen und den negativen Zahlen folgt.

Das Buch verdient Empfehlung.

K. Schwering.

Beiträge zur Kenntniss der Eigenschaften des ebenen Dreiecks. Von Dr. Heinrich Seipp. Mit 3 Figurentafeln. Halle a. S., Druck und Verlag von H. W. Schmidt. 1886. gr. 8°. 86 S. Preis 4 Mk.

Durch Rechnung und zwar fast ausschliesslich mit Hilfe der „Dreiliniencoordinaten“ erhält Verf. eine Reihe interessanter Sätze über das elementare Dreieck, welche er für neu hält. Referent gesteht gern zu, dass ihm diese Auffassung begründet erscheint. Leider hat es der Verf. nicht immer verstanden, dem durchweg so interessanten Stoffe die gefällige Form zu geben. Auch ist es ziemlich müssig, complicirteren Formeln den „Wortlaut“ beizugeben.

Uebrigens sei die fleissige Arbeit empfohlen.

K. Schwering.

Flächen- und Körperberechnung in Lehrsätzen und Aufgaben, nebst Regeln und Uebungsbeispielen aus der Arithmetik und Algebra zum Gebrauche für Navigationsschulen von P. Seelhoff. Dritte veränderte und vermehrte Auflage. Bremen, Druck und Verlag von M. Heinsius. 1886. kl. 8⁰. 106 S.. Preis 2 Mk.

Verf. behandelt die gemeinen, sowie die algebraischen Rechnungsarten in Beispielen, denen die betreffenden Regeln und Sätze ohne Beweis vorangestellt werden. Dabei findet sich häufig die Verweisung: „Breusing's Steuermannskunst“. Der geometrische Theil enthält mehrfach Begründungen.

Es ist gewiss anzuerkennen, dass viele Aufgaben ihrem Inhalte nach auf den betreffenden Lebenskreis hinweisen. Vom mathematischen Gesichtspunkte aus steht sonst das Urtheil wohl schon im Faust:

„Ihr seht ein Buch, wie and're mehr.
Habt ihr euch sonst schon umgethan?“

K. Schwering.

Quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Classen der Gymnasien und Realschulen. Von Dr. E. Bardey. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig 1887, B. G. Teubner. gr. 8⁰. 94 S. Preis 1 Mk. 80 Pf.

Man hat hier einen Auszug aus den „Algebraischen Gleichungen“ desselben Verfassers vor sich. — Die Sammlung ist in vieler Beziehung anerkennenswerth; der Uebergang vom Leichteren zum Schwierigeren ist im Ganzen mit Geschick durchgeführt, und die Resultate sind meist von ansprechender Eleganz. Häufig leitet eine kurze Anmerkung auf die richtige zur Lösung führende Spur, bei schwierigeren Aufgaben ist auf das grössere Werk verwiesen. Druck und Papier sind von vorzüglicher Qualität.

Das Buch verdient Empfehlung.

K. Schwering.

Buchstabenrechnung und Algebra nebst Uebungsaufgaben von Dr. W. Fraux, Professor am Gymnasium zu Arnsberg. Achte verbesserte und vermehrte Auflage, besorgt durch A. Lake, Oberlehrer am Gymnasium zu Deutschkrona. Paderborn und Münster, Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh. 1887. VIII, 363 S. Preis?

Wie die Vorrede angiebt, haben wir es bei der neuen Auflage mit einer ziemlich gründlichen Umarbeitung des bekannten Schulbuches zu thun. Es kann offenbar nicht Aufgabe einer Besprechung in dieser Zeitschrift sein, die Umarbeitung selbst ihrem Werthe nach zu prüfen; es soll nur das Buch so, wie es jetzt vorliegt, in Kürze angezeigt werden.

Was zunächst die Grundbegriffe der Arithmetik und die Beweise für die Additions- und Multiplicationsgesetze, für die Zeichen- und Bruchregeln betrifft, so merkt man vielen Verfassern unserer Lehrbücher das Streben an, sich durch die Klippen hindurchzuwinden, welche gleich am Eingang sich drohend thürmen. Bei völliger wissenschaftlicher Strenge muss für Leichtigkeit des Verständnisses Sorge getragen werden! Leider scheint uns im vorliegenden Buche die Umschiffung der Klippen nur theilweise geglückt zu sein. Es ist wohl nicht genau, wenn im Ganzen sieben Grundoperationen (S. 7) aufgeführt werden. Noch weniger können die Zeichen $+$ und $-$ S. 11 als Relationszeichen auf Beifall rechnen und es werden sich nicht viele Mathematiker die Forderung aufzwingen lassen, diese Relationszeichen von den „gleichgestalteten“ Operationszeichen zu unterscheiden. Auch erscheint S. 102 der Beweis, dass $\sqrt[n]{a}$, wenn a ganzzahlig, niemals ein Bruch sein kann (Irrationalität der n^{ten} Wurzel), ganz unzulänglich. Denn gerade die Hauptsache: „Ist $\frac{c}{d}$ ein auf seinen kleinsten Ausdruck gebrachter Bruch, so kann $\frac{c^n}{d^n}$ niemals eine ganze Zahl sein“ ist ohne Beweis behauptet.

Uebrigens ist es dem Referenten eine Freude, an dem Buche Manches anerkennen zu dürfen. So kann man die Darstellung der Theorie der Logarithmen, deren Berechnung durch eine Potenztafel, die Theorie der Kettenbrüche, die Lehre von den diophantischen Gleichungen nur gutheissen. Die Darstellung des binomischen Lehrsatzes ist die landläufige, während im Anhange die cubischen Gleichungen sehr ansprechend behandelt sind.

Druck und Papier sind nicht schlecht; aber die gewöhnliche lateinische Druckschrift verwendet zur Darstellung mathematischer Entwickelungen, so ein „a + bi“, verletzt das Auge.

Coesfeld, 1887. K. Schwering.

Martin Krause, **Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung**, nebst Anwendungen. Leipzig, Teubner. 1886.

Das uns zur Besprechung vorliegende Werk behandelt einen speciellen Theil aus dem Gebiete der hyperelliptischen Functionen, welches der Verfasser seit einer Reihe von Jahren durchforscht hat. Das Buch ist vorzugsweise eine zusammenfassende Darstellung der in verschiedenen Zeitschriften niedergelegten Ergebnisse dieser Untersuchungen. Entsprechend diesem Zwecke ist im ersten Theile des Werkes aus der allgemeinen Theorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen soviel aus den Arbeiten Anderer mitgetheilt, als zu einem leichteren Verständniss der eigenen Untersuchungen des Verfassers nothwendig erschien, während ferner liegende Partien, so namentlich Alles, was sich auf den Zusammenhang der Thetafunctionen mit den hyperelliptischen Integralen, d. h. das Umkehrproblem, bezieht, ausgeschlossen sind.

Die ersten 20 Paragraphen des Werkes sind diesen vorbereitenden Auseinandersetzungen gewidmet, bei welchen es vorzugsweise auf die Herleitung der zwischen den Thetafunctionen bestehenden algebraischen Relationen ankommt. Alle diese Relationen sind Folgerungen eines Hauptsatzes, welcher in § 5 unter dem Namen des „Transformationsprincips" abgeleitet ist:

„Zwischen je n^2+1 Thetafunctionen n^{ter} Ordnung besteht mindestens eine lineare Beziehung."

Auf diesen Satz gestützt, ergiebt sich zunächst zwischen höchstens je fünf (und wenigstens vier) der Quadrate der 16 fundamentalen Thetafunctionen eine lineare homogene Relation, und es lassen sich alle diese Thetaquadrate durch vier passend gewählte unter ihnen ausdrücken. Die grosse Zahl von Vierersystemen, die sich zu dieser Darstellung eignen, zerfällt in zwei verschiedene Classen, die der Verfasser als ungerade und gerade Vierersysteme bezeichnet und in den §§ 7 und 8 behandelt. Von besonderer Wichtigkeit sind hier die letzteren, welche auch Göpel'sche genannt werden.

Aus denselben Principien ergeben sich weitere Relationen zwischen je drei Producten zweier Thetafunctionen, welche in § 9 behandelt sind.

Damit ist die algebraische Abhängigkeit der Thetafunctionen vollständig dargestellt, und es verdient bemerkt zu werden, dass auch die in § 12 behandelten biquadratischen Gleichungen zwischen vier Thetafunctionen eines geraden Vierersystems, die sogenannten Göpel'schen Relationen, Folgen der Relationen zweiter Ordnung sind, aus denen sie hergeleitet werden können.

Lässt man in diesem Formelsystem die Argumente verschwinden oder setzt gewisse halbe Perioden für dieselben, so ergeben sich mannigfache Gleichungen, vermöge deren sich die vierten Potenzen der Quotienten zweier Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente durch drei Grössen, die Moduln $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, oder symmetrischer durch die Doppelverhältnisse von sechs Grössen, rational darstellen lassen.

Aus derselben Quelle fliessen auch noch die Additionstheoreme der Thetafunctionen, welche in § 13 in der zuerst von Königsberger hergeleiteten Form entwickelt und in § 14 verallgemeinert sind.

Alle bis hierher betrachteten Formeln haben das Eigenthümliche, dass sie in Bezug auf das Zeichen ϑ homogen sind, so dass in demselben nur

Aussagen über die Verhältnisse der Thetafunctionen enthalten sind. Anders verhält es sich bei den in §§ 15 und 16 abgeleiteten Rosenhain-schen Differentialformeln, d. h. den Relationen, welche die Functionaldeterminanten je zweier ungerader Thetafunctionen (für die Nullwerthe der Argumente) als Producte der Nullwerthe gerader Thetafunctionen ausdrücken. Diese Formeln liegen tiefer und zu ihrer Herleitung ist ein neues Hilfsmittel nöthig, welches entweder aus der Anwendung einer Transformation zweiter Ordnung, oder der partiellen Differentialgleichungen, welchen die Thetafunctionen genügen, besteht, da hierbei die Abhängigkeit von den Moduln wesentlich mit in Betracht kommt.

Hier würde sich naturgemäss die Untersuchung der Differentialquotienten der Thetafunctionen auch für variable Argumente und damit die Lösung des Umkehrproblems angeschlossen haben; es liegt dies aber ausserhalb der Grenzen, die sich der Verfasser gesteckt hat.

Nach diesen Vorbereitungen geht nun das Werk auf sein eigentliches Thema, die Transformationstheorie, über. Das allgemeine Problem dieser Theorie besteht darin, Thetafunctionen rational durch andere auszudrücken, mit anderen Variablen und anderen Moduln. Die Variablen der einen Functionenart sind lineare und homogene Functionen von denen der andern Art, und ebenso sind die Moduln der ersteren lineare, aber gebrochene Functionen von denen der zweiten.

Diese Transformationen hängen wesentlich ab von einem System von 16 ganzen Zahlen, die an sechs Bedingungen gebunden sind, in welchen eine weitere positive ganze Zahl, der Transformationsgrad, vorkommt. Ist der Transformationsgrad $=1$, so heisst die Transformation linear. Diese Transformationen lassen sich, nach der Multiplicationsregel der Determinanten, zusammensetzen und so auch wieder in mehrere nacheinander auszuführende zerlegen. Die Zusammensetzung mit linearen Transformationen führt zu dem Begriffe der äquivalenten Transformationen und der Transformationsclassen, deren Anzahl für jeden gegebenen Transformationsgrad endlich ist und im § 23 allgemein bestimmt wird. Die folgenden Paragraphen sind einer allgemeinen und eingehenden Discussion der unendlich vielen linearen Transformationen gewidmet, durch deren Anwendung die Thetafunctionen theils unter einander vertauscht, theils nur mit constanten Factoren versehen werden. Diese Sätze werden nun in den folgenden Paragraphen auf eine Reihe besonderer Probleme aus der Theorie der hyperelliptischen Functionen angewandt, wobei die linearen Transformationen den Nutzen haben, dass mit ihrer Hilfe aus jeder Formel eine Reihe anderer hergeleitet werden kann. Das wird unter Anderem benutzt, um in den §§ 27 und 28 die Differentialquotienten der Thetafunctionen in Bezug auf die Variablen zunächst für veränderliche Argumente und sodann für die Nullwerthe derselben abzuleiten zum Behuf der Entwickelung der hyperelliptischen Functionen in Potenzreihen.

Hieran schliesst sich in den §§ 29—32 eine interessante, wenn auch etwas verwickelte Untersuchung über die Differentialgleichungen, denen gewisse in der Theorie der Thetafunctionen auftretende Grössen, als Functionen der Moduln betrachtet, genügen.

Einen weiteren Nutzen besitzen die linearen Transformationen in der Theorie der Multiplication der Thetafunctionen und hyperelliptischen Functionen, welcher die §§ 33 und 34 gewidmet sind.

Bei der Betrachtung der Transformationen höherer Ordnung nimmt die zweite Ordnung, ähnlich wie bei den elliptischen Functionen, eine exceptionelle Stellung ein und wird besonders behandelt.

Wenn man der mannigfachen wichtigen Folgerungen gedenkt, zu welchen die Modulargleichungen der elliptischen Functionen auf den verschiedensten Gebieten namentlich der Algebra und Zahlentheorie geführt haben, so wird man mit besonderem Interesse die §§ 40 flgg. betrachten, welche von den Modulargleichungen und Multiplicatorgleichungen bei den hyperelliptischen Functionen handeln; man findet da zunächst den Nachweis der Existenz einer solchen Gleichung, deren Grad für einen gegebenen Transformationsgrad gleich ist der Anzahl der zu diesem Grade gehörigen Transformationsclassen und durch welche die algebraische Darstellung der Coefficienten in den Transformationsgleichungen durch die Nullwerthe der ursprünglichen Thetafunctionen vermittelt wird. Hiermit ist ohne Zweifel ein Gebiet betreten, welches noch reiche Früchte in seinem Schoosse birgt. Leider bietet die Durchführung im Einzelnen und damit die Ausbeutung noch die grössten Schwierigkeiten, so dass die wirkliche Aufstellung dieser Gleichung nicht einmal für die einfachsten Fälle sich vollständig durchführen lässt.* Gleichwohl ist die Hoffnung nicht aufzugeben, dass, etwa durch gruppentheoretische Betrachtungen, die algebraische Theorie dieser Gleichungen noch erheblich gefördert werden kann.

Mit dem § 46 beginnt der in der Vorrede angedeutete dritte Theil, in welchem die Transformationstheorie auf neue Grundlagen gestellt werden soll. Der hierbei massgebende Grundgedanke ist folgender.

Betrachtet man bei einer transformirten Thetafunction die dieselben definirenden Periodeneigenschaften und bezieht dieselben auf die ursprünglichen Variablen, so ergeben sich Functionen, bei welchen einige der Perioden durch n getheilt erscheinen, und welche aufgefasst werden können als Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus gebrochenen Zahlen mit dem Nenner $2n$ gebildet sind. Diese Functionen haben dann die Eigenschaft, dass ihre n^{ten} Potenzen sich rational durch die gewöhnlichen Thetafunctionen ausdrücken lassen. Durch diese Functionen gewinnt das Transformationsproblem eine neue Darstellung und Erweiterung. Den Schluss und die

* Man vergl. darüber eine Correspondenz zwischen Brioschi und Krause im 28. Bd. der Mathematischen Annalen.

Krone der ganzen Betrachtungen bildet die Anwendung der Transformationstheorie auf das Theilungsproblem, welchem auch die von demselben Verfasser herrührende Festschrift der Landesuniversität Rostock zur fünften Säcularfeier der Universität Heidelberg gewidmet ist.

Die Resultate dieser Untersuchung zeigen eine tiefgreifende Analogie mit den bekannten Sätzen über die Theilung der elliptischen Functionen.

Es wird zunächst das allgemeine Theilungsproblem behandelt, bei welchem die variablen Argumente der hyperelliptischen Functionen durch eine ungerade Primzahl n getheilt werden. Wie aus der Natur der vierfach periodischen Functionen zu erwarten ist, hängt die Lösung dieser Aufgabe von einer algebraischen Gleichung des Grades n^4 ab, und zwar lässt sich dieselbe, wie gezeigt ist, auf vier nacheinander zu lösende algebraisch lösbare Gleichungen n^{ten} Grades zurückführen.

In diesen Lösungen kommen aber noch als Constanten die Wurzeln der sogenannten speciellen Theilungsgleichung vor, d. h. solche hyperelliptische Functionen, deren Argumente Bruchtheile der Perioden sind. Diese Gleichung ist nicht algebraisch lösbar; es lassen sich aber ihre Wurzeln, wie der Schlusssatz des Werkes lautet, mit Hilfe von Quadratwurzeln durch die ursprünglichen, die transformirten Moduln und durch n^{te} Einheitswurzeln ausdrücken, und damit ist das Theilungsproblem auf die früher behandelte Modulargleichung zurückgeführt.

Marburg, October 1887. H. Weber.

Stolz, Dr. Otto, **Vorlesungen über allgemeine Arithmetik.** Zweiter Theil: Arithmetik der complexen Zahlen. Leipzig 1886, Verlag von B. G. Teubner.

Das günstige Urtheil, welches wir in dieser Zeitschrift* über den ersten Theil des vorliegenden Werkes ausgesprochen und begründet haben, können wir in erhöhtem Maasse auch für den zweiten Theil abgeben. Es war keine leichte Aufgabe, die Grundlehren der Functionentheorie ohne die Anwendung der Differentialrechnung vorzunehmen und so vorzutragen, dass ein Jünger der Mathematik, dessen Geist noch nicht durch die Differential- und Integralrechnung geschult ist, für sie das nöthige Verständniss und das hinreichende Interesse besitzt. Diese Aufgabe hat Herr Stolz durchaus gelöst, und wenn vielleicht das volle Verständniss erst dem Vorgeschrittenen möglich ist, so kann der Anfänger schon das Gebotene genügend verstehen und wird hierdurch in den Stand gesetzt, andere Theile sich mit um so grösserem Verständniss anzueignen. Dies Urtheil über das Werk glauben wir nicht besser begründen zu können, als wenn wir den Inhalt desselben in ziemlicher Ausführlichkeit darlegen.

---

* Jahrg. XXXI, S. 182–187.

Der erste Abschnitt behandelt die analytische Theorie der complexen Zahlen unter der Forderung, „dass sämmtliche Regeln über das Rechnen mit reellen Zahlen auch für die neuen Zahlen Giltigkeit behalten“. Der Verfasser betrachtet zunächst zwei willkürliche Einheiten, untersucht für diese alle nur möglichen Fälle und findet, unter steter Anlehnung an Weierstrass, dass nur ein einziges System eine Erweiterung des Zahlbegriffes darstellt. Dass Zahlsysteme mit mehr als zwei Einheiten überflüssig sind, wird hauptsächlich nach Weierstrass' Vorgange gezeigt; jedoch wird auch die Dedekind'sche Darlegung in hinreichender Ausführlichkeit vorgeführt. Nur zu loben ist hier, dass für mehr als zwei Einheiten nur der allgemeine Fall durchgeführt und nicht jede Ausnahme berücksichtigt ist. Nachdem so erwiesen ist, dass nur die gemeinen complexen Zahlen Berechtigung besitzen, behandelt der zweite Abschnitt die synthetische Theorie derselben. Derselbe vergleicht zunächst die Strecken der Euklid'schen Ebene nach Grösse und Lage, und zeigt ohne jede Rücksicht auf das erste Capitel das Rechnen mit diesen Strecken. Für diese Betrachtung kann man alle Strecken von demselben Punkte ausgehen lassen; indem das geschieht, werden zur systematischen Darstellung derselben zwei unabhängige Einheiten erfordert. Als solche können zunächst die rechtwinkligen Coordinaten des Endpunktes gewählt werden, woraus sich die volle Uebereinstimmung dieser neuen Grössen mit den gemeinen complexen Zahlen ergiebt, und letztere erweisen sich jetzt als wichtig für die Lösung rein geometrischer Aufgaben. Nun kann man aber jede solche Strecke durch die Polarcoordinaten ihres Endpunktes bestimmen und dadurch wird man zu den trigonometrischen Functionen (für reelle Argumente) geführt. Deren Theorie gestattet den Nachweis zu führen, dass für ein ganzes positives n die n^{te} Wurzel aus jeder complexen Zahl existirt und n Werthe hat, von denen einer als Hauptwerth ausgezeichnet wird, und führt zur Erweiterung des Begriffes der Potenz für beliebige reelle Exponenten.

Der dritte Abschnitt: complexe Veränderliche und Functionen, enthält hauptsächlich eine Reihe nothwendiger Definitionen, zunächst für complexe Functionen reeller Variabeln, dann für beliebige complexe Functionen. Schon hier erweist sich der Weierstrass'sche Ausdruck „absoluter Betrag einer complexen Grösse“ statt des Argand'schen Moduls als ausserordentlich wichtig; noch deutlicher tritt aber die Wichtigkeit dieses Ausdrucks im folgenden Theile des Werkes hervor, wo derselbe gestattet, die für reelle Variabeln im ersten Bande gegebenen Beweise häufig unmittelbar auf complexe Grössen zu übertragen. Eine angenehme Zugabe für diesen Abschnitt ist es, dass für die Aehnlichkeit und die Kreisverwandtschaft der Begriff der conformen Abbildung erläutert wird. — Im vierten Abschnitt, welcher die ganzen rationalen Functionen behandelt, werden die Ableitungen dieser Functionen hergeleitet, die Kennzeichen für die Identität mehrerer solcher Functionen angegeben, die Theilbarkeit derselben besprochen, besonders aber der Fundamentalsatz der Algebra nach Argand bewiesen. Als Anhang ist die Theorie der arithmetischen Reihen und Interpolationen beigegeben. — Als Ziel des fünften Abschnittes hat dem Verfasser, wie er in der Vorrede sagt, vorgeschwebt die Erledigung der Fragen über den Giltigkeitsbereich der Entwickelung gewisser Functionen in Potenzreihen. Der Anfang ist vollständig dem entsprechenden Capitel des ersten Bandes, der Theorie der reellen unendlichen Reihen, nachgebildet. Vielfach genügt es, die Sätze allein anzugeben, da beim Beweise entweder keine Aenderung eintritt oder höchstens das Convergenzintervall durch Convergenzbereich zu ersetzen ist. Bedingte und unbedingte, gleichmässige und ungleichmässige Convergenz, Potenzreihen, deren Stetigkeit, Bedingung für die Identität von Potenzreihen, ihre Ableitungen werden recht ausführlich im engsten Anschluss an den ersten Band behandelt. Daran schliesst sich die Entwickelung des Begriffes einer analytischen Function nach Weierstrass, die Erforschung des wahren Convergenzbereiches einer Potenzreihe nach demselben, die Angabe des Maximums des Grenzwerthes solcher Reihen auf gewissen Kreisen und andere Sätze. Da die Differential- und Integralrechnung nicht vorausgesetzt wird, so müssen die Beweise mehrfach in anderer als der bekannten Art geliefert werden. Zwei hierher gehörige Sätze von Cauchy und Laurent werden nicht in voller Allgemeinheit bewiesen, sondern es wird von vornherein die Existenz eines Functionenelementes vorausgesetzt. Daneben werden auch manche andere interessante Sätze mit ausführlichen Beweisen mitgetheilt; ich erinnere nur an den Weierstrass'schen Doppelreihensatz und an die Möglichkeit, durch denselben analytischen Ausdruck verschiedene analytische Functionen darzustellen.

Eine wichtige Anwendung dieser Theorie liefert der sechste Abschnitt, worin die einfachsten Reihen einer allseitigen gründlichen Prüfung unterzogen werden, nämlich die Reihe für e^x, $\cos x$, $\sin x$, $lg\, x$, die binomische und die logarithmische Reihe, $arctg\, x$, $arcsin\, x$, $\cos(arcsin\, x)$, $\sin(arcsin\, x)$, $1^t+2^t+\cdots+n^t+\cdots$ Den Zugang bildet die Aufgabe: Eine analytische Function $f(x)$ zu ermitteln, welche bei beliebigen x und y der Functionalgleichung $f(x)f(y)=f(x+y)$ und ausserdem der Bedingung $f(1)=a$ genügt. Die Erledigung dieses Problems führt naturgemäss auf die genannten Functionen, welche erst hier ihre volle Erledigung finden, da jetzt erst alle auftretenden Grössen complexe Werthe annehmen dürfen.

Im Gegensatz zu Weierstrass wird im siebenten Capitel das unendliche Product als Grenzwerth eines Productes bei unbegrenzt wachsender Zahl der Factoren definirt. Aber die Frage nach der unbedingten Convergenz eines solchen Productes führt von selbst die Beziehung zu den unendlichen Reihen herbei. Zwar werden nur die Producte für $\sin x$ und $\cos x$ entwickelt, aber die Theorie der unendlichen Producte liefert auch noch Sätze über Potenzreihen wichtiger Functionen, und diese werden ebenfalls in diesem Capitel behandelt. — Recht dankbar sind wir dem Verfasser auch für die Beigabe des achten Abschnittes, welcher die Kettenbrüche behandelt. Indem dieselben zunächst als endlich vorausgesetzt werden, geht die allmälige Berechnung zunächst vom Ende aus. Das ist nicht nur an sich am natürlichsten, sondern ermöglicht auch, die Bedingungen anzugeben, unter denen überhaupt ein Kettenbruch Bedeutung hat. Auch wird hierdurch keineswegs die Beweisführung erschwert; denn die beim Fortschreiten von rechts nach links gewonnenen Resultate geben unmittelbar den Weg an, wie man von links nach rechts vorangehen muss. Besondere Sorgfalt wird der Frage nach der Convergenz der unendlichen Kettenbrüche, hauptsächlich im Anschluss an Seidel und Stern, zugewandt. Die periodischen werden in dieser Hinsicht auch im Falle complexer Theilzähler und Theilnenner untersucht; für nichtperiodische wird unter dieser Voraussetzung allerdings auch ein Kriterium angegeben, aber betreffs der weiteren Untersuchungen wird vorausgesetzt, dass alle vorkommenden Grössen reell sind.

Wenn wir bei diesem Ueberblick auch schon etwas weitläufig geworden sind, so möchten wir doch ausdrücklich hervorheben, dass wir den Inhalt des Buches keineswegs erschöpft haben. Vielmehr hat es der Verfasser verstanden, noch manche andere Partie (wir erinnern nur an die Bernoullischen Zahlen und Functionen) dem Werke einzuverleiben. Auch dürfen wir nicht verschweigen, dass mancher im Buche angegebene Satz oder Beweis Eigenthum des Herrn Stolz ist. Wenn wir einen Wunsch aussprechen sollen, so geht er dahin: der Verfasser wolle an mehreren Stellen auf grössere Schärfe und Genauigkeit des Ausdrucks Bedacht nehmen; wir erinnern an den Satz V. 10. S. 160: „Haben zwei Potenzreihen $f(x)$ und $g(x)\dots$ die Eigenschaft, dass zu jeder positiven Zahl δ ein von Null verschiedener Werth von x, dem absoluten Betrage nach kleiner als δ, gehört, wofür die Gleichung $f(x)=g(x)$ besteht, so müssen die Coefficienten der nämlichen Potenzen von x in beiden Reihen einander gleich sein", dessen Ausdruck eine falsche Auffassung sehr nahe legt. Auch können wir nicht verstehen, wie im Satz auf S. 282 die Divergenz oder Convergenz der Reihe $h_1+h_2+h_3+\cdots$ auf die Divergenz einer oder keiner der Reihen $h_1+h_3+h_5+\cdots$ und $h_2+h_4+h_6+\cdots$ hinauskommen soll.

Das Buch bedarf unseres Erachtens einer Empfehlung nicht; je mehr und je genauer dasselbe studirt wird, um so mehr wird bei der heranwachsenden mathematischen Generation der Sinn für Gründlichkeit gepflegt, um so mehr ist zu hoffen, dass der schönste Zweig der mathematischen Wissenschaften, die reine Analysis, tüchtige Jünger und dereinst kräftige Förderer finden wird.

Braunsberg. W. Killing.

Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung · mit zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, Physik etc. Für höhere Lehranstalten und den Selbstunterricht bearbeitet von Friedrich Autenheimer, gew. Director des Zürcherischen Technikums zu Winterthur, Herausgeber von „Bernoulli's Vademecum des Mechanikers", von „Bernoulli's Dampfmaschinenlehre" und von den „Aufgaben über mechanische Arbeit". III. Auflage, mit 152 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Weimar 1887, bei Bernhard Friedrich Voigt. VIII, 522 S.

Das Wort „Elementarbuch" und die dem Namen des Verfassers beigefügten näheren Bestimmungen kennzeichnen dieses Buch weit besser als die Angabe, dass es für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht bearbeitet sei. Wenn es überhaupt heute noch möglich ist, was wir einigermassen bezweifeln, durch Selbstunterricht zum Mathematiker sich auszubilden, so dürfte es nur unter Anwendung solcher Lehrbücher thunlich sein, welche auch den heute geforderten strengen Gang der Beweisführungen sich zur Regel gemacht haben; und sofern die Universität eine höhere Lehranstalt ist, kann das bei ihren Vorlesungen zu benutzende Lehrbuch auch nur nach dem gleichen Prüfungsmittel ausgewählt werden. Vor ihm besteht aber das Antenheimer'sche Buch keineswegs. Wer dagegen das Handwerkszeug der Infinitesimalrechnung allein zu technischen Ausarbeitungen braucht und die Richtigkeit der mangelhaft bewiesenen Formeln auf Treu' und Glauben anzunehmen bereit ist, der wird sich dieses Buches bedienen können. Dass aber auch ein solcher Kreis von Benutzern wirklich vorhanden ist, beweist das Erscheinen der III. Auflage. Der Mathematiker von Fach kann übrigens gleichfalls zu einem Zwecke dieses Lehrbuch benutzen, nämlich um aus demselben eine Reihe von recht praktisch ausgewählten mechanischen und physikalischen Uebungsaufgaben zu entnehmen.

Cantor.

Grundriss der Differential- und Integralrechnung. I. Theil: Differential-Rechnung von M. Stegemann, Dr. phil., weil. Professor an der technischen Hochschule zu Hannover. V. vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage mit 66 Figuren im Texte, herausgegeben von Dr. Ludwig Kiepert, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover. Hannover 1888, Helwing'sche Verlagsbuchhandlung (Th. Mierzinsky, königl. Hofbuchhändler, Schlägerstrasse 20). XII, 465 S. [Die Tabelle der wichtigsten Formeln aus der Differentialrechnung ist als Separatabdruck für 50 Pf. durch jede Buchhandlung zu beziehen.]

Zwei Jahre später datirt, als die von uns (Bd. XXXI, hist.-lit. Abth. S. 227—228) angezeigte Integralrechnung, ist nun auch die Differentialrechnung in neuer Bearbeitung erschienen. Herr **Kiepert** hat die dreisternige Larve abglegt, die damals für uns ebenso wenig, wie für andere Fachgenossen den Herausgeber wirksam verhüllte, die wir aber doch achten zu müssen glaubten. Er hat in der That sich seiner Leistung nicht zu schämen, und das Lob, welches wir dem Anonymus der Integralrechnung spendeten, dürfen wir Herrn **Kiepert** ins Gesicht wiederholen. Auch die Differentialrechnung ist klar und fasslich, ohne der heute geforderten Strenge zu entbehren. Die Beispiele sind zahlreich, sind gut gewählt und mit genügender Ausführlichkeit behandelt, um dem das Buch mit der Feder in der Hand Durchrechnenden als Muster für eigene kleinere Arbeiten dienen zu können. Kurzum, das in neuem Gewande nunmehr zur Verfügung stehende vollständige Lehrbuch wird gewiss an technischen Hochschulen bald das fast alleinige Bürgerrecht sich erwerben und auch Mathematikern von Fach am Anfange ihrer Studienzeit genügen können, bevor sie das Bedürfniss empfinden, sich vollständigerer und weiter führender Werke zu bedienen.

Cantor.

Die Determinanten in genetischer Behandlung zur Einführung für Anfänger. Von Adolf Sickenberger, Professor am K. Maximiliansgymnasium in München. Zweiter Abdruck. München 1887, bei Theod. Ackermann. 80 S.

Die Auflösung zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten führt zu Ausdrücken, welche Determinanten zweiten Grades genannt werden und deren Haupteigenschaften sich ergeben; werden die gegebenen Gleichungen homogen, so verschwindet ihre Determinante, so oft die Gleichungen durch von Null verschiedene Werthe erfüllt werden, und die Wurzeln sind selbst Determinanten zweiten Grades proportional. Nun folgt die Behandlung dreier linearer Gleichungen mit drei Unbekannten, welche zum Begriffe der Determinante dritten Grades und zu deren Eigenschaften führt, wobei die Unterdeterminante auftritt. Das Multiplicationstheorem für Determinanten zweiten und dritten Grades schliesst sich an. Jetzt gelangt man durch Verallgemeinerung der bisher entwickelten Sätze zur Determinante n^{ten} Grades. und schliesslich zu deren Anwendung bei Auflösung von n linearen Gleichungen.

So der Gedankengang des Verfassers, der ganz geeignet erscheint, Schüler von Mittelschulen in die Determinantenlehre einzuführen, und dem man den Namen eines genetischen Verfahrens wohl beilegen darf.

Cantor.

Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, systematisch entwickelt von Dr. August Zillmer. II. Auflage. Berlin 1887, Nicolai'sche Verlagsbuchhandlung, R. Stricker. IV, 187 S.

Wir haben Bd. XXXI dieser Zeitschrift, historisch-literarische Abtheilung S. 179—181 über ein Buch von H. Bärlocher berichtet, welches unter Anderem mit Rentenrechnung sich beschäftigt. Wir haben bei dieser Gelegenheit auf Oettinger, Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen, hingewiesen und auf den bei ihm vertretenen und bewiesenen relativen Zinsfuss im Gegensatz zu sonst vielfach gebrauchtem Discontirungsverfahren aufmerksam gemacht. Das heute uns zur Besprechung vorliegende Buch zeigt, wie nothwendig jene Bemerkung war, und zwingt uns, dieselbe ausführlicher zu wiederholen.

Sei eine Summe von Mk. 200 zu 4 Procent zinstragend ausgeliehen. Nach einem halben Jahre wird der fällige Zins mit Mk. 4 und überdies Mk. 100 der Schuld bezahlt. Nach einem weiteren halben Jahre werden nebst Mk. 2 Zins die anderen Mk. 100 gezahlt, und die Schuld ist getilgt.

Zweifellos muss also bei 4 Procent Verzinsung der Baarwerth einer Forderung von Mk. 104 nach einem Halbjahr und von Mk. 102 nach zwei Halbjahren zahlbar sich auf Mk. 200 belaufen, und jede Discontirung, welche dieses Ergebniss nicht liefert, muss falsch sein. Bei π Procent und S als ursprünglichem Darlehen sind die beiden geforderten Zahlungen naturgemäss $\frac{\pi.S}{200}+\frac{S}{2}=\frac{100+\pi}{100}\cdot\frac{S}{2}$ und $\frac{\pi.S}{400}+\frac{S}{2}=\frac{200+\pi}{200}\cdot\frac{S}{2}$, d. h. S muss als Baarwerth von nach einem Halbjahr fälligen $\frac{100+\pi}{100}\cdot\frac{S}{2}$ und von nach zwei Halbjahren fälligen $\frac{200+\pi}{200}\cdot\frac{S}{2}$ erscheinen.

Herr Zillmer sagt nun S. 2, nachdem er die Formel $S=\frac{S_n}{r^n}$ abgeleitet, in welcher n die Anzahl der Jahre, S_n die Forderung nach n Jahren und r der Ausdruck $\frac{100+\pi}{100}$ bedeutet: „Nach der bisherigen Entwickelung hat man unter n eine ganze Zahl zu verstehen. Wir wenden jedoch dieselben Formeln auch dann an, wenn n eine gebrochene Zahl ist.“

Folglich rechnet er den Baarwerth der beiden erwähnten Forderungen zu:

$$\frac{100+\pi}{100}\cdot\frac{S}{2}\cdot\left(\frac{100}{100+\pi}\right)^{1/2}+\frac{200+\pi}{200}\cdot\frac{S}{2}\cdot\frac{100}{100+\pi}$$
$$=\frac{S}{2}\left[\left(\frac{100+\pi}{100}\right)^{1/2}+\frac{200+\pi}{200+2\pi}\right],$$

eine Summe, die nie mit S übereinstimmt, mag für π irgendwelcher positive Werth eingesetzt werden.

Die richtige Discontirung wird von der Thatsache auszugehen haben, dass bei Ausbedingung halbjährlicher Zinszahlung stets und überall in der Welt die Meinung obwaltete, der Zins eines Halbjahres solle durch $\frac{S.\pi}{200}$ gerechnet werden, mithin so, als wenn $\frac{\pi}{2}$ der Procentsatz, 1 Halbjahr die

Zeiteinheit wäre, und diese Zurückführung des Procentsatzes auf die neue kürzere Zeiteinheit nennt man eben seit Oettinger den relativen Zinsfuss. Die Discontirung der nach 1, 2, 3, ... Halbjahren fälligen Zahlungen muss demnach durch Vervielfältigung mit $\left(\frac{100}{100+\frac{\pi}{2}}\right)^i$ und $i=1, 2, 3, \ldots$ erfolgen. Die beiden mehrgenannten Forderungen erhalten so den Baarwerth:

$$\frac{100+\pi}{100}\cdot\frac{S}{2}\cdot\frac{100}{100+\frac{\pi}{2}}+\frac{200+\pi}{200}\cdot\frac{S}{2}\cdot\left(\frac{100}{100+\frac{\pi}{2}}\right)^2=S.$$

und damit ist die Richtigkeit der Schlussfolge bestätigt.

Herr Zillmer geht also von einer falschen Grundformel aus (leider, wie wir zu wissen glauben, nicht alleinstehend mit diesem Irrthum), und dementsprechend sind alle Formeln, in welchen Bruchjahre bei ihm vorkommen, falsch. In Zahlen ist der Fehler nicht gerade unerheblich. Bei 4procentiger Verzinsung ist z. B. der Baarwerth einer ein Jahr lang am Ende jedes Vierteljahrs zu leistenden Zahlung 1 nach der Formel mit gebrochenen Exponenten 3,903536, nach relativem Zinsfuss 3,901966, und erstreckt sich die Rentenzahlung über mehrere Jahre, so wächst natürlich der Unterschied beider Ergebnisse ganz beträchtlich. Trotzdem ist praktisch eine Gefahr bei der Rechnung nach der unrichtigen Formel zum Zweck der Erwerbung einer Rente nicht vorhanden, weil der Werth der Rente zu gross herauskommt, die Versicherungsgesellschaft also allenfalls den Rentennehmer übervortheilen, nie aber dadurch in ihrer Zahlungsfähigkeit beeinträchtigt sein wird. Bei den Abschnitten über Capitalversicherung, verbundene Renten und verbundene Capitalversicherung kommen Rentenzahlungen nicht in Betracht, mit Ausnahme des einzigen § 66 (S. 110—111). Hier können wir also unsere theoretische Bemängelung fallen lassen und die Reichhaltigkeit des betreffenden Stoffes, sowie den Wechsel in der Art der Behandlung einzelner Aufgaben uneingeschränkt anerkennen.

Nach dem ersten der Prämienberechnung gewidmeten Theile wendet sich der Verfasser in einem zweiten Theile zur Berechnung der Prämienreserve und der erwartungsmässigen Sterblichkeit. Unter Prämienreserve versteht Herr Zillmer das Gleiche, was von Anderen auch wohl Sicherheitsfonds genannt wird: das rechnungsgemässe Guthaben eines Versicherten in jedem gegebenen Augenblick. Kenner des Lebensversicherungszweiges wissen zur Genüge, dass über die Berechnung dieser Reserve, insbesondere über die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit, dieselbe im ersten Jahre um die Abschlusskosten zu kürzen, seit Jahren eine Fehde zwischen Herrn Zillmer und dem Director der Karlsruher Versorgungsanstalt, Herrn Dienger, besteht und dass keiner von Beiden im Stande war, den Gegner zu überzeugen. Herr Zillmer verharrt in der Anmerkung S. 144–145 wiederholt bei seiner

Meinung, die wir — der Dienger'schen Richtung folgend — zu billigen nicht vermögen. Abschlusskosten gehören nun einmal zu den Verwaltungskosten und sollen unserer Auffassung nach die Reserve nicht vermindern dürfen.

CANTOR.

Freundschaftliche Bewirthung meiner mathematischen Brüder mit einem Tractament von sechs Gerichten. Oder: Curieuse mathematische Aufgaben von JAKOB JAKOBSEN, Schullehrer zu Tinnum auf Sylt. Schleswig 1790. Gedruckt in der Königl. privileg. Serringhausenschen Buchdruckerei. Neu herausgegeben als Festgabe zum hundertjährigen Jubiläum des Seminars zu Tondern von dem mathematischen Verein „Mathesis" in Valdivia 1887. Flensburg, Verlag von Aug. Westphalen.

In den Jahren 1739—1818 lebte auf der Insel Sylt ein sonderbarer Patron: Jakob Jakobsen. Volksschullehrer von Beruf, Mathematiker aus Neigung, entfremdete er sich mehr und mehr seinen Schulpflichten, denen er vorher erfolgreich nachgekommen zu sein scheint, und wurde aus ziemlich nichtigen Ursachen, wobei Neid und Feindschaft mitgewirkt haben sollen (wie sein Biograph C. P. Hansen sagt), kurz nach 1790 seiner Stelle entsetzt. Seitdem widmete er sich vollständig dem früher als Nebenbeschäftigung geübten Unterricht im Navigationswesen und der Landmessung. Ein Zögling des Schullehrerseminars zu Tondern, hatte der eigenthümliche Mann überall in den schleswig-holsteinischen Herzogthümern persönliche Beziehungen, die er auf sommerlichen Ferienfussreisen so auszubeuten verstand, dass er mit wenigen Pfennigen in der Tasche wochenlang umherstreifte, ohne seine Familie oder seine Schulgemeinde von seinen Aufenthaltsorten in Kenntniss zu setzen. Sein mathematisches Wissen überstieg die Anfangsgründe nicht. In geistreicher Anwendung derselben hat er die Aufgaben zusammengestellt, welche, wie die Ueberschrift der neuen Ausgabe uns belehrt, vor fast 100 Jahren, 1790, zuerst in Druck erschienen. Die neuen Herausgeber, Mitglieder eines in Valdivia (Chile) bestehenden mathematischen Vereins und dem Heimathslande Jakob Jakobsen's entstammend, haben auf bis zum 1. September 1888 bei ihnen einlaufende richtige Lösungen der Aufgaben Preise ausgesetzt. So bieten sie für die erste vollständige Lösung sämmtlicher Aufgaben ein Fass besten in Chile gewachsenen Portweins, und ähnliche Preise sind auch dem ersten Löser der jeweils einzeln bezeichneten Aufgaben zugedacht. Ein solches Preisausschreiben lässt von vornherein vermuthen, dass doch ziemlich harte Nüsse zu knacken sein dürften, und wirklich scheinen die Aufgaben — soweit wir aus flüchtigem Lesen urtheilen können — den Scharfsinn der Leser herauszufordern. Trigonometrie, Combinatorik, Lehre von grössten und kleinsten Werthen, unbestimmte Gleichungen erschöpfen das ganze wissenschaftliche Material, dessen es zur Bewältigung der in höchst absonderliche Sprache gekleideten Aufgaben bedarf.

Cantor.

Die Form, Anziehung und materielle Beschaffenheit der Erde, von Theodor Schmid. Jahresbericht der kaiserl. königl. Staatsoberrealschule zu Linz für 36. Studienjahr 1886/87. Linz 1887, Verlag der k. k. Staatsoberrealschule. 19 S.

Vier Stufen der Entwickelung nimmt der Verfasser in der Behandlung derjenigen Fragen an, welche sich auf Form, Anziehung und materielle Beschaffenheit der Erde beziehen. Jede dieser Stufen bot sich als Ruhepunkt eines Hauptvertreters seiner Zeit, und als diese Vertreter werden genannt: Newton, Clairaut, Laplace, Stokes. Im diesmaligen Programm hat Herr Schmid nur die erste Stufe behandelt, die Fortsetzung für eine nächste Gelegenheit sich vorbehaltend. Man würde aber im wesentlichen Irrthum sich befinden, liesse man sich durch diese Herrn Schmid selbst entlehnte Inhaltsbezeichnung zur Annahme verleiten, es sei etwa übersichtlich zusammengestellt, was man bezüglich der betreffenden Fragen zu Newton's Zeit wusste und wie man damals zu dieser Kenntniss gelangte. Herr Schmid geht vielmehr von der Kenntniss des Newton'schen Anziehungsgesetzes, sowie der als Potentiale bekannten Integrale aus und beweist in Anlehnung an Gauss und Jacobi die wichtigsten Sätze über das Ellipsoid, manche Behauptungen allerdings nur kurz aussprechend. So gelangt er einestheils zu dem Newton'schen Theorem, dass eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Masse auf einen Punkt des Hohlraumes gar keine Anziehung ausübt, anderntheils zu dem Jacobi'schen Satze, dass ein abgeplattetes Rotationsellipsoid mit kleinster Drehungsaxe als freie Oberfläche einer homogenen flüssigen Masse, d. h. als Gauss'sche Gleichgewichtsoberfläche erscheinen kann. Einführung der bei der Erde gemessenen Grössen führt schliesslich zu dem Ergebnisse: Die Erde kann nicht eine homogene Masse eines Rotationsellipsoids sein.

Cantor.

La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique par Paul Tannery. Première partie. Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1887. VI, 188 pag.

Schon vor mehreren Jahren hat Herr Paul Tannery es als seine Ueberzeugung ausgesprochen, die Geschichte der Geometrie des Eudemos habe nicht mehr Proklos vorgelegen, sondern dessen Anführungen jenes Geschichtswerkes seien mittelbare. Soviel Glück Herr Tannery meistens mit seinen Neuerungen hatte, so schwer es fällt, Ansichten, die von einem so hervorragenden Fachgenossen ihren Ausgangspunkt nehmen, sich zu verschliessen, so konnten wir diese Annahme doch keineswegs theilen, und wie uns ging es auch Anderen. Ja, wir erkannten nicht einmal die Wichtigkeit der aufgeworfenen Frage. Herr Tannery hat nun in einer ganzen Reihe von Aufsätzen, welche er im Bulletin Darboux zum Abdruck brachte und welche jetzt als Sammelband zu Kaufe stehen, wenigstens in letzterer Beziehung uns zu überzeugen gewusst, und wir wollen versuchen, in Kürze unsere Leser mit der Bedeutung des Streitpunktes bekannt zu machen.

Strittig ist es nicht mehr, dass bei den Griechen die mathematischen Wissenschaften ihrem ganzen Umfang nach aus kleinen, von aussen eingeführten Anfängen zu bedeutender Höhe sich entwickelten, dann von ihrem Höhepunkte wieder abwärts gingen, um in trostloser Nichtigkeit zu enden. Steht ein ähnlicher Verlauf auch der heute noch ansteigenden Entwickelungscurve moderner Mathematik zu befürchten? Eine Antwort auf diese Frage ist unmöglich, so lange der Verlauf der griechischen Welle nicht genau bekannt ist, und dazu dient es wieder ganz erheblich, wenn wir nachzuweisen im Stande sind, von wann an das Interesse an unserer Wissenschaft so sehr abnahm, dass Schriften, welche ihr Werden schilderten, verloren gehen konnten. Hat also Proklos den Eudemos nicht mehr gelesen, nicht mehr lesen können, so war schon damals der Niedergang ein sehr tiefer.

Diese Behauptung ist gewiss richtig, wenn auch nicht umkehrbar. Des Eudemos Geschichte der Geometrie kann bis auf Proklos gekommen sein; dieser kann sie in Athen gelesen haben; und dennoch war längst die Zeit der Fortbildung der Mathematik von der des Stillstandes, dann der Rückbildung überholt.

Prüfen wir nun die Gründe, welche Herr Tannery für seine Behauptung anführt, so stellt er einen an die Spitze. Er beruft sich auf die bei Proklos vorkommende Redensart *οἱ περὶ Εὔδημον*. Gewöhnlich, so sagt Herr Tannery p. 23 seiner Schrift, übersetzt man das *οἱ περὶ* gar nicht, man nimmt einfach den angeführten Eigennamen allein, also *οἱ περὶ Εὔδημον* = Eudemos.* So bequem dürfe man aber sich die Sache nicht machen. Jene Zusatzwörter müssten einen Sinn haben, und zwar sei zu übersetzen: Diejenigen, welche auf die Angaben des Eudemos sich verlassen. Sei aber dieser Sinn wirklich gemeint, so verschlage wenig, ob an anderen Stellen der Verfasser — hier also Proklos — den Eudemos unmittelbar ohne *οἱ περὶ* anführe; er meine dann doch nur Angaben zweiter Hand. Hätte er nämlich des Schriftstellers eigene Werke besessen, so wäre er nicht genöthigt gewesen, irgend jemals eine Mittelsperson anzuführen, das einmalige *οἱ περὶ* gebe mithin den Ausschlag.

Wir können nun gut und gern Herrn Tannery's Uebersetzung einen Augenblick zugeben, so bleibt seine Folgerung nichtsdestoweniger auf

* Herr Tannery selbst übersetzt p. 137 *οἱ περὶ Σπεύσιππον καὶ Ἀμφίνομον* einfach mit „*Speusippe et Amphinome*“.

schwachen Füssen. Kann denn Proklos nicht, oder vielmehr wird er nicht genau so gearbeitet haben, wie ein Gelehrter unseres Jahrhunderts? Wird er nicht, die Feder in der Hand, seinen Eudemos, seinen Geminos, seinen Porphyrios u. s. w. gelesen haben und sich Auszüge vorbereitet haben, selbst wenn er zunächst nicht wusste, wo und wie er sie werde gebrauchen können? Wird ihm dabei nie eine Stelle entgangen sein, die er später in einem zweiten Schriftsteller angeführt fand, als er den ersten nicht mehr zur Hand hatte, oder wegen eines Satzes nicht neuerdings durchzuarbeiten Lust hatte? Man vergesse doch nicht, welchen Unterschied es macht, ob man ein gedrucktes Buch mit sorgfältig verfertigtem Namens- und Wörterverzeichniss, mit Seiten- und Zeilenbezeichnung zur Verfügung hat, oder ob man durch eine Handschrift von vielleicht recht zweifelhafter Leserlichkeit ohne irgend eine jener Erleichterungen sich hindurchzuquälen hat. Dieser Mühe unterzieht man sich nicht so leicht zum zweiten, zum dritten Male, nur um das Vorkommen einer Stelle zu bestätigen, die man nicht selbst notirt hatte. Auch bei im Allgemeinen gewissenhaften Schriftstellern unserer Tage kommt es vor, dass sie in einem solchen Falle der zweiten Quelle Vertrauen schenken; und das sollte früher anders gewesen sein, anders zu einer Zeit, wo das Abschreiben geradezu planmässig betrieben wurde?

Die Vorraussetzung, Herr Tannery übersetze das *οἱ περὶ* richtig, führt mithin noch lange nicht zu der von ihm gezogenen Folgerung, aber diese Voraussetzung selbst müssen wir bestreiten. Herr Tannery spricht, wieder auf p. 23, aber in der Note, einen gewiss richtigen Grundsatz aus, dass nämlich der Sprachgebrauch wechsele, und dass alsdann jeder Schriftsteller nach sich selbst beurtheilt werden müsse. Nun ist unter den vielen Schriften des Proklos eine mit vorzüglichem Wortverzeichnisse herausgegeben: „Procli Commentariorum in Rempublicam Platonis partes ineditae. Edidit Rud. Schoell. Berlin 1886“. In diesem Buche findet sich, wie eben mit Hilfe jenes Wortverzeichnisses leicht zu ermitteln war, auf p. 49 lin. 30—32 die Stelle: *Τούτῳ δὲ πάλιν τῷ κεφαλαίῳ συνῆψεν ὄντι ἀναγκαίῳ τὸν περὶ τῶν μισ ὧν τῶν ὑπαρχόντων ζῶσι τοῖ δικαίοις λόγον ἀντιστρόφως ὅις οἱ περὶ Γλαύκωνα κατέτειναν ὑπὲρ τõυ ἀδίκου λόγοις*, und hier ist doch *οἱ περὶ Γλαύκωνα* = *Γλαύκων* in Uebereinstimmung, fügen wir bei, mit den Grammatikern, welche gerade im Spätgriechischen die durchaus gesicherte Bedeutungslosigkeit des *οἱ περὶ* oder *οἱ ἀμφὶ* annehmen, während im älteren Sprachgebrauch die Bedeutung „Nn. mit seiner Umgebung“ überwiegt, z. B. bei Homer *οἱ τέσσαρες ἀμφὶ Ὀδυσσέα* = Odysseus und seine drei Gefährten, d. h. die Vier, den Odysseus mit eingeschlossen. Dagegen heisst im II. Jahrhundert nach Christus bei Alexander von Aphrodisius *οἱ περὶ Γέμινον* einfach Geminos. Vergl. Tannery, p. 32 Note 2.

Wir können aber unseren Widerspruch noch auf einige andere Stellen des Commentars zu Euklid selbst stützen. *Οἱ περὶ Ἥρωνα*, welches zweimal vorkommt, müsste nämlich nach Herrn Tannery's Auffassung beweisen, dass Heron's Commentar zu Euklid in den Zeiten des Proklos bereits nicht mehr vorhanden war. Wie ist das aber möglich, wenn eine arabische Uebersetzung von Theilen dieses Commentars vorliegt, die doch sicherlich erst mehrere Jahrhunderte nach Proklos verfasst wurde?*

So zerfällt Herrn Tannery's Beweisführung in Nichts. Ob auch seine Behauptung, das soll nicht gesagt sein. Es ist möglich, dass Proklos die Geschichte der Geometrie erster Hand, es ist nicht unmöglich, dass er sie zweiter Hand benutzte, wenn wir persönlich auch der ersteren Meinung untreu zu werden keinen Grund einsehen.

Eine andere Vermuthung des Verfassers spricht uns dagegen ungemein an. Wir haben (Vorlesungen I, 131) von Schriften mathematischen Inhaltes geredet, welchen entnommen ist, was wir von pythagoräischer Mathematik wissen. Herr Tannery geht um einen grossen Schritt weiter. Er giebt (p. 86) den Zeitpunkt an, in welchem zwischen Oinopides und Hippokrates von Chios um 450 jene Schriften entstanden sein werden; er giebt auch den Titel, welchen Jamblichus noch kannte, wenn auch das Werk selbst gleich Allem, was vor Euklid geschrieben und durch dessen Elemente überflüssig geworden war, ihm sicherlich nicht mehr vorlag. Herr Tannery (p. 81) geht von einer zweimal bei Jamblichus vorkommenden Wortverbindung aus: Ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία. Bisher übersetzte man: Von Pythagoras wurde die Geometrie Kunde genannt. Herr Tannery schlägt vor, zu übersetzen: Die Geometrie wurde mit dem Namen der von Pythagoras herstammenden Kunde belegt und fasst mithin ἱστορία πρὸς Πυθαγόρου als Titel.

Diese beiden Bemerkungen genügen vielleicht, unsere Leser in Kenntniss zu setzen, was Herr Tannery in seinem Buche als Aufgabe sich gestellt hat, was aber auch in der Ueberschrift mit ziemlicher Deutlichkeit ausgesprochen ist. Er untersucht nicht, was von Angaben über griechische Geometrie auf uns gekommen ist, sondern wie es auf uns kam, um aus den Quellen und ihrem Zustande selbst Schlüsse auf die Glaubwürdigkeit des Inhaltes ziehen zu können. Dass Herr Tannery dabei keine Gelegenheit versäumt, Einzeluntersuchungen spannendster Natur anzustellen oder doch anzudeuten, bedarf kaum der Erwähnung. Drei solcher Gegenstände wollen wir nennen.

Innerhalb der Euklidischen Elemente erscheinen die arithmetischen Bücher VII, VIII, IX der Form nach gewiss sehr verschieden von der altpythagoräischen Arithmetik, aus der sie entstanden sind. Wer ist Urheber dieser Umgestaltung? Herr Tannery kommt zweimal auf diese Frage zurück (p. 87 Note und p. 102 Note). Das eine Mal ist er versucht, jenes Verdienst — wenn es ein solches war — Hippokrates von Chios

* Was Herr Tannery p. 174--176 über diesen Gegenstand sagt, ändert unsere Meinung keineswegs.

zuzuwenden, das andere Mal macht er die Nothwendigkeit der Einschaltung jener Bücher von Theätet's Arbeiten über die Irrationalzahlen abhängig. Beide Annahmen zu vereinigen dürfte schwer sein. Hier können und sollten neue Untersuchungen anknüpfen.

Auf p. 148flgg. ist die klassische Form der Sätze mustergiltig besprochen und die Bedeutung einer jeden der sechs Abtheilungen, die man in solchen Sätzen unterscheiden kann, genau hervorgehoben.

Eine von Mathematikern bisher unbeachtete Stelle der Aristotelischen Meteorologie (III, 5, § 6—11) wird so gedeutet (p. 134), dass aus ihr die Kenntniss des Satzes hervorgeht, wonach die Entfernungen der Punkte einer Kreislinie nach zwei gegebenen Punkten in constantem Verhältnisse stehen. Herr Tannery hält die Stelle zwar für spätere Einschiebung, aber doch für älter als Apollonius.

Diese der Reichhaltigkeit des Buches gegenüber wenigen Bemerkungen sollen unseren Lesern nur einen Vorgeschmack desselben geben und zum genauen, gründlichen Studium der hochbedeutenden Schrift anspornen; denn sie als solche zu bezeichnen nehmen wir nicht Anstand, auch da, wo unsere Ansichten abweichend waren und geblieben sind.

Cantor.

Lehrbuch der Experimentalphysik, von Dr. Wüllner. IV. Band, 4. Auflage. Leipzig, bei Teubner. 1230 S.

Mit diesem vierten Band ist die vierte Auflage des ganzen Werkes abgeschlossen. Er enthält die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität und in einer Einleitung die Grundzüge der Lehre vom Potential. Es wird der Begriff der Potentialfunction und der Niveauflächen, der Satz von Laplace, der Green'sche Satz und der Begriff des Potentials entwickelt, im Allgemeinen, ohne specielle Rücksicht auf Elektricität, mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung. Specielle Anwendungen folgen dann im Verlaufe des Werkes, S. 219 bei der Reibungselektricität, S. 261 bei den elektrischen Bildern, S. 509 bei der elektromotorischen Kraft u. s. w.

Der erste Abschnitt behandelt den Magnetismus, die Beschaffenheit der Magnete, das absolute Maass des Magnetismus, Beziehung zur Torsion, Einfluss von Wärme und Licht und schliesslich den Erdmagnetismus. Der zweite Abschnitt bespricht die Reibungselektricität, der dritte den Galvanismus. Bei jener wird das dielektrische Mittel ausführlich behandelt (auf 50 Seiten), beim zweiten die Entstehung des galvanischen Stroms, die Gesetze der Stromstärke und die Wirkungen des Stroms im Schliessungskreise: Wärmeentwickelung, Thermoströme und Elektrolyse. Der vierte Abschnitt endlich bringt die Elektrodynamik nach Ampère, den Elektromagnetismus und Diamagnetismus und die Induction mit Anreihung der absoluten elektrischen Maasse.

Die Art der Bearbeitung ist ein Sammeln der Arbeiten der berühmten Elektriker, von Ampère und Ries bis auf die heutige Zeit. Nur selten giebt der Verfasser sein eigenes Urtheil ab. Wir haben also mehr ein Handbuch, als ein Lehrbuch vor uns. Zu rühmen ist die Correctheit der Darstellung, nur sehr selten ist ein Wunsch nach grösserer Klarheit gerechtfertigt (S. 136 Mitte über den Nachtheil der Gauss'schen Methode der Bestimmung der Declination, S. 447 oben der erste Absatz sind Beispiele hierfür). Zu bedauern ist, dass der Unterschied von Reibungselektricität und Galvanismus noch zu schroff auftritt, dass die vielfachen Beziehungen beider zu einander zu wenig hervorgehoben sind. Die Ausstattung des Werkes ist die von den früheren Bänden her bekannte vorzügliche.

P. Zech.

Universal or cosmic time, by Sandford Fleming. Proceedings of the canadian institute, Toronto. Juli 1885. 101 S.

Eine Darstellung des Antheils Canada's an der Feststellung der Weltzeit. Als erster Meridian ist — mit Ausnahme von Frankreich und Brasilien — auf der Conferenz vom October 1884 in Washington der von Greenwich angenommen worden. Ueber die Weltzeit ist noch keine Einigung erreicht worden; der Streitpunkt ist wesentlich, ob man den Tag mit dem Mittag oder der Mitternacht von Greenwich beginnen soll. Die Amerikaner haben einstweilen den „Houre-standard" eingeführt für Zwecke der Eisenbahnen, Schifffahrt und Meteorologie. Dieser Standard besteht darin, dass jeder Ort für die genannten Zwecke nicht nach seiner Zeit rechnet, sondern nach der Zeit des nächsten östlich gelegenen Meridians, der um ein Vielfaches von einer Stunde oder 15 Grad vom ersten Meridian abliegt. Zwischen je zwei solchen Meridianen haben also alle Orte gleiche Zeit; überschreitet man einen der Grenzmeridiane, so ändert sich die Zeit um eine Stunde. Drei Viertel des Heftes bestehen in Actenstücken.

P. Zech.

Der magnetische Bifilartheodolith, von H. Wild. Aus den Memoiren der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Petersburg. 44 S.

Ein Bericht des Directors des physikalischen Centralobservatoriums in Petersburg über einen Theodolithen zur Bestimmung der horizontalen Componente des Erdmagnetismus, nebst Theorie desselben und Bestimmung der Constanten. Das Instrument ist aus der Werkstätte von Dr. Edelmann in München.

P. Zech.

Des constantes de l'élastioté dans les milieux anisotropes, par M. B. Elie. Bordeaux 1886. 82 S.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, möglichst einfache Formeln aufzustellen, welche aus bestimmten Versuchen die Constanten der Elasticitāt krystallinischer Mittel mit schiefen Axen berechnen lassen. Er erhält in bestimmten Fällen für schiefe Axen dieselben einfachen Beziehungen wie bei rechtwinkligen.

P. Zech.

Zur Theorie der Spiegelung des Regenbogens, von Dr. Handel. Programm 1887 Nr. 206. 19 S.

Die Möglichkeit der Spiegelung eines Regenbogens in einer ruhigen Wasserfläche ist bestritten und behauptet worden. Wenn die Sonnenstrahlen einen Regentropfen treffen und im Innern einmal zurückgeworfen werden, so giebt es bei den austretenden Strahlen eine bestimmte Richtung, nach welcher sie nahe parallel austreten, während nach allen anderen Richtungen das austretende Büschel divergirt. Nur die ersten machen einen hinlänglich starken Eindruck auf das Auge, um an der Bildung des Regenbogens mitzuwirken. Wenn ein bestimmter Tropfen solche Parallelbüschel ins Auge sendet, so kann dieses Büschel, eben weil es das Auge trifft, von der Wasseroberfläche nicht zurückgeworfen werden, und nach jeder andern Richtung kann es keinen Eindruck machen. Es ist also klar, dass es ein Bild des Regenbogens in dem Sinne nicht giebt, dass die dem Auge wirksame Strahlen sendenden Tropfen auch zurückgeworfen ein Regenbogenbild gebende hervorbringen. Wohl aber können andere Tropfen, die tiefer liegen, am Wasser zurückgeworfene wirksame Strahlen ins Auge senden. Und in diesem Sinne giebt es ein Regenbogenbild. Wie dasselbe im Einzelnen entsteht und welche Eigenthümlichkeiten beim Zusammentreffen beider Bogen auftreten, zeigt der Verfasser durch einfache geometrische Betrachtung.

P. Zech.

Tafeln zur Berechnung der Mondphasen, von Ch. Paulus. Tübingen, Fues. 72 S.

Der Verfasser sucht in der kleinen Schrift, die für Mittelschulen bestimmt ist, die Art der Berechnung der im Titel genannten Tafeln darzulegen, zuerst für die mittleren und dann für die wahren Werthe derselben. Die Benützung der Tafeln wird an einem Beispiel durchgeführt. Dann wird noch gezeigt, wie man finden kann, ob mit dem Neu- und Vollmond eine Finsterniss verbunden ist.

Es sind in der neuern Zeit Syzygientafeln von Dr. Lehmann vom Rechenbureau der Sternwarte Berlin und ausführlichere von Oppolzer in Wien erschienen (auch vom Verfasser benützt S. 13). Die letzteren sind auf ihre Richtigkeit vollständig geprüft durch den grossen Canon der Finsternisse von Oppolzer. Eine Vergleichung mit diesen Tafeln giebt für den Neumond im März 1885 zu wenig 0,6‴ und für den Vollmond im August 413 v. Chr. 38,6‴ zu wenig. Wie zu erwarten, wachsen die Differenzen für entferntere Jahre.

Ob solche Rechnungen nach Tafeln für Mittelschulen in Verbindung mit der mathematischen Geographie ein „Bedürfniss" genannt werden können, darüber lässt sich streiten, aber jedenfalls wird es immer einige Schüler geben, welche gerne und zu ihrem Vortheil sich damit beschäftigen. Bei der Kürze und Klarheit des kleinen Werkes ist es solchen strebsamen Schülern unbedingt zu empfehlen.

P. Zech.

Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffs, von Dr. Ludwig Lange. Leipzig, Engelmann. 141 S.

Der Verfasser hat früher in den Verhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften seine Ansichten auseinandergesetzt, wie die Grundbegriffe der Mechanik nach dem heutigen Stande der Forschung richtiger zu begründen seien. Diese Ansichten sucht er nun in dem vorliegenden Werke einem grösseren Leserkreis zugänglich zu machen, indem er die geschichtliche Entwickelung dessen, was man Bewegung nennt, auseinandersetzt. Eine Hauptrolle spielt hierin die von Galilei insbesondere vorbereitete Anschauung Newton's vom absoluten Raum und der absoluten Zeit, eine Anschauung, die noch heute die herrschende ist. Der Verfasser sucht zu zeigen, dass der absolute Raum und die absolute Zeit Newton als Dogma gegolten habe, als Theil seiner religiösen Ueberzeugung, er sucht nachzuweisen, dass beide für den heutigen Standpunkt der Wissenschaft als überflüssig erscheinen. Im vierten Capitel wird auseinandergesetzt, was an die Stelle zu treten habe, und insbesondere das vom Verfasser aufgestellte Inertialsystem als Ersatz genannt.

Näheres über dieses Inertialsystem ist in einer Abhandlung der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1885, S. 333) zu finden. Dem Verfasser ist es — nach einem Urtheil in der Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft — in ausgezeichneter und beinahe überraschender Weise gelungen, in den Grundlagen der Mechanik Klarheit zu schaffen.

P. Zech.

Verdet, **Wellentheorie des Lichts.** Deutsch von Exner. Schluss des zweiten Bands. Braunschweig, Vieweg. 1887. 528 S.

Mit dieser dritten Abtheilung des zweiten Bandes ist das ganze Werk geschlossen. Sie enthält die Reflexionstheorie von Fresnel und die Metallreflexion mit Anreihung alles Dessen, was in der neuern Zeit theoretisch und experimentell über diese Gegenstände gearbeitet worden ist. Die Bibliographie ist bis 1885 fortgesetzt, ein Sachregister schliesst das Werk. Ueber den Werth des nun vollständig vorliegenden Werkes haben wir nach den früher Geäusserten nichts mehr hinzuzufügen.

P. Zech.

George Minchin, treatise on statics with application to physics. 2 Bände, 3. Ausgabe. Oxford. 347 und 512 S.

Im 29. Jahrgang dieser Zeitschrift wurde desselben Verfassers „Uniplanar Kinematics of solids and fluids" besprochen, eine Kinematik der Ebene, welche zur Vorbereitung der Studirenden für die neuen Theorien von Thomson und Maxwell dienen soll. Im vorliegenden Werke hat der Verfasser nicht die Absicht, ein klassisches, durch systematische wohlgeordnete Entwickelung der Principien sich auszeichnendes Lehrbuch der Statik zu schreiben, es ist ihm vielmehr darum zu thun, den Studirenden möglichst Anleitung und Anregung zum Studium zu geben. So wird graphische Lösung der Aufgaben empfohlen (S. 29), auch werden praktische Winke zur graphischen Lösung von Aufgaben gegeben (§ 40). Ueberhaupt ist die beständige Einschaltung von Aufgaben nebst Anleitung zu deren Lösung ein Hauptbestreben des Verfassers. Dabei umfasst das Werk alle Gebiete der Statik, die virtuelle Arbeit, die Elemente der graphischen Statik, die Theorie der Attraction, die „Analysis of Strains and Stresses" und zum Schluss noch die Elektrostatik. Für den Charakter des Werks bezeichnend sind die Worte in der Vorrede zum zweiten Band: „*The result of perpetually fixing the mind on mere symbols and repelling the natural realities for which tey stand is to produce in the mind a crystallisation of ignorance.*" Nicht mit allgemeinen Symbolen allein soll der Studirende der Mechanik rechnen, er soll den Schwierigkeiten der Behandlung wirklicher natürlicher Vorgänge entgegentreten und sie überwinden lernen. Für jeden Studirenden, der die Elemente der Mechanik kennt, wird das Studium des vorliegenden Werks von ausgezeichnetem Werthe sein.

P. Zech.

A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, by Todhunter and Pearson. 1. Band: von Galilei bis Saint-Venaut. Cambridge, Universitätsdruckerei. 1886.

Nach Todhunter's Tod wurde Pearson mit der Herausgabe dieses Werkes betraut. Die Schwierigkeiten, welche damit verbunden sind, hebt Pearson in der Einleitung hervor: einmal sind es die Quellenstudien in den zahllosen Zeitschriften, sodann die verschiedenartigen Bezeichnungen und Definitionen der einzelnen Gelehrten, die so geändert werden müssen, dass die Einheit des Werkes nicht Noth leidet. Der Verfasser wird die Anerkennung seiner mühevollen Arbeit in dem Bewusstsein finden, das Studium der Elasticitätstheorie wesentlich erleichtert zu haben. Das nähere Eingehen in die einzelnen Capitel dieses umfangreichen Werkes würde zu weit führen, weshalb der Fachmann direct auf dasselbe verwiesen werden muss.

B. Nebel.

B. Weinstein, **Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen.** I. Band. Die Beobachtungsfehler, ihre rechnerische Ausgleichung und Untersuchung. Berlin 1886, Verlag von Julius Springer. Preis 14 Mk.

Mit lebhaftem Interesse wird dieses Werk in physikalischen Kreisen aufgenommen; denn es füllt eine Lücke aus, die den Physikern bislang grosse Schwierigkeiten bereitete. Der vorliegende erste Band umfasst die Methoden zur Ausgleichung und Untersuchung der Beobachtungsfehler, bietet somit dem praktisch arbeitenden Physiker den unumgänglich nothwendigen Stoff dar, den er sich nach Vollendung seiner Studien bisher mühsam aus den Werken über Astronomie und Geodäsie zusammensuchen musste. Der erste Theil zerfällt in fünf Abschnitte, wovon die vier ersten die Ausgleichungsrechnung behandeln, während der letzte die Interpolation, Differentiation und Quadratur enthält. In dem ersten Abschnitt wird zunächst eine Uebersicht über die möglichen Fehler bei Beobachtungen gegeben und auf die verschiedenen Ursachen derselben eingegangen, woran sich die allgemeine Theorie der Ausgleichung dieser Fehler anschliesst. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Theorie der zufälligen Fehler und deren Ausgleichung bei einfachen Messungen, zeigt sodann, wie sich die Ausgleichung bei Fehlern gestaltet, die entweder gleiches oder verschiedenes Gewicht haben, und wie sich der Uebergang von den wahren Verhältnissen zu den wahrscheinlichsten bewerkstelligt. Die Ausgleichung zusammengesetzter Messungen, eine Abschweifung über Determinanten und die Theorie linearer Gleichungen bilden den Inhalt des dritten Abschnittes. Im vierten Abschnitt werden bei der Ausgleichung von Untersuchungen zunächst die Normalgleichungen abgeleitet, dann die Fehler berechnet, die Nebenbedingungen untersucht, und von einander abhängige Beobachtungen ausgeglichen. Jedem Abschnitt folgt als Schluss eine Kritik der erhaltenen Ergebnisse, während gutgewählte Beispiele die theoretischen Ableitungen in praktischer Weise erklären. — Dieses Buch gehört auch zu denen, die auf dem Arbeitstisch des Physikers nicht fehlen dürfen. Möge der bald zu erwartende zweite Band dem ersten würdig zur Seite stehen, dann ist durch Weinstein's Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen ein Werk geschaffen, das einem längst sich fühlbar gemachten Bedürfniss vollkommen Rechnung trägt.

B. Nebel.

Vademecum für Elektrotechniker, von E. Rohrbeck. Vierter Jahrgang des Kalenders für Elektrotechniker 1887. Halle a. S., Verlag von W. Knapp. Preis: gebunden 3 Mk. 50 Pf.

Die rasche Entwickelung der Elektrotecknik veranlasste eine gänzliche Umarbeitung des vorhergehenden Jahrgangs. Eine grosse Zahl wichtiger Tabellen bildet den Anfang, daran reihen sich die Hauptformeln der Mathematik und reinen Mechanik. In dem Kapitel „Maschinen-Technisches“

ist namentlich auf Dampfkessel und Dampfmaschinen Rücksicht genommen. Von der Physik sind Akustik, Optik und Wärme in einem Capitel vereinigt, während die Elektricitätslehre ein besonderes Capitel umfasst, woran sich in einem weiteren Capitel die elektrotechnischen Messmethoden und Messinstrumente anschliessen. Die elektrischen Kraftmaschinen und die elektrische Beleuchtung finden eingehende Berücksichtigung. Elektrische Kraftübertragung, Elektrolyse, Galvanoplastik und Telegraphie bilden den Inhalt grösserer Capitel, worauf mehrere kleinere Capitel, wie Telephonie, Eisenbahntelegraphie, Feuertelegraphie, Haustelegraphie, Blitzableiter, Eisenbahnwesen, elektrische Bahnen u. s. w. folgen. — Wegen der Vielseitigkeit und der praktischen Anordnung des Stoffes verdient das Büchlein mit Recht den Namen „Vademecum" und wird dem praktischen Elektrotechniker von grossem Nutzen sein.

B. Nebel.

Hoh, **Elektricität und Magnetismus als kosmotellurische Kräfte.** 37. Bd. der elektrotechn. Bibliothek. Wien, Verlag v. A. Hartleben. Preis 3 Mk.

Der Verfasser geht von den magnetischen Eigenschaften der Erdrinde aus, bespricht die periodischen Aenderungen der Magnetnadel und die Vertheilung des Erdmagnetismus, und streift kurz die Theorie des Nordlichts. In dem zweiten Capitel, welches sich mit der tellurischen Elektricität beschäftigt, wird bei der Betrachtung der elektrischen Erdströme der Zusammenhang zwischen Magnetismus und Elektricität dargethan, sodann die Elektricität der Atmosphäre und deren Theorien, sowie die Elektricität der Wolken eingehend besprochen. Besondere Capitel sind dem Ozon und dem Helenenfeuer gewidmet. An das Capitel über Blitz und Donner, worin die verschiedenen Arten der Blitze hervorgehoben sind, schliesst sich ein solches über die Verbreitung und Bedeutung der Gewitter an. Der letzte Abschnitt enthält die kosmische Elektricität, worin nach Erwähnung der elektrischen Solarströme hauptsächlich die neueren Arbeiten von Werner Siemens, Franz Exner u. A. besprochen werden. Ob aber der Inhalt dieses Buches gerade der Elektrotechnik von grossem Nutzen sein wird, möchte sehr bezweifelt werden.

B. Nebel.

Janssen, **Methodischer Leitfaden der Physik und Chemie,** für höhere Töchterschulen, Lehrerinnenseminarien und Fortbildungsanstalten. Freiburg i. B. 1887, Verlag von Herder. Preis 3 Mk.

Dass der Verfasser längere Zeit schon Unterricht an Mädchenschulen ertheilt hat, ist deutlich an dem Buche zu bemerken; denn er hat richtig erkannt, dass in diesem Falle das Experiment in den Vordergrund gestellt werden muss und jede Formel oder Rechnung auszuschliessen ist, falls bei der heutigen Lage der Dinge Erfolge in dem naturwissenschaftlichen Unterricht erzielt werden sollen. Der Inhalt ist derart behandelt, dass ein physikalisch gebildeter Lehrer den Unterricht ertheilen muss, wie der Verfasser ausdrücklich in der Vorrede hervorhebt, und dass für ein Selbststudium demnach auf andere Bücher verwiesen werden muss. Leider wird die Anordnung des Stoffes in der Vorrede nicht motivirt, so dass nicht einzusehen ist; warum gerade mit der Wärme begonnen wird und weshalb das Capitel über die allgemeinen Eigenschaften der Materie sich nicht am Anfang befindet, sondern mitten zwischen Galvanismus und Akustik. — Zahlreiche hübsche Holzschnitte und ein sauberer Druck werden nicht verfehlen, dem gediegenen Inhalt die nöthige Verbreitung zu verschaffen.

B. Nebel.

Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1887.

Periodische Schriften.

Denkschriften der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 53. Bd. Wien, Gerold. 49 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. zu Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. 95. Bd., 4. u. 5. Heft. Ebendas. 7 Mk. 20 Pf.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen, herausgeg. v. O. Böklen. 2. Bd., 1. u. 2. Heft. Tübingen, Fues. 3 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. v. A. Krueger. 118. Bd., Nr. 1. Hamburg, Mauke S. compl. 15 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preussischen geodätischen Instituts. Präcisions-Nivellement der Elbe, 3. Mittheil. Ausgef. u. bearb. v. W. Seibt. Berlin, Stankiewicz. 9 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 22 (Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde mit Hilfe des Pendels). Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Annalen des physikalischen Centralobservatoriums, herausgeg. v. H. Wild. Jahrg. 1886, 1. Thl. Petersburg u. Leipzig, Voss. 10 Mk. 20 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Herz, N., Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. I. Theil: Die Theorien des Alterthums. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Reine Mathematik.

Olbricht, R., Studien über die Kegel- und Cylinderfunctionen. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Harnack, A., Die Grundlagen des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunction in der Ebene. Leipzig, Teubner. 4 Mk. 20 Pf.

Neumann, F., Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen, herausgeg. v. C. Neumann. Ebendas. 12 Mk.

Hofmann, F., Die synthetischen Grundlagen des Tetraedroid-Complexes. Leipzig, Koch. 1 Mk.

Witting, A., Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen ($p=2$) führt. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Hofmann, F., Methodik der stetigen Deformation von zweiblätterigen Riemann'schen Flächen. Halle, Nebert. 2 Mk.

Schlömilch, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. I. Thl.: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 4. Aufl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Rudel, K., Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension. Fürth, Schmittner. 40 Pf.

Rausenberger, O., Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene. Leipzig, Teubner. 5 Mk.

Samuda, F., Die Quadratur der Hyperbel, nach einer neuen Methode berechnet. Graz, Styria. 2 Mk.

Greve, Lehrbuch der Mathematik. 4. Curs, 1. Thl. (Stereom.) Bielefeld, Velhagen & Klasing. 1 Mk. 80 Pf.

Lieber, H., Stereometrische Aufgaben. Berlin, L. Simion. 2 Mk. 40 Pf.

Steiner's, J., Vorlesungen über synthetische Geometrie. I. Thl.: Die Kegelschnitte, bearb. v. C. F. Geiser. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Angewandte Mathematik.

Burmester, L., Lehrbuch der Kinematik. 1. Bd.: Die ebene Bewegung. 3. Lief. Leipzig, Felix. 23 Mk.

Lagrange, L., Analytische Mechanik, deutsch herausgeg. v. H. Servus. Berlin, Springer. 16 Mk.

Weyrauch, J., Theorie der statisch bestimmten Träger für Brücken und Dächer. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

Land, R., Ueber die geometrische und statische Bestimmtheit der Träger, insbesondere der Fachwerkträger. Berlin, Ernst & Korn. 1 Mk.

May, O., Lehrbuch der Elektrodynamik. 1. Theil. Stuttgart, Maier. 3 Mk.

Franz, Neue Berechnung von Hartwig's Beobachtungen der physischen Libration des Mondes. Berlin, Friedländer & S. 30 Pf.

Saalschütz, L., Kosmogonische Betrachtungen. Ebendas. 1 Mk. 50 Pf.

Helm, G., Die Lehre von der Energie, historisch entwickelt. Leipzig, Felix. 3 Mk.

Physik und Meteorologie.

Hankel, W., Elektrische Untersuchungen. 18. Abhdlg.: Ueber das elektrische Verhalten der Quarz- und Boracitkrystalle. (Sächs. Ges. d. W.) Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Thompson, P., Elementare Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus. Uebersetzt von A. Himstedt. Tübingen, Laupp. 7 Mk.

Noack, C., Verzeichniss fluorescirender Substanzen mit Literaturnachweisen. Marburg, Elwert. 2 Mk. 40 Pf.

Kövesligethy, R. v., Ueber eine neue Methode der Farbenbestimmung der Sterne. Halle, Schmidt. 40 Pf.

Weinhold, F., Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentiren. 2. Aufl., 3. Heft (Schluss). Leipzig, Quandt & Händel. 7 Mk. 50 Pf.

Graetz, L., Compendium der Physik. Wien, Töplitz & Deuticke. 7 Mk.

Historisch-literarische Abtheilung.

Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses.

Von

Eugen Gelcich.

Hierzu Taf. I Fig. 2—8.

Schon Aristoteles, der die Begriffe „Druck" und „Stoss" bereits sehr gut voneinander zu unterscheiden wusste, warf sich die Frage auf, warum ein sehr grosser Druck auf dem Rücken eines Keiles so geringe Wirkung aufweise, während oft ein ganz kleiner Hieb Verheerungen anrichte. Galilei, der in seiner Mechanik auf denselben Gegenstand zu sprechen kam, schloss daraus, dass die Kraft des Stosses im Vergleich zur Kraft des Druckes unendlich sei. Der Pater Mersenne stellte einige Untersuchungen an, die er sehr schwer nannte.[1]) Er glaubte durch Versuche gefunden zu haben, dass die Kraft des Stosses gleich dem Producte der Masse, dividirt in die Geschwindigkeit ist, und nannte selbes, gleichwie Descartes später, das Kraftmaass. Es ist dieser der erste Versuch, die Kraft des Stosses wenigstens durch Schätzung zu bestimmen. Dass aber für den Stoss der Körper allgemeine Gesetze vorhanden sein müssen, darüber hat der grosse französische Denker Descartes, wenn auch mit unglücklichem Ausgange, doch vor allen Anderen gedacht.

Descartes stellte zwei Grundsätze auf, auf welche sich sämmtliche einschlägige Erscheinungen basiren sollten und die folgendermassen lauteten:[2])

1. In der Welt wird beständig einerlei Grösse der Bewegung erhalten.
2. Jeder Körper hat an sich eine Kraft, welche ihn in seinem vorigen Zustand erhält, d. h. ihm die Eigenschaft giebt, zu ruhen, wenn er ruht, und in Bewegung zu bleiben, wenn er Bewegung angenommen hat.

Die Ableitung des ersten Satzes ist ganz originell-metaphysisch. Die Gottheit selbst hat nämlich als unveränderliches Wesen nicht das eine Mal eine grössere, das andere Mal eine kleinere Bewegung hervorbringen können, und die einmal hervorgebrachte Bewegung musste ebenso gut erhalten werden, als die einmal erschaffene Materie.

---

1) Tract. mechan. theoret. et practic. Paris. 1644, Proposit. XXV, XXVI.

2) Princip. philos. Pars II, Proposit. 46 flgg.

Man hat dem französischen Gelehrten diesen Satz sehr zur Last gelegt und darüber folgende Controversen aufgestellt.

Cartesius kann den Satz nicht algebraisch genommen haben, was ungeschickt gewesen wäre. Nimmt man nämlich den Fall des elastischen Stosses in Berücksichtigung, so ist

$$MV + mv = MC + mc,$$

was bedeuten will, dass die Summe der Bewegungen vor und nach dem Stosse gleich bleibt, wenn nämlich die Bewegung nach entgegengesetzter Richtung als eine vermindernde betrachtet wird. Nimmt man aber jede Bewegung arithmetisch als gleichartig an, so ist dieser Satz nur dann wahr, wenn die Bewegungsrichtung vor und nach dem Stosse dieselbe bleibt. Gehen beide Massen vor und nach dem Stosse nach verschiedenen Richtungen, so ist die Differenz der Bewegungen vor und nach dem Stosse gleich; gehen sie aber vor dem Stosse nach verschiedenen, nach demselben aber nach einerlei Richtung, so ist die Differenz der Bewegungen vor dem Stosse der Summe der Bewegungen nach dem Stosse gleich. Womit bewiesen bleibt, dass Cartesius fehlte. So raisonnirt u. A. auch Fischer in seinem physikalischen Wörterbuch.

Die Anhänger Cartesius' hielten sich dagegen an folgenden Satz: Stossen zwei elastische Körper aneinander, so geht ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt mit der Geschwindigkeit

$$x = \frac{MC + mc}{M + m}$$

fort. Nun ist aber

$$MV + mv = MC + mc$$

und diese Ausdrücke durch $M + m$ dividirt, geben auch x. Der Zustand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes wird also vor und nach dem Stosse nicht alterirt, wenn man sich nämlich in dem Schwerpunkt die gesammte Masse $M + m$ vereinigt denkt. Seine Geschwindigkeit $(M + m)X$ — welchen Ausdruck Joh. Bernoulli „Directionsgrösse" (Discours sur le mouvement, Chap. IV § 8) nennt — bleibt also unverändert.

Beim zweiten Gesetz sind die Begriffe „Kraft" und „Trägheit" oder „Beharrungsvermögen" verwechselt. Wie aus seinen späteren Briefen zu ersehen, erkannte zwar Descartes die Rolle der Trägheit bei der Begegnung eines ruhenden und eines bewegten Körpers richtig an, unrichtig von ihm aber war die Annahme, dass die Kraft, welche den ruhenden Körper in Bewegung setzt, gleich der Trägheit ist. Ferner war der zweite Satz unrichtig bei der Begegnung entgegengesetzt sich bewegender Körper. Er legte nämlich dem bewegten Körper an sich eine Kraft bei, welche geeignet war, die Bewegung in entgegengesetzter Richtung fortzusetzen, wenn der Körper durch irgendwelche Hindernisse in der ursprünglichen Bewegung aufgehalten wurde. Bewegt sich ein Körper von A nach B, so muss, wenn diese Bewegung von B nach A erfolgen soll, offenbar zuerst Ruhe eintreten und diese Ruhe muss überwunden werden, damit die entgegengesetzte Bewegungsrichtung erfolge. Nach Cartesius wurde aber die Trägheit, die dem Körper das Streben giebt, die angenommene Bewegung zu erhalten, auch noch nach Auftreffen auf einer Wand z. B. fortwirken, nur in entgegengesetztem Sinne. Aus diesen falschen Grundsätzen leitet er dann folgende Regeln ab:

1. Bewegen sich gleiche Körper mit gleicher Geschwindigkeit gegen einander, so gehen sie nach erfolgtem Zusammenstoss mit ihren früheren Geschwindigkeiten wieder zurück.

Diese Regel könnte für ganz elastische Körper gelten, Descartes macht aber einen Unterschied zwischen elastischen und nicht elastischen Körpern nicht.

2. Ist der eine Körper nur ein wenig grösser als der andere, und treffen sie mit gleichen Geschwindigkeiten gegen einander, so geht nur der kleinere zurück und beide bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit wieder fort.

3. Treffen ungleiche Körper mit ungleichen Geschwindigkeiten gegen einander, so wird die Bewegung in der Richtung desjenigen Körpers fortgesetzt, der die grössere Geschwindigkeit hatte; diese Körper nehmen nach dem Stosse die halbe Summe der früheren Geschwindigkeiten an.

4. Bewegt sich ein kleinerer Körper gegen einen grösseren ruhenden, so wird ersterer mit seiner vollen früheren Geschwindigkeit zurückgetrieben, während der grosse Körper in Ruhe verbleibt.

5. Stösst ein grösserer Körper M gegen einen kleineren ruhenden m auf, so wird auch dem ruhenden Körper eine Bewegung mitgetheilt, und beide gehen zusammen weiter mit einer Geschwindigkeit, die um das Verhältniss $\frac{M+m}{m}$ vermindert ist.

Diese Regel gilt bekanntlich für unelastische Körper.

6. Sind zwei Körper gleich, der eine in Ruhe, der andere in Bewegung, so geht der bewegte Körper nach erfolgtem Stosse mit verminderter Geschwindigkeit zurück und der andere wird fortgetrieben.

7. Bewegen sich zwei Körper M und m nach einerlei Richtung, der vorangehende m aber langsamer und der nachkommende M rascher, und der Körper M sei grösser als m, so theilt der nachkommende dem voraneilenden die Bewegung mit, und beide bewegen sich dann mit gleicher Geschwindigkeit fort.

Dechales hat schon zu seinen Zeiten die Lehren des Cartesius widerlegt[1]), und ein Schüler des letzteren, Clerselier, der nachmalige Herausgeber von Cartesius' Briefen, machte seinem Lehrer Einwendungen, die nur sehr unvollständige und ganz dunkle Beantwortung fanden.

1) Renati Descartes epistolae. Amsterdam 1668. Epist. CXVII.

Merkwürdig ist es theilweise, dass Cartesius selbst die Falscheit seiner Sätze hin und wieder einsah. So war es ihm z. B. sehr gut bekannt, dass ein grösserer ruhender Körper durch einen kleineren bewegten Bewegung annehmen kann. Allein in seinen Principien[1]) will er solche Erscheinungen aus dem gestörten Gleichgewichte in den umgebenden flüssigen Mitteln erklären; er geht so weit in seinem Starrsinn, dass er sich selbst gegen die Experimente auflehnt, indem er behauptet, dass ihm solche nichts beweisen, weil überhaupt über die Gesetze der Bewegung der Körper nichts Bestimmtes gesagt werden kann, indem es vollkommen feste Körper nicht giebt und weil der Widerstand des Mittels dabei eine zu grosse Rolle spielt.

Einen andern Fall, wo er sich selbst mit seinen Gesetzen in Widerspruch befand, findet man in einem Briefe an den Pater Mersenne vor; daselbst schreibt er, dass eine jede noch so grosse ruhende Masse durch den Stoss einer sehr kleinen, wenigstens erschüttert werde.[2]) Dadurch stiess er selbst sein viertes Gesetz um. In einem andern Brief an Mersenne[3]) dehnt er die Behauptung seines fünften Gesetzes, welches für unelastische Körper richtig ist, ganz richtig auch auf das vierte Gesetz aus.

Es hiesse Zeit und Raum vergeuden, wollten wir von den Versuchen minder bewanderter Mathematiker und Physiker berichten, als es ein Honoratus Fabri und ein Joachim Jung waren, die nur Fehler auf Fehler häuften. Auch Alphonsus Borellus[4]) brachte die Aufgabe um keinen Schritt der Lösung näher, obwohl er mitunter bessere Begriffe aufweist, als Fabri und Jung. Uebrigens beschränkt sich Borellus auf die Betrachtung einiger besonderen Fälle, von einer zusammenhängenden Behandlung des Stosses ist keine Spur zu finden. — Auch ist er mitunter sehr unklar.

Es gebührt der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu London das Verdienst, die Aufstellung der Gesetze des Stosses befördert zu haben, indem sie im Jahre 1668 ihre Mitglieder anregte, über dieses Thema nachzudenken, und sie aufforderte, die Lösung desselben einzureichen. Durch diese Veranlassung veröffentlichten drei der berühmtesten Mathematiker der damaligen Zeit auf einmal die wahren Gesetze des Stosses und zwar Wallis, Wren und Huyghens. Wallis war der erste, der seine Arbeit überreichte[5]); ihm folgte ganz kurz darauf Wren[6]) (Wallis am 26. November 1668, Wren am 4. Januar 1669) und ein Jahr später Huyghens.[7])

---

1) Princ. philosoph. pars. II., Prop. 56, 57.

2) Epistolae. XCIV. Brief: „*Credo totam terra molem a deambulante homine aliquantis per commoveri, quia nunc hanc, nunc illam partem grauat.*“

3) A. a. O. Bd. II, Epist. XLIV.

4) De vi percussionis. Bononiae 1664.

5) Philosoph. Transact., N. 43 S. 864.

6) A. a. O. N. 43 S. 867.

7) A a. O. N. 46 S. 927.

Letzterer befand sich in der Zwischenzeit von dem Aufruf der Akademie bis zur Einreichung seiner Gesetze auf dem Continente. Montucla[1]) behauptet, Huyghens habe die Gesetze des Stosses schon 1663 entdeckt, ohne hiervon der Akademie Mittheilung zu machen; er giebt jedoch die Quelle nicht an, worauf er diese Nachricht stützt.

Die Bemühungen der Londoner Gesellschaft, ihre Mitglieder zur endlichen Lösung der Frage anzuhalten, und die Raschheit, womit die drei Genannten diesem Ruf folgten, lässt errathen, dass man in der wissenschaftlichen Welt ein grosses Bedürfniss nach Ausfüllung dieser Lücke im menschlichen Wissen fühlte und dass diese Lücke somit *de facto* bestand. Und doch waren bereits volle dreissig Jahre vergangen, seitdem der Prager Arzt I. Marc Marci — ein leidenschaftlicher Mathematiker und Physiker, der sich auch mit den Gesetzen der Optik stark beschäftigte — die Gesetze des elastischen Stosses wenigstens, nicht nur gefunden, sondern auch durch den Druck veröffentlicht hatte.[2]) Er theilt die Körper in solche ein, die ihre Gestalt nach dem Stosse verändern, und in solche, bei welchen dies nicht vorkommt. Die von ihm entwickelten Gesetze sind folgende: Trifft ein bewegter Körper A einen in Ruhe befindlichen B, so bleibt A stehen und B bewegt sich weiter mit der Geschwindigkeit von A. Stossen zwei gleiche Massen mit gleicher Geschwindigkeit gegen einander, so verändern sie ihre Bewegungsrichtung um 180° und behalten die früheren Geschwindigkeiten. Wird der Körper B von A überholt, so wird A entweder die Bewegung fortsetzen, oder zurückgestossen werden, je nach dem Verhältniss der beiden Massen. Sind zwei gleiche Körper A und B in Ruhe, und berühren sie sich und wird A von einem Körper C gestossen, dessen Masse der Masse von A und B gleich ist, so wird A in Ruhe verbleiben und B die Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeit von C annehmen.

So merkwürdig dies auch klingen mag, so bleibt doch die Thatsache bestehen, dass das Werk des Prager Arztes unbekannt blieb, da sonst Männer wie Wallis, Wren und Huyghens nicht gezögert hätten, die englische Akademie darauf aufmerksam zu machen.

Von den der königl. Gesellschaft zu London eingereichten Arbeiten der obengenannten Gelehrten behandelte das Elaborat von Wallis nur die un-

1) Hist. des mathematiques, Bd. II S. 406.

2) De proportione motus figurarum recti linearum et circuli quadrature ex motu. Authore Joanne Marco Marci Medicinae Doctore et Professore Primario S. C. M^tis Medico Cubiculario et in Regn. Boh. Physico Seniore. Pragae Anno 1648. IV. Das Buch trägt die Widmung: S̄m̄o Principi . Ferdinando IV . Hungar. et Bohemiae Regi. Archiduci austriae. Domino meo Clementissimo. Dieses Werk behandelt alle möglichen Arten der Bewegung, u. A. entwickelt er auch die Gesetze der Pendelbewegung. Die geometrischen Figuren sind so nett und rein ausgeführt, wie man sie in Werken des XVII. Jahrhundertes nur sehr selten findet. Das Werk befindet sich an der deutschen Universität in Prag, von wo wir es bezogen haben.

elastischen Körper. Die Gesetze des Stosses elastischer Körper entwickelte er erst später in seiner Mathematik.[1]) Die Aufsätze Wren's und Huyghens' enthielten die Gesetze des Stosses elastischer Körper ohne Beweis; ihre Darstellung war kurz, aber deutlich ausgedrückt. Huyghens beschäftigte sich später mit diesem Gegenstande wieder, wir kommen darauf noch zu sprechen.

Wallis entwickelt seine Sätze — man muss es gestehen — mit Gewandtheit und Einfachheit. Zunächst stellt er fest, dass die dem ruhenden Körper mitgetheilte Bewegung um so geringer ausfällt, je grösser die zu bewegende Masse ist, und dass von der Geschwindigkeit des einen Körpers ebenso viel verloren geht als der andere Körper Geschwindigkeit erhält.

Beim Einholen ist die Summe der bewegenden Kräfte

$$PC + mn\,PC,$$

beim Begegnen

$$PC - nm\,PC,$$

daher allgemein

$$PC \pm nm\,PC.$$

Bewegt ferner die Kraft V in der Zeit T das Gewicht P durch den Raum L, so wird die Kraft mV in der Zeit nT das Gewicht mP durch den Raum nL führen. Es ist also:

$$VT : PL = mn\,VT : mn\,PL.$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich wieder wie die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume, oder

$$\frac{L}{T} : C = \frac{mL}{nT} : \frac{m}{n}\,C.$$

Aus der vorigen Proportion ergiebt sich:

$$V : \frac{PL}{T} = mV : \frac{mn\,PL}{nT}$$

und somit

$$V : PC = mV : mPC.$$

Stosst also das von der Kraft V mit der Geschwindigkeit C bewegte Gewicht P gegen das ruhende Gewicht mP, so werden beide Körper mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{1+m}\,C$ fortgehen. Denn es muss eben die Geschwindigkeit in dem Verhältniss abnehmen, als die zu bewegende Masse grösser wird, d. h. es muss das Verhältniss bestehen:

$$V : CP = V : \frac{1+m}{1}\,P\,\frac{1}{1+m}\,C.$$

Also ist der Stoss bei dem einen Körper $\frac{1}{1+m}\,PC$, bei dem andern $\frac{m}{1+m}\,PC$.

Ueberholt ein Körper mP, der mit der Geschwindigkeit nC durch die Kraft mnV bewegt wird, einen anderen Körper (P, C, V) so ist:

1) Oxon. 1695, Bd I. S. 1012 flg.

$$V:PC = nmV:mnPC$$

und daraus folgt für die Geschwindigkeit des vorangehenden Körpers

$$PC\frac{1+mn}{1+m},$$

für die Geschwindigkeit des nachfolgenden

$$\frac{1+nm}{1+m}mPC.$$

In ähnlicher Weise leitet er noch den Fall entgegengesetzter Bewegungen.

Ueber die elastischen Körper bemerkt er in seiner ersten Abhandlung, dass, wenn die elastische Kraft stärker wirkt als die Stosskraft, eventuell ein Abspringen anstatt einer fortgesetzten gemeinschaftlichen Bewegung erfolgen kann.

Wren raisonnirt wie folgt: Es bewege sich (Fig. 2) der Körper A von A gegen B mit der Geschwindigkeit AD, B gegen A mit der Geschwindigkeit BD und C sei der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden Massen. Man mache $CE = CD$. Die Masse A wird sich nach dem Stosse in der Richtung EA und mit der Geschwindigkeit EA bewegen, der Körper B gegen EB mit der Geschwindigkeit EB. Je nachdem nun der Punkt D auf der AB oder auf der Verlängerung derselben, oder endlich im Punkte A oder B sich befindet, ergeben sich die verschiedenen Fälle der Begegnung, des Uebereinholens oder des Stosses eines bewegten Körpers gegen einen ruhenden. Wren führte vor der Veröffentlichung seiner Gesetze Versuche mit Körpern aus, die an Schnüren befestigt waren, d. h. mit Pendeln. Ueberhaupt spielte das Experiment bei der Ableitung der Gesetze des Stosses eine grosse Rolle. Da es aber in der Natur vollkommen unelastische Körper nicht giebt, so konnten die Experimente natürlich nur annähernde Resultate geben. Als unelastische Körper nahm man für diese Versuche Bleikugeln oder an der Luft gehärtete Thonkugeln.

Huyghens hat in seiner ersten, früher genannten Schrift nur die Gesetze des Stosses elastischer Körper gegeben, ohne sie abzuleiten. Im Februar des Jahres 1669 überreichte er der königl. Societät einen weiteren Aufsatz, in welchem er folgende Sätze für den Stoss elastischer Körper aussprach:

1. Die Summe der Producte der Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten ist vor und nach dem Stosse gleich.

2. Die Grösse der Bewegung nach dem Stosse wird zwar vermehrt oder vermindert, bleibt aber doch immer nach einerlei Seite unverändert, wenn man die entgegengesetzen Bewegungen von einander abzieht.

Der erste dieser beiden Sätze veranlasste Bernoulli, beim grossen Streite um das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft zu dem Ausspruche, dass in der Körperwelt eine gleiche Summe lebendiger Kraft immer erhalten wird und dass selbe nie verloren geht.

Die Rolle des Stosses in der Geschichte des Princips der lebendigen Kraft dürfte zu allgemein bekannt sein, um hier ausführlich angeführt zu werden. Der Streit gegen Leibnitz, der das Princip der lebendigen Kraft einführte, und gegen Bernoulli, der sich zwar anfangs gegen Leibnitz stemmte, um schliesslich durch Nachdenken und durch Studium einer der eifrigsten Anhänger desselben zu werden, hat seiner Zeit die gesammte wissenschaftliche Welt in Aufruhr gebracht und kein Werk über die Geschichte der Mathematik versäumte darüber zu berichten. Es soll hier nur kurz gezeigt werden, wie Bernoulli Anlass nahm, das Gesetz der lebendigen Kraft als Naturgesetz anzunehmen. Sind M und m zwei elastische Massen, C, c ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse, V, v die Geschwindigkeiten nach dem Stosse und setzt man $\frac{(MC+mc)}{M+m}=x$, so ist bekanntlich

$$V=2x-C,$$
$$v=2x-c.$$

Quadrirt man die so entstandenen Gleichungen, multplicirt die erste mit M, die zweite mit m und addirt sie, so erhält man

$$MV^2+mv^2=MC^2+mc^2-4(MC+mc)x+4(M+m)x^2.$$

Es ist aber

$$x(M+m)=MC+mc,$$

daher

$$4x^2(M+m)=4x(MC+mc),$$

daher

$$MV^2+mv^2=MC^2+mc^2;$$

dieses ist das berühmte Gesetz Huyghens', worauf eben Bernoulli sein früher angezogenes Citat begründete.

Die sämmtlichen Gesetze des Stosses führte Huyghens später in einer eigenen Schrift aus, die er jedoch bei Lebzeiten nicht mehr veröffentlichen konnte, und erst nach seinem Tode erschien.[1])

Der Umstand, dass Huyghens nicht die Ursache untersuchte, warum elastische Körper, die aneinander stossen, wieder zurückspringen, hat Montucla veranlasst zu zeigen, dass Huyghens Scheu hatte, die physikalischen Vorgänge beim Stosse elastischer Körper zu analysiren.[2]) In der That setzt Huyghens gewisse Erfahrungssätze als bekannt voraus und leitet dann aus ihnen in sehr geschickter Weise die Gesetze ab.

Der Ausgangspunkt ist folgender: Man stelle sich vor, ein Mensch befinde sich auf einem Schiffe und er bringe zwei gleiche elastische Kugeln mit gleichen Geschwindigkeiten gegen einander, so lehrt die Erfahrung, dass auf dem bewegten Schiffe die Kugeln ebenso mit gleichen Geschwindigkeiten zurückprallen, als wie auf dem ruhenden Schiffe. Daraus leitet H.

1) De motu corporum ex percussione in Opusc. posthum. Lug. Bat. 1703. S. 369 flgg.

2) Hist. des Mathem., Bd. II S. 412 der Nouvelle Edition (An VII): *„Il semble qu'il ait craint d'entrer dans l'analyse physique de ce qui se passe dans le choc de corps.“*

die verschiedenen möglichen Fälle des Stosses elastischer Körper ab und wir wollen die von ihm eingehaltene Methode durch folgendes Beispiel charakterisiren:

Es führe ein Mensch auf einem Schiffe durch zwei Schnüre die gleichen Kugeln a und b gegen einander (Fig. 3), so stossen sie im Falle gleicher Geschwindigkeiten in der Mitte c gegen einander. Bewegt sich zur selben Zeit das Schiff von a gegen b mit der Geschwindigkeit $ac = \frac{1}{2}ab$, so wird die absolute Geschwindigkeit von a gleich sein

$$ac + cb = ab,$$

jene von b:

$$bc - ac = bc - bc = 0.$$

Die Kugel b würde vom Lande aus gesehen in Ruhe erscheinen. Nach dem Stosse und das Schiff immer in Bewegung gedacht, wird man folgende Erscheinung haben. Da die Kugeln erfahrungsgemäss mit gleicher Geschwindigkeit von c abspringen, wird die Kugel b von c gegen b mit der Geschwindigkeit cb fortgestossen, und die Geschwindigkeit von b wird sein

$$cb + ac = ab;$$

c bewegt sich von c gegen a mit der Geschwindigkeit ca und die absolute Bewegung wird sein

$$ca - ca = 0;$$

nach dem Stosse erscheint also dem Beobachter am Lande, als würde die Kugel a jetzt in Ruhe sein, während b die entgegengesetzte Richtung von früher und die Geschwindigkeit ab annahm.

Den Beweis bei gleichen Massen und verschiedenen Geschwindigkeiten führt er in nachstehender Weise aus. Es sei jetzt die Geschwindigkeit von $a = ad$, jene von $b = bd$, das Schiff bewege sich von b gegen a mit der Geschwindigkeit dc. Die absoluten Bewegungen werden sein:

$$\text{für } a: \; ad - cd = ac = \tfrac{1}{2}ab,$$
$$\text{„ } b: \; bd + dc = bc = \tfrac{1}{2}ab.$$

Dem Beobachter würde also vorkommen, dass die Kugeln mit gleichen Geschwindigkeiten gegen einander anprallen und folglich auch, dass sie mit gleichen Geschwindigkeiten auseinandergehen. Um aus der absoluten Geschwindigkeit die relative abzuleiten, berücksichtige man die Schiffsgeschwindigkeit dc; den Raum dc müssen offenbar beide Kugeln gemeinschaftlich zurücklegen und diese Grösse dc ist gewissermassen mit verkehrter Bewegungsrichtung an die absolute Geschwindigkeit anzubringen, um die relative zu erhalten; daher:

$$\text{für } b: \; bc + cd = ad,$$
$$\text{„ } a: \; ac - cd = bd,$$

und daraus das bekannte Gesetz, dass bei solchem Stosse die Körper ihre Geschwindigkeiten vertauschen. So fortfahrend, leitet Huyghens nacheinander alle Gesetze des Stosses ab. Um den Fall verschiedener Massen zu behandeln, erklärt er zunächst, dass ein freifallender elastischer Körper nach dem Falle wieder so hoch in die Höhe geschleudert wird, als die Fallhöhe war. Vergleicht man also die Stossgeschwindigkeiten mit den Fallgeschwindigkeiten, so kann nach den früheren Methoden vorgegangen werden, sobald bewiesen wird, dass die Geschwindigkeiten nach dem Stosse denjenigen vor dem Stosse gleich sind, wenn letztere den Massen umgekehrt proportional sind.

Zum Schlusse leitet Huyghens folgenden merkwürdigen Satz ab: Es liegen mehrere Massen M, m, μ, ... hintereinander, und es kommt M mit der Geschwindigkeit C gegen die ruhende Masse m an und letztere geht dann weiter mit der Geschwindigkeit $\frac{2MC}{M+m}=V$. Mit dieser stösst sie an die ruhende Masse μ an und theilt ihr die Geschwindigkeit $\frac{2mV}{m+\mu}$ mit u. s. w. Die dazwischenliegenden Massen vermehren die Geschwindigkeit, wenn die nachfolgenden Massen kleiner, vermindern sie, wenn sie grösser werden. Durch die Differentialrechnung lässt sich nun nachweisen, dass die Vermehrung der Geschwindigkeit ein Maximum wird, wenn die Massen der Körper in geometrischer Progression abnehmen. Huyghens nahm die Progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ an und gab der ersten Kugel die Geschwindigkeit $=1$. Die Geschwindigkeit der zweiten wird dann $\frac{4}{3}$, die der dritten $(\frac{4}{3})^2$ u. s. w. Für die hundertste Kugel berechnete Huyghens die Geschwindigkeit 1476000000, wobei er jedoch einen Rechnungsfehler beging, den J. Bernoulli durch die logarithmische Rechnung entdeckte. Die wirkliche Geschwindigkeit wäre nämlich 2338500000000.[1])

Von deutschen Gelehrten behandelten Kästner, Karsten und Lambert die Gesetze des Stosses. Kästner und Karsten sind ziemlich ausführlich, Lambert giebt sich nur mit dem elastischen Stoss ab, indem er den Stoss unelastischer Körper als Anhang oder als besonderen Fall desjenigen von elastischen nur ganz kurz berührt. Alle diese drei Autoren sind mitunter originell genug, um näher berücksichtigt zu werden. Karsten hat auch das Verdienst, nebst Euler zuerst zur Ableitung der einschlägigen Formeln die höhere Mathematik angewendet zu haben.

Zur Zeit, als Kästner sein Werk[2]) schrieb, gab es auch noch bessere Naturforscher, „welche so gröblich irrten" und sich nicht allemal „von der Wirkung und Gegenwirkung" vorsichtig genug ausdrückten. Dies veranlasste den deutschen Gelehrten, der Wirkung und Gegenwirkung ein besonderes Capitel zu widmen:

---

1) Karsten giebt im IV. Theil seiner Lehrbegriffe der gesammten Mathematik den Beweis (S. 232 flg.), dass, wenn die Massen in geometrischer Progression abnehmen, die Geschwindigkeit in geometrischer Progression zunimmt.

2) Anfangsgründe der höheren Mechanik. Göttingen 1793. II. Aufl. S 471 flgg.

„Wegen der Trägheit kann kein Körper in dem andern eine Veränderung hervorbringen, ohne selbst eine zu erleiden. Wie man die Veränderung, die der wirkende Körper erleidet, als eine Gegenwirkung des leidenden ansieht, so sagt man, die Gegenwirkung sei der Wirkung gleich *(actio aequlis reactioni)*, das ist: Ein Körper, der in den andern wirkt, leidet eben deswegen eine Veränderung, weil er wirkt; folglich ist die Veränderung, die er leidet, weder grösser, noch kleiner als seine Wirkung; nicht kleiner, sonst wäre ein Theil seiner Wirkung ohne Veränderung in ihm; nicht grösser, denn wenn er nur Veränderung erleidet, weil er wirkt, so lässt sich kein Grund von einer grösseren Veränderung, als seine Wirkung ist, angeben."

Bei der Wirkung eines Körpers auf den andern stellt man sich vor, dass, um die Trägheit des letzteren aufzuheben, eine gewisse Veränderung des ersteren erforderlich ist. Newton[1]) suchte dieses Gesetz durch folgendes Beispiel zu erläutern: Ein Pferd zieht einen Stein vermittelst eines Strickes, der um den Stein gebunden ist. Der Strick wird durch den Zug des Pferdes gespannt und zieht den Stein gegen das Pferd, das Pferd gegen den Stein und hindert so die erstere Bewegung in dem Maasse, als es letztere befördert. Nach einfacheren Begriffen soll damit gesagt sein, dass das Pferd die Schwere des Steines, die Reibung mit den Widerstand des Mittels zu überwältigen hat. Worin nun der Fehler der Zeitgenossen Kästner's in der Auffassung dieser Gegenwirkung besteht, erklärt er uns selbst:

„Man findet Naturforscher, die sich die Gegenwirkung als etwas vorstellen, das in der That dem Körper, der stösst, entgegen stiesse und Bewegungen, die der Richtung seines Stosses entgegengesetzt sind, hervorbrächte. Sie legen leicht zu bewegende Körperchen, Sand u. dergl. (Bleikugeln oder Schrote sind dazu fast noch besser) nahe an den Rand eines Tellers, geben dem Teller an der entgegengesetzten Seite einen Schlag und finden alsdann, was auf ihm lag, näher als zuvor bei dieser Stelle: da bilden sie sich ein, was auf dem Teller lag, habe durch die Gegenwirkung eine Bewegung der Richtung des Schlages entgegen bekommen und sei dieserwegen nach der Stelle, wo der Schlag geschah, zugegangen; sie bedenken aber nicht, dass der Teller dem Schlage früher Folge geleistet hat, als sich die Wirkung desselben in das, was auf dem Teller lag, fortpflanzen konnte, dass also eigentlich dieses liegen geblieben und der Teller darunter fortgegangen ist, also sich die geschlagene Stelle des Tellers dem, was darauf lag, nicht dieses ihr, genähert hat."

Lambert, der fast keinen Zweig der angewandten Mathematik unberührt liess, hat sich auch mit den Gesetzen des Stosses beschäftigt, nur

1) Princ. etc. Lib. 1. Lex motus III.

zog er den Stoss elastischer Körper in Berücksichtigung.[1]) Er bedient sich jenes Principes, von welchem Euler eine so ausgedehnte Anwendung macht, indem er sich nämlich immer die Elasticitätskraft durch die Schnellkraft einer Feder ersetzt denkt. Zuerst betrachtet er (Fig. 4) einen elastischen Ring AB, der bei A befestigt und bei B zusammengedrückt wird. Nun nimmt er eine Curve EB von der Art an, dass die jeweiligen Abscissen derselben (BD) die Grösse der Zusammendrückung und die Ordinaten (ED) jene Kraft darstellen, welche bei B thätig war, um B nach D zu versetzen. Wenn die zusammendrückende Kraft bei B plötzlich zu wirken aufhört, so schnellt B zurück und es fragt sich, mit welcher Geschwindigkeit B von D abprallt. Ist t die Zeit, welche D verwendet, um nach P zu kommen, und setzt man $BP = x$, $PM = K$, die Masse einer von B abgeschnellten Kugel $= m$, ihre Geschwindigkeit im Punkte $P = g$, $Pp = \partial x$, die Geschwindigkeit bei $B = G$, so stellt Lambert folgende Gleichungen auf:

$$\partial g = \frac{K \partial t}{m}, \quad -g \partial g = \frac{K \partial x}{m} = \frac{PMmp}{m}.$$

Die Integration ergiebt:

$$\frac{-G^2}{2} = \int_0^{BD} \frac{K \partial x}{m} = \frac{DEB}{m} = \frac{G^2}{2}$$

oder

$$G^2 = \frac{2DEB}{m}.$$

Nun betrachtet Lambert zwei Ringe (Fig. 5), die bei C zusammenstossen; die Bedeutung der Curven AE, eB mit ihren Coordinaten bleibt die frühere. Die Elasticitätskraft dieser Ringe als gleich vorausgesetzt, wird $PN = pn$ sein, sobald die Abscissen AP und Bp im Verhältniss zum Halbmesser genommen werden. Drückt man die Ringe bis D und d zusammen, so dass also die Proportion besteht: $AC : DC = BC : dC$, und denkt man in D und d zwei Kugeln von den Massen m und M, die sich so zueinander verhalten, wie die Diameter AC und BC, so werden diese beim Loslassen der Ringe fortgeschnellt. Ist die Geschwindigkeit von m in $A = C$ und von M in $B = c$, so ist:

$$C^2 = \frac{2AED}{m},$$

$$c^2 = \frac{2BED}{M},$$

woraus

$$C^2 : c^2 = \frac{AED}{m} : \frac{BED}{M}.$$

---

1) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert. II. Theil I. Abschn. Berlin 1770. S. 523.

Nun ist das Verhältniss der Räume $AED : BED = AD : Bd = AC : BC$ und $m : M = BC : AC$, daher:

$$C : c = AC : BC = M : m.$$

Die Geschwindigkeiten sind somit den Massen verkehrt, den durchlaufenen Räumen direct proportional. Es werden also die Kugeln in gleichen Zeiten nach P und p und ebenso nach A und B gelangen. Der nächste Schluss, der sich daraus ziehen lässt, ist der, dass, wenn auch zwei Kugeln bei A und B gegen die Ringe anstossen und diese zusammendrücken, sie in demselben Maasse an Geschwindigkeit verlieren werden, als sie früher an Geschwindigkeit zunahmen, und dass somit ihre Geschwindigkeiten an den gleichnamigen Punkten P und p, z. B. in beiden Fällen, gleich sein werden. Man setze nun, dass diese Kugeln an die Ringe selbst befestigt seien und dass letztere gegen einander laufen, so wird, wenn die Ringe in C zusammenstossen, der Punkt c in Ruhe bleiben und die Zusammendrückung ebenso wie früher erfolgen. Endlich sieht man auch, dass es gleichgiltig ist, ob man die Kugeln vermittelst elastischer Ringe aneinander stossen lässt oder ob man annimmt, die Kugeln seien selbst elastisch. Beim Stosse elastischer Körper kann man sich nun immer einen in Ruhe befindlichen Körper vorstellen, dem sich die Theilchen nähern und dann wieder entfernen; die relativen Geschwindigkeiten vertheilen sich in Bezug auf diesen Punkt nach dem oben angegebenen Gesetze, d. i. im verkehrten Verhältniss zu den Massen. Aus diesem Gesetze leitet nun Lambert die Veränderung der absoluten Geschwindigkeiten für den Fall ab, als letztere den Massen nicht umgekehrt proportional wären. Bewegen sich z. B. die Körper M, m nach einerlei Richtung mit den Geschwindigkeiten V, v, wobei $V > v$ ist, so wird m von M mit der relativen Geschwindigkeit $V - v$ eingeholt. Vertheilt man die relative Geschwindigkeit in umgekehrtem Verhältniss der Massen, so nähert und entfernt sich M mit der Geschwindigkeit $\frac{m(V-v)}{M+m}$, hingegen m mit der Geschwindigkeit $\frac{M(V-v)}{M+m}$. Da nun vor und nach dem Stosse die gemeinschaftliche Geschwindigkeit $= v + \frac{M(V-v)}{M+m}$ ist, so ist nach dem Stosse:

$$C = v + \frac{M(V-v)}{M+m} - \frac{m(V-v)}{M+m},$$

$$c = v + \frac{M(V-v)}{M+m} + \frac{M(V-v)}{M+m},$$

woraus:

$$MV^2 + mv^2 = MC^2 + mc^2.$$

Den Fall unelastischer Körper tradirt Lambert wie folgt. Sind die Körper nicht vollkommen elastisch, so ist die relative Geschwindigkeit nach dem Stosse geringer, z. B. $= n(V - v)$. Da sich letztere ebenfalls im umgekehrten Verhältniss der Massen verhält und die gemeinsame Geschwindigkeit eben dieselbe bleibt, so sind die absoluten Geschwindigkeiten nach dem Stosse

$$C = v + \frac{M(V-v)}{M+m} - \frac{n.m(V-v)}{M+m},$$

$$c = v + \frac{M(V-v)}{M+m} + \frac{n.M(V-v)}{M+m};$$

haben die Körper gar keine Elasticität, dann muss $n = 0$ gesetzt werden, und es ist dann:

$$C = \frac{MV + mv}{M+m},$$

$$c = \frac{MV + mv}{M+m},$$

$$C = c.$$

Nun sollten wir noch Etwas über Karsten sagen, wollen aber zuerst noch Euler berühren, welcher gezeigt hat, wie sich die Gesetze des Stosses mit Hilfe der Differentialrechnung ableiten lassen.[1])

Stossen zwei Körper gegeneinander, so ist auf die Dauer des Stosses, d. h. von der ersten Berührung der beiden Körper bis zur vollständigen Trennung derselben eine Kraft thätig, welche den Gesetzen der Mechanik entsprechend eine beschleunigte Bewegung verursachen muss. Betrachten wir z. B. die Theilchen P und Q zweier solcher Körper und es sei ihre Entfernung $PQ = f - x$ (Fig. 6). Unter f sei die Entfernung der Schwerpunkte gemeint, wenn sich die Körper gerade berühren, x sei die Verminderung dieser Entfernung durch die Zusammendrückbarkeit veranlasst. Die Geschwindigkeit des Theilchens P sei dieselbe, als wenn der Körper von einer Höhe v gefallen wäre; die Geschwindigkeit in Q entspreche einer Fallhöhe u. In einer unendlich kleinen Zeit lege das Theilchen Q den Weg $Qq = \partial s$, das Theilchen P den Weg $Pp = \partial r$ zurück. Es wird dann die Geschwindigkeit in q einer Fallhöhe $u + \partial u$, jene in p einer Fallhöhe $v + \partial v$ entsprechen. Die Distanz pq ist gegeben durch:

$$pq = f - x + \partial s - \partial r.$$

Ist $PQ = pq$ und $\partial PQ = \partial pq = \partial x$, so hat man

$$pq = f - x - \partial x$$

und daher

$$\partial x = \partial r - \partial s.$$

Wenn aber die Elemente Pp, Qq ähnlich sind, d. h. die Bewegung von P und Q gleich, so besteht die Proportion $dr : ds = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, daher

$$\frac{\partial r}{\sqrt{v}} = \frac{\partial s}{\sqrt{u}} = \frac{\partial r - \partial x}{\sqrt{u}},$$

woraus

1) Comment. acad. scient. imp. Petropol. Tomus V. De communicatione motus in collisione corporum. Auctore Leonh. Eulero, S. 159 flgg. Auch Lambert kommt in chronolog. Folge erst nach Euler.

$$\partial r = \frac{\partial x \sqrt{v}}{\sqrt{v} - \sqrt{u}}$$

und ebenso

$$\partial s = \frac{\partial x \sqrt{u}}{\sqrt{v} - \sqrt{u}}.$$

Es seien nun A und B die Massen der beiden Körper, P die Masse jenes Körpers, dessen freier Fall als Maass der Elasticitätskraft angenommen wurde, oder besser, P sei die Masse desjenigen Körpers, dessen freier Fall der Grösse der Stosskraft äquiperiren soll, so setzt Euler

$$\partial v : \partial r = P : A,$$
$$\partial u : \partial s = P : B,$$

d. h. die in unendlich kleinen Zeiten zurückgelegten Wege sind den Massen proportional. Stossen die beiden Körper gegen einander (entgegengesetzte Bewegung), so ist

$$\partial v = -\frac{P}{A}\partial r, \quad \partial u = +\frac{P}{B}\partial s$$

und daher:

$$-A\partial v - B\partial u = P(\partial r - \partial s) = P\partial x$$

und durch Integration

$$-Av - Bu = \int P\partial x.$$

Für $x = 0$ ist die Constante $Aa + Bb$ $(v = a, u = b)$, folglich

1) $$A(a - v) + B(b - u) = \int P\partial x.$$

Setzt man die gefundenen Werthe von ∂r und ∂s in die früheren Proportionen ein, so wird:

$$P\partial x = -\frac{A\partial v\sqrt{v} + A\partial u\sqrt{u}}{\sqrt{v}}.$$

Aus dieser Gleichung und aus

$$P\delta x = -A\delta v - B\delta u$$

erhält man

$$A\delta v\sqrt{u} = -B\delta u\sqrt{v},$$

$$\frac{A\delta v}{\sqrt{v}} = -\frac{B\delta u}{\sqrt{u}},$$

und durch Integration:

2) $$A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = Const. = A\sqrt{a} + B\sqrt{b}.$$

Die Gleichungen 1) und 2) sind gewissermassen die Fundamentalgleichungen, aus welchen sich die Geschwindigkeiten nach dem Stosse ableiten lassen.

Bei elastischen Körpern beginnt die Geschwindigkeit nach dem Stosse in dem Augenblick, wenn $x = 0$ wird, daher

$$\int P\partial x = 0$$

oder aus 1):

3) $$A(a - v) = -B(b - u).$$

2) durch 3) dividirt giebt:

4)
$$\sqrt{a}+\sqrt{v}=\sqrt{b}+\sqrt{u}$$

und schliesslich
$$\sqrt{v}=\sqrt{a}+\frac{2B(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{A+B},$$
$$\sqrt{u}=\sqrt{b}+\frac{2A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{A+B}.$$

Setzt man die gewöhnliche Bezeichnungsweise ein, nämlich $\sqrt{a}=C$, $\sqrt{b}=c$, $A=M$, $B=m$, $\sqrt{v}=V$, $\sqrt{u}=v$, so wird
$$V=C+\frac{2m(c-C)}{M+m},$$
$$v=c+\frac{2M(C-c)}{M+m}.$$

Bei den unelastischen Körpern wird f nach der Berührung nicht mehr vermindert, d. h. $\partial x=0$, und weil
$$\partial x=\partial r-\partial s,$$
auf
$$\partial r=\delta s$$
und
$$v=u.$$

Die Geschwindigkeit beider Körper ist somit nach dem Stosse gleich und somit aus 2)
$$\sqrt{v}=\sqrt{u}=\frac{A\sqrt{a}+B\sqrt{b}}{A+B}.$$

Karsten[1]) leitet die Gesetze des Stosses ungefähr in gleicher Art wie Euler ab, nur ist Ersterer vielleicht fasslicher als Letzterer. Ist f die Entfernung der beiden Schwerpunkte vor dem Stosse, $f-x$ die Entfernung nach einer Zeit t, die Geschwindigkeit der Masse M nach dieser Zeit $t=v$, jene der Masse $N=u$, P die Kraft, welche der Masse M entgegenwirkt, so ist $\partial v=-\frac{2gP}{M}\partial t$, $\partial u=\frac{2gP}{N}\partial t$, also $N\partial u=2gP\partial t=-M\partial v$ und
$$M\partial v+N\partial u=0,$$
woraus durch Integration
$$Mv+Nu=Const.$$

Ist zu Anfang des Stosses $v=a$, $u=b$, so ist:
$$Ma+Nb=Const.,$$
daher
$$Mv+Nu=Ma+Nb.$$

Will man die Geschwindigkeit am Ende des Stosses haben, so muss $v=u$ gesetzt werden und es ist dann
$$v=u=\frac{Ma+Nb}{M+N}=a-\frac{N(a-b)}{M+N}$$
$$=b+\frac{M(a-b)}{M+N}.$$

1) Lehrbegriff der gesammten Mathematik. Aufgesetzt von Wencesl. Joh. Gust. Karsten. Greifswald 1769. IV. Theil S. 211flgg.

So erhält man die Bewegungsgeschwindigkeit nach dem Stosse für unelastische Körper. Bei elastischen Körpern müssen andere Beziehungen zwischen u und v noch aufgestellt werden. Es sei (Fig. 7) Aa der Weg, um welchen M in der Zeit t fortrückt $=r$, Bb der Weg von m $=s$, so ist allgemein:

$$2Mv\partial v=-4gP\partial r$$

und

$$2Nu\partial u=-4gP\partial s,$$

daraus

$$2Mv\partial v+2Nu\partial u=4gP(\partial s-\partial r).$$

Nun ist $PQ=f+s-r=f-x$, also $\partial s-\partial r=-\partial x$, folglich

$$2Mv\partial v+2Nu\partial u=4gP\partial x,$$

woraus durch Integration

$$Mv^2+Nu^2=Const.-4g\int P\partial x.$$

Wählt man das $\int$ so, dass für $x=0$ $\int P\partial x=0$ wird, so ergiebt sich der Werth der Constante

$$Const.=Ma^2+Nb^2$$

und

$$M(a^2-v^2)+N(b^2-u^2)=4g\int P\partial x.$$

Bei elastischen Körpern ist die Wirkung des Stosses zu Ende, wenn x ist. Dies giebt $\int P\partial x=0$ und

$$Ma^2+Nb^2=Mv^2+Nu^2$$

oder

$$M(a^2-v^2)+N(b^2-u^2)=0.$$

Dividirt man die früher gefundene Gleichung

$$(Mv+Nu)=(Ma+Nb),$$

die man auch wie folgt schreiben kann:

$$M(a-v)+N(b-u)=0$$

durch obige, so erhält man

$$a+v=b+u,$$

folglich

$$M(a-v)+N(2b-a-v)=0,$$

und

$$Ma-Mv+2bN-Na-Nv=0,$$

also

$$v=a-\frac{2N(a-b)}{M+N}$$

und

$$u=b+\frac{2M(a-b)}{M+N}.$$

Der Unterschied zwischen Karsten und Euler besteht also darin, dass Letzterer aus einer allgemeinen Gleichung die Fälle elastisch und unelastisch direct ableitet und dass Karsten die allgemeinen Formeln der Mechanik durch Einführung der Acceleration der Schwere in eine andere Form anwendet.

Die Theorie des excentrischen Stosses hat ausführlich Euler[1]) behandelt. Er unterscheidet hierbei zwei besondere Fälle; eigentlich drei; der erste gehört jedoch zum centralen Stoss und wird nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen. Die anderen zwei Fälle sind der rectoschiefe *(collisiones rectobliquas)*, d. i. jener, bei welchem die eine der Verbindungslinien der beiden Schwerpunkte mit dem Berührungspunkt senkrecht auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene steht, und der eigentliche schiefe oder excentrische Stoss *(collisiones obliquas)*, bei welchem beide der genannten Verbindungslinien mit der gemeinschaftlichen Berührungsebene einen Winkel bilden. Nun giebt er folgende Fundamentserklärungen. Bewegt sich ein Körper A (Fig. 8) in der Richtung gegen AB und erfährt er einen Stoss cC bei C, so wird, wenn A der Schwerpunkt des Körpers ist und $Aa \# Cc$, der Körper einen Impuls gegen aAE erhalten. Durch den Stoss bei C wird somit nur die Componente AE der AB alterirt, während die AF unverändert bleibt. Benennt man die Kraft Cc mit p, die Geschwindigkeit in der Richtung AE mit u, die Masse des Körpers mit X, so ist:

$$\partial a = -\frac{p\,\partial t}{A}.$$

Hatte der Körper auch eine drehende Bewegung in der Richtung des Pfeiles und ist u' die Winkelgeschwindigkeit bei C, f die Entfernung AC, S die Summe der Productenquadrate der Distanzen aller Molecule in ihren Massen, so ist für die Zeit ∂t:

$$\partial u = \frac{f^2 p\,\partial t}{S} \sin ACc.$$

Die Winkelgeschwindigkeit eines beliebigen andern Punktes erhält man, wenn f allgemein die jeweilige Distanz vom Schwerpunkt bedeutet aus dem Verhältniss $\frac{u}{f}$ und somit:

$$\frac{\partial u}{f} = \frac{fp\,\partial t}{S} \sin ACc.$$

Der Einfluss der Kraft p auf die drehende Bewegung hängt also vom Wirkungspunkte (von f) und von der Einfallsrichtung ($\angle ACc$) ab.

1) Comm. Acad. Petrop. Bd. IX S. 50 flgg. De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientum auct. Leonh. Eulero.

(Schluss folgt.)

Recensionen.

Januschke, **Das Princip der Erhaltung der Energie in der elementaren Elektricitätslehre.** Leipzig 1887, Verlag von Teubner.

In den vier Abschnitten Elektrostatik, Elektricitätsquellen, die Arbeit des elektrischen Stromes und Elektromagnetismus behandelt der Verfasser in klarer, übersichtlicher Weise die Theorie der Elektricität auf elementarem Wege. Ueberall werden die Beziehungen zum Princip der Erhaltung der Energie hervorgehoben, wodurch der Nachweis geliefert wird, dass das Energieprincip in der Elektricitätslehre ebenso giltig ist wie in der Mechanik. Das Buch kann Jedem, der sich mit der Theorie der Elektricität vertraut machen will, als Vorstudium der grösseren Werke angelegentlichst empfohlen werden.

B. Nebel.

Behse, **Lehrbuch der Physik** für höhere Bürgerschulen und technische Lehranstalten. Weimar 1887, Verlag von B. F. Voigt. Preis 4 Mk. 50 Pf.

Der Verfasser dieses Lehrbuches der Physik, welches mehr den Namen „Leitfaden" verdient hätte, tadelt in der Vorrede, dass bei den meisten Lehrbüchern die mathematische Seite des physikalischen Unterrichts zu sehr in den Vordergrund trete, und glaubt, dass dadurch u. A. die Fassungskraft der Schüler erheblich überstiegen werde. Diese Ansicht kann wohl von dem heutigen Standpunkte der Physik nicht getheilt werden. Die Physik soll nicht mehr den Schüler durch Vorführung einer Reihe schöner Experimente auf's Angenehmste unterhalten, sondern ihn erkennen lassen, dass sie eine strenge Wissenschaft ist, mit der sich rechnerisch Etwas anfangen lässt, woran sich der Schüler nicht früh genug gewöhnen kann. Ein verständiger Lehrer wird die jeweiligen Kenntnisse der Schüler nicht überschreiten, so dass die Fassungskraft der Lernenden nicht überstiegen wird; zugleich lernt der Schüler durch die Nutzanwendung der Mathematik deren Werth mehr und mehr schätzen, so dass ihm diese nicht mehr so trocken und abstrakt erscheint.

B. Nebel.

J. Kelling, **Ueber die Zustandsbedingungen der Flüssigkeiten und Gase, sowie über den Aether.** Karlsruhe 1886, G. Braun.

Der Verfasser geht von der Hypothese aus: „Die Möglichkeit, dass ein Stoff jeden der drei Aggregatzustände annehmen kann, ist an den doppelten

Schnitt der Curven der den Molecülen innewohnenden und der sonst auf sie einwirkenden anziehenden und abstossenden Kräfte oder Kraftsummen gebunden", wodurch sich sofort die Erscheinungen der Cohäsion und Adhäsion erklären. Sodann unterscheidet er zwischen „Weltäther" und „Sphärenäther" und stellt die Gleichungen für den Ruhezustand nebst speciellen Fällen auf. Das Gleiche geschieht sodann für den Bewegungszustand. Daraus folgt die Erklärung der Temperatur, der Wärme und der Verdampfung, wobei wieder eine Reihe hypothetischer Voraussetzungen gemacht werden. Schliesslich giebt der Verfasser eine Tabelle der Constanten der Kraftcurve für verschiedene Stoffe.

B. Nebel.

Theorie der analytischen Functionen. Von Dr. Otto Biermann, Privatdocent an der deutschen Universität zu Prag. 451 S. Leipzig, B. G. Teubner.

Es ist keine leichte Aufgabe, auf dem kleinen einer Recension zu Gebote stehenden Raume ein klares Bild von dem Inhalt und der Bedeutung des vorliegenden Werkes zu geben, welches auf 450 Seiten eine imposante Masse geistiger Arbeit zusammendrängt. Nicht nur das Resultat der ganzen Lebensarbeit eines bedeutenden Mathematikers, die von Herrn Weierstrass neubegründete Functionenlehre, wird in dem Buche im Zusammenhange gegeben, sondern es wird auch der Versuch gemacht, den Inhalt einer reichen Litteratur, deren sich die Schule des Meisters bereits erfreut, mit dem seiner eigenen Vorlesungen und zerstreuten Abhandlungen zu einem homogenen Ganzen zu verarbeiten und der Theorie diejenige Abrundung und den Abschluss zu geben, der heutzutage eben möglich ist.

Dass durch das Erscheinen des Buches einem dringenden Bedürfniss abgeholfen wird, das bedarf keiner weiteren Erörterung, um so weniger als wir wohl darauf verzichten müssen, jene Functionenlehre im Zusammenhang aus der Hand ihres Schöpfers selbst zu erhalten. Jedenfalls hat sich Herr O. Biermann ein grosses Verdienst erworben, indem er mit besonderer Erlaubniss des Hrn. Weierstrass die vorliegende Bearbeitung unternahm. Es kommt dabei weniger darauf an, ob der Versuch in den Augen des grossen Functionentheoretikers und in denen seiner berufenen Anhänger als ein vollständig gelungener dasteht, oder ob die Tiefe der Auffassung an allen Stellen eine ausreichende ist, worauf doch fast jedes Compendium verzichten muss. Auch wollen wir uns in dieser Hinsicht kein massgebendes Urtheil zusprechen. Die Hauptsache ist, ob die pädagogische Verarbeitung hinreicht, auch dem Fernerstehenden und dem Anfänger eine wirkliche Einführung in jene Methode zu gewähren und das Wesentliche derselben zum Allgemeinbesitze der Mathematiker zu machen. Und in dieser Hinsicht muss man dem Herrn Verfasser alle Anerkennung zollen.

Allerdings lesen sich einzelne Abschnitte nicht leicht, aber es liegt nun einmal für den Anfänger in der Allgemeinheit der Betrachtungen manche fast unübersteigliche Schwierigkeit, namentlich auch deshalb, weil auf geometrische Veranschaulichung fast vollständig verzichtet wird, weil geometrische Beweise möglichst vermieden werden, und weil die Consequenz, die man im Aufbau des Lehrgebäudes beabsichtigte, nicht zuliess, gewisse elementare und geläufige Functionsbegriffe vorauszugreifen, obwohl durch Anwendung derselben mancher Beweis eine elegantere Gestalt annimmt. So werden z. B. Logarithmus, Sinus und Cosinus auf den ersten 263 Seiten überhaupt nicht genannt und es wird auf alle Vereinfachungen verzichtet, die durch den Gebrauch jener Functionen z. B. der Lehre von den complexen Grössen, von gewissen Reihen und unendlichen Producten zu Gute kommen würden. Sie werden erst da in den Bau eingefügt, wo ihre Herrschaft beginnt.

Schon daraus wird man erkennen, dass das eigentliche Rechnen sehr in den Hintergrund tritt, dass es sich nicht um Formelwerk und Schematismus, sondern um reine Gedankenarbeit handelt, bei der zugleich allen Forderungen der äussersten Strenge genügt werden soll.

Was diese Strenge anbetrifft, so erstreckt sie sich bis auf die ersten Elemente zurück. Um die Bedeutung des ersten Abschnittes in dieser Hinsicht in das rechte Licht zu setzen, sei an die Worte erinnert, mit denen der verstorbene Professor E. Heine seine Abhandlung über die Elemente der Functionentheorie im 74. Bande des Crelle'schen Journals einleitete. Dort hiess es:

„Das Fortschreiten der Functionenlehre ist wesentlich durch den Umstand gehemmt, dass gewisse elementare Sätze derselben, obgleich von einem scharfsinnigen Forscher bewiesen, noch immer bezweifelt werden, so dass die Resultate einer Untersuchung nicht überall als richtig gelten, wenn sie auf diesen unentbehrlichen Fundamentalsätzen beruhen. Die Erklärung finde ich darin, dass zwar die Principien des Herrn Weierstrass, direct durch seine Vorlesungen und andere Mittheilungen, indirect durch Abschriften von Heften, die nach diesen Vorlesungen gearbeitet wurden, selbst in weiteren Kreisen sich verbreitet haben, dass sie aber nicht von ihm selbst in authentischer Fassung durch den Druck veröffentlicht sind, so dass es keine Stelle giebt, an welcher man die Sätze im Zusammenhang entwickelt findet. Ihre Wahrheit beruht auf der nicht völlig feststehenden Definition der irrationalen Zahlen, bei welcher Vorstellungen der Geometrie, nämlich über die Erzeugung einer Linie durch Bewegung, oft verwirrend eingewirkt haben. Die Sätze sind für die unten gegebene Definition der irrationalen Zahlen giltig, bei welcher Zahlen gleich genannt werden, die sich um keine noch so kleine Zahl unterscheiden, bei welcher ferner der irrationalen Zahl eine wirkliche Existenz zukommt, so dass eine einwerthige Function für jeden einzelnen Werth der Veränderlichen, sei er rational oder irrational, gleichfalls einen bestimmten Werth besitzt. Von einem andern Standpunkte aus können allerdings mit Recht Einwände gegen die Wahrheit der Sätze erhoben werden. Nicht ohne Bedenken veröffentliche ich diese Arbeit."

Diese Worte erregten seiner Zeit in den mathematischen Kreisen, die der Weierstrass'schen Schule ferner standen, begründetes Aufsehen. Man kannte wohl die Einwürfe jenes Mathematikers gegen das Dirichlet'sche Princip und andere schwierigere Dinge, man hatte gelegentlich der Maxima und Minima einer Function von seinen kritischen Untersuchungen darüber gehört, ob im speciellen Falle ein solches wirklich erreicht werde oder ob sich die Function demselben nur nähere; aber man wusste vielfach nicht, dass die kritischen Zweifel bis auf den Begriff der Irrationalzahl zurückgingen, von der es nicht selbstverständlich war, ob sie als bestimmte Grösse betrachtet werden durfte, da sie gewissermassen nur als Grenzbegriff existirt. Die Consequenz ging offenbar dahin, dass die Möglichkeit, alle reellen Zahlen auf einer geraden Linie darzustellen, und umgekehrt jeden Punkt der Geraden einer bestimmten Zahl zuzuordnen, als ein Axiom betrachtet werden musste, was Herr G. Cantor bestimmt ausgesprochen hat.

Damit wurde jedenfalls die hohe Meinung von dem Werthe geometrischer Beweise stark erschüttert, sie sanken gewissermassen auf das Niveau bloser Veranschaulichungsversuche herab, und der Functionentheorie erwuchs die Aufgabe, auf das geometrische Element vollständig zu verzichten und ein ganz neues Lehrgebäude zu errichten.

Man kann in der Entwickelung der Functionenlehre etwa drei Hauptperioden unterscheiden. Die Euler'sche Richtung bestand in Folgendem: Specielle Aufgaben, deren Formulirung gelang, führten auf weitere Functionen, die durch irgend einen arithmetischen Ausdruck definirt wurden. Die Aufgabe des Mathematikers bestand nun darin, auf dem Wege der Rechnung die Eigenschaften der neuen Functionen abzuleiten und so jene Aufgaben zum Abschluss zu bringen. Die Zusammenstellung der so gefundenen Functionen gab das Gebäude der damaligen Functionentheorie, die gewissermassen nur das explicite Gegebene zu behandeln verstand. Trotz der Bezeichnung als höhere Analysis könnte man das damalige Verfahren ein synthetisches nennen. Schon der Begriff des Imaginären und der complexen Zahl z. B. entsprang lediglich der Aufgabe, eine algebraische Gleichung, z. B. die des zweiten Grades, allgemein aufzulösen. Dieses zufällige Auftreten aber war weit davon entfernt, eine tiefere mathematische Begründung für die Nothwendigkeit gerade dieser Complexen herzugeben. Aehnlich entsprang der Begriff des elliptischen Integrals lediglich gewissen geometrischen Aufgaben. Infolge mangelhafter Begründung konnte die damalige Richtung nichts Rechtes mit diesen Ausdrücken erreichen.

Ganz anders ging Cauchy vor. Zwar nahm er die complexen Grössen so an, wie er sie eben vorfand, aber er betrachtete sie nicht als Ausnahme, sondern als das Allgemeinere. Er sah sich genöthigt, zunächst die sämmtlichen Rechenoperationen und die Reihenlehre unter Zugrundelegung der complexen Zahlen entsprechend zu erweitern und die Functionenlehre ganz allgemein auf das Princip der neu zu definirenden Stetigkeit zu gründen, wobei die Function behandelt werden konnte, ohne dass ein fertiger Ausdruck für dieselbe vorlag. So wurden Untersuchungen allgemeiner Art für die bestimmten Integrale von Functionen complexen Arguments, die ebenfalls neu zu definiren waren, ermöglicht, und es konnten nicht nur Functionen untersucht werden, die durch Systeme von algebraischen Gleichungen oder Differentialgleichungen bestimmt, sondern auch solche, die durch irgendwelche Functionalgleichungen definirt waren. Die Aufgabe, die Function selbst zu formuliren, war gewissermassen das Gegentheil der früheren, aus dem gegebenen arithmetischen Ausdrucke ihre Eigenschaften abzuleiten. Insofern konnte man erst hier von einem wirklich analytischen Verfahren sprechen. Die Methode selbst machte jedoch reichen Gebrauch von geometrischen Anschauungen, die besonders durch den Gedanken Riemann's, durch übereinanderliegende Blätter die Vieldeutigkeit zu veranschaulichen und sie in eine Eindeutigkeit des Ortes zu verwandeln, an Klarheit und Durchsichtigkeit gewannen. So gross nun auch der Fortschritt war, die innere Nothwendigkeit des Lehrgebäudes reichte noch nicht hin und die Strenge liess gleichfalls zu wünschen übrig, besonders da, wo geometrische Hilfsmittel herangezogen waren.

Die dritte Periode darf mit Fug und Recht als die Weierstrass'sche bezeichnet werden. Ihre Principien mögen jetzt im Anschluss an das Biermann'sche Werk für die Nichtkenner der neuen Methoden auseinandergesetzt werden, was für Kenner nicht nothwendig sein würde.

Die Addition und Multiplication mit ganzen positiven Zahlen weisen gewisse Verknüpfungsgesetze auf, das commutative, associative und distributive. Die inversen Operationen, das Subtrahiren und Dividiren veranlassen die Einführung der negativen und gebrochenen Zahlen. Für diese wird willkürlich verlangt, dass jene Verknüpfungsgesetze weiter bestehen sollen. Die Zulässigkeit dieser Forderung muss dadurch nachgewiesen werden, dass gezeigt wird, dass innere Widersprüche nicht entstehen. Dass die Forderung nicht eine nothwendige ist, kann nicht genug hervorgehoben werden. An das nun folgende Gesetz der Potenzirung schliesst sich die Darstellung der rationalen Zahlen an, die durch eine endliche Anzahl von Potenzen einer gegebenen Grundzahl oder durch eine unendliche Reihe von Potenzen, die jedoch periodisch sein muss, gegeben werden. Die naturgemässe Frage nach dem Falle der nicht periodischen unendlichen Reihe führt mit Nothwendigkeit auf die Irrationalzahlen. Die Möglichkeit der Rechenoperationen mit solchen Zahlen muss auf das Strengste nachgewiesen werden, was mit Convergenzuntersuchungen für Reihen zusammenhängt. Bei der Untersuchung, ob die Verknüpfungsgesetze bestehen bleiben, zwingt schon die Subtraction dazu, solche Zahlenreihen, bei denen die Anordnung der Glieder von Einfluss auf die Summe ist, auszuschliessen. Für alle übrigen Irrationalzahlen ist die Berechtigung der Einführung in die beabsichtigte Functionenlehre nachgewiesen.

Die bei gewissen Aufgaben zufällig eintretende Nothwendigkeit der Einführung complexer Zahlen veranlasst nun folgende Untersuchung. Man bilde ganz willkürliche complexe Zahlen und frage sich, wie sie beschaffen sein müssen, damit die früheren Rechenoperationen möglich seien und die früheren Verknüpfungsgesetze bestehen bleiben. Bei Complexen zweiter Ordnung führen die entstehenden Bedingungsgleichungen mit Nothwendigkeit auf die Form $x+y\sqrt{-1}$. Complexe höherer Ordnung führen nicht auf eine fernere Erweiterung der Analysis, sind also überflüssig. Das Biermann'sche Buch verzichtet auf diesen letzteren Nachweis und verweist auf die Originalabhandlungen.

Die Forderung, die Verknüpfungsgesetze beizubehalten, ist wiederum keine nothwendige, sondern eine willkürliche. Es sind in der That Zahlen denkbar, die nicht allen Verknüpfungsgesetzen gehorchen, wie z. B. die Quaternionen, deren Wichtigkeit für gewisse Untersuchungen nicht bestritten wird. Solche Zahlen aber werden aus der beabsichtigten Functionenlehre ausgeschlossen.

Damit ist das Gebiet der Zahlen und Zahlenreihen, mit denen sich die Weierstrass'sche Functionentheorie beschäftigen will, genau abgegrenzt.

Ganz analoge Betrachtungen werden uns über diejenigen Functionen aufklären, mit denen das Lehrgebäude sich befassen soll.

Capitel II des Werkes definirt zunächst den Begriff der stetig veränderlichen Grösse und der Umgebung eines Werthes, sowohl für die n-fache, wie für die $2n$-fache Mannichfaltigkeit. Die Theorie der Punktmengen und ihrer Häufungsstellen wird gegeben und im Anschluss an diese scharfsinnigen Untersuchungen der Begriff des Maximums, das Minimums und der Stetigkeit einer Function festgestellt. Daran schliesst sich die Theorie der ganzen rationalen Function einer Variabelen, ihre Zerlegbarkeit in Primfactoren, ihre Darstellung aus gegebenen Werthen, die Interpolationsformel von Lagrange, der binomische Satz und die Theoreme von Taylor und Mac Laurin für den Bereich der behandelten Functionen. Die Stetigkeit der letzteren wird bewiesen, d. h. das Nichtvorhandensein endlicher Sprünge, die Continuität aber, d. h. das Annehmen aller Werthe in der Umgebung einer Stelle, bleibt vorläufig unbewiesen; es wird aber wenigstens gezeigt, dass der absolute Betrag der Function zu beliebiger Höhe getrieben werden kann, ferner, dass es in der Umgebung jedes Werthes andere mit kleinerem absoluten Betrage giebt, so dass der letztere beliebig der Null genähert werden kann. Dass der Nullpunkt wirklich erreicht wird, bleibt vorläufig unbewiesen, da die Continuität noch zweifelhaft ist. Die sämmtlichen vorstehenden Resultate dieses Capitels stehen also unter der unbewiesenen

Voraussetzung, dass die ganze rationale Function mindestens eine Wurzel habe. Es wird angedeutet, dass der Beweis schon hier möglich sei, aber leider wird er noch nicht geführt. Jedenfalls aber wird durch diese Lücke der kunstvolle Aufbau der Theorie gestört. Für eine zweite Auflage wäre zu wünschen, dass dem abgeholfen würde, selbst wenn die Einschaltung grösseren Raum beanspruchen sollte.

Das Kapitel schliesst mit Sätzen über symmetrische Functionen der Wurzeln und der Potenzen der Wurzeln, an die sich die Darstellung gebrochener rationaler Functionen in Partialbrüchen anschliesst. Auch Bemerkungen über den Fall mehrerer Variabelen werden gemacht.

Capitel III untersucht unendliche Summen rationaler (ganzer und gebrochener) Functionen. Wie also die rationalen Zahlen benutzt wurden, um durch Addition unendlich vieler Elemente die allgemeineren irrationalen Zahlen zu definiren, so sollen jetzt neue Functionen, die transscendenten, durch Summirung unendlich vieler rationaler Functionen entstehen.

Damit eine solche Summe $F(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} f_\nu(x)$ der mathematischen Behandlung überhaupt zugänglich sei, muss man voraussetzen, dass sie irgendwo einen, wenn auch noch so kleinen Convergenzbereich habe, womit über die Stetigkeit in demselben durchaus noch nichts behauptet ist. Die Convergenz wird nun derart beschränkt, dass die Function in dem Bereiche ganz ebenso stetig sein soll, wie eine rationale Function, was den Begriff der gleichmässigen Convergenz giebt. Die nöthigen Bedingungen und Criterien dafür werden abgeleitet und die kreisförmigen oder ringförmigen Convergenzbereiche festgestellt.

An diese Behandlung unendlicher Potenzreihen schliesst sich die der Summen unendlich vieler Potenzreihen, für die wiederum irgend ein gemeinschaftlicher Convergenzbereich vorausgesetzt werden muss, damit sie der Behandlung fähig seien. Es wird bewiesen, dass die früheren Rechenoperationen und Verknüpfungsgesetze auch für diese neuen Functionen Geltung behalten.

Die Ableitungen convergenter Potenzreihen sind convergent; und daher lässt sich zeigen, dass die Theoreme von Mac Laurin und Taylor auch für diese Reihen Geltung behalten. Demnach lässt sich aus einer primitiven Reihe $\mathfrak{P}(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu x^\nu$ eine neue Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-a)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c'_\nu (x-a)^\nu$ ableiten, aus dieser wieder eine andere und so fort. Die n^{te} so abgeleitete Reihe lässt sich dann auch direct aus der primitiven ableiten, und beide haben innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbereichs überall gleiche Werthe.

Besitzen umgekehrt zwei Reihen $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\mathfrak{P}_1(x-b)$ gemeinschaftlichen Convergenzbereichs an unendlich vielen Stellen der Umgebung eines dortigen Punktes dieselben Werthe, so lassen sich die Reihen in obiger Weise auseinander ableiten.

Unter einer monogenen analytischen Function versteht nun Weierstrass die Gesammtheit der aus einer gegebenen Potenzreihe ableitbaren und ineinander fortsetzbaren Potenzreihen. Die Untersuchung solcher Functionen ist die Aufgabe seiner Functionenlehre.

Durch ein Element, d. h. durch eine dieser Reihen, ist die analytische Function vollständig bestimmt. Führt die Fortsetzung von x nach x_1 auf verschiedenen Wegen stets zu demselben Werthe, so ist die Function eindeutig, sonst ist sie vieldeutig. Die Gesammtheit der Fortsetzungsbereiche, in denen das Verhalten regulär bleibt, heisst der Stetigkeitsbereich. Derselbe ist begrenzt, da jedes Element auf der Grenze seines Convergenzbereiches mindestens eine singuläre Stelle haben muss. Eine solche Stelle heisst wesentlich singulär oder ausserwesentlich singulär, je nachdem $(x-x_0)^n f(x)$ für irgend ein ganzzahliges n bei $x-x_0$ endlich und reguläre Function bleibt, oder ob es kein solches n giebt. In der Umgebung ausserwesentlicher Stellen kann die Function noch als Potenzreihe dargestellt werden; bei wesentlichen Stellen hingegen nicht, denn dort bleibt der Functionswerth ganz unbestimmt. Functionen ohne wesentliche Singularitäten heissen nun rationale Functionen, solche mit wesentlichen Stellen heissen transscendente.

Der Quotient rationaler Functionen giebt eine recurrente Potenzreihe, umgekehrt stellen solche Reihen stets rationale Functionen dar. (Vergl. das Verhalten der Rationalzahlen.) Die Summe unendlich vieler rationaler Functionen ist eine eindeutige analytische Function, wenn für die ersteren ein gleichmässiger Convergenzbereich existirt. Die ganzen eindeutigen Functionen sind rational oder transscendent, je nachdem die Stelle $x=\infty$ ausserwesentlich oder wesentlich singulär ist.

Der Quotient zweier beständig convergirender Potenzreihen giebt im Allgemeinen wieder eine solche, jedoch mit Null- und Unendlichkeitsstellen. Dabei kann die Existenz mindestens einer Wurzel für die ganze rationale Function bewiesen werden.

Eine Untersuchung über endlich vieldeutige Functionen, wobei der Begriff des Zweiges klargestellt wird, beschliesst den Abschnitt. Eine n-deutige Function ist stets die Lösung einer algebraischen Gleichung mit eindeutigen Coefficienten. Jede Ableitung der monogenen analytischen Function ist wieder eine solche. — Analoge Sätze über den Fall mehrerer Variabelen beschliessen das Capitel III.

Cap. IV handelt von dem Umfange des Begriffes der analytischen Function. Zwei Hauptaufgaben der Functionentheorie werden unterschieden:

Erstens wird zwischen veränderlichen Grössen irgend ein arithmetischer Zusammenhang gegeben, z. B. durch eine algebraische Gleichung oder eine Differentialgleichung. Es soll untersucht werden, ob die so definirte Function eine analytische ist, also in einem gewissen Bereiche als convergente Potenzreihe darstellbar ist.

Zweitens werden irgendwelche Eigenschaften gegeben, z. B. eine Gleichung wie $f(x+y) = f(x)f(y)$, und es soll untersucht werden, ob eine denselben genügende analytische Function existirt, die also in einem noch so kleinen Bereiche als convergente Potenzreihe darstellbar ist. Diese primitive Reihe, deren Coefficienten mit Hilfe der vorgegebenen Eigenschaft zu bestimmen sind, ist fortzusetzen und für den gesammten Stetigkeitsbereich des analytischen Gebildes ist das Fortgelten der gegebenen Eigenschaft nachzuweisen.

Das vorliegende Capitel behandelt die erste dieser Fragen und giebt den arithmetischen Zusammenhang erst durch algebraische Gleichungen, sodann durch Differentialgleichungen, und zwar in voller Allgemeinheit, die dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten wird.

Zunächst wird y definirt durch die algebraische Gleichung m^{ten} Grades

$$F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$= y^m \psi_0(x_1, x_4, \ldots, x_n) + y^{m-1}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \psi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

wo die ψ eindeutige algebraische Functionen mit gemeinsamem Stetigkeitsbereiche sind. Letzteres wird angenommen, um die Stetigkeit von y zu ermöglichen. Innerhalb des Bereiches ändern sich die Wurzeln stetig mit den Coefficienten, d. h. eben y ist dort eine stetige Function und zwar eine m-deutige. Nur muss man die Stellen vermeiden, wo der Coefficient der höchsten Potenz y^m verschwindet. Dort ist die Darstellung als convergente Potenzreihe unmöglich.

Dies gestattet ein leichtes Orientiren über die Unstetigkeitsstellen der durch

$$G(y, x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{\mu=0}^{\mu=m} y^{m-\mu} f_\mu(x_1\, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

definirten Function y, wo die Coefficienten f ganze rationale Functionen sind, was durch G angedeutet wird. Sind dann die f von gemeinsamen Theilern befreit, so sind die im Endlichen liegenden Nullstellen des Coefficienten von y^m, d. h. der Function f_v, die Unstetigkeitsstellen der Function y. Ferner wird selbstverständlich G als irreductibel vorausgesetzt.

Existirt nun für die Stelle, $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ eine endliche Wurzel $y = b$, so ist nach dem Früheren

$$G(y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\partial G}{\partial y}\,\frac{y-b}{1!} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\,\frac{(y-b)^2}{2!} + \cdots + \frac{\partial^m G}{\partial y^m}\,\frac{(y-b)^m}{n!}.$$

Um nachzuweisen, dass y analytische Function sei, sind die Nullstellen von f_μ und die der Discriminante von G auszuschliessen. Die Nullstellen von f_μ lassen sich aber, wie auf zwei Arten gezeigt wird, in Summen rationaler Functionen der Coefficienten entwickeln, und jetzt kann man nach der Methode der unbestimmten Coefficienten oder mit Hilfe der Ableitungen y

in der Nähe einer regulären Stelle durch eine bestimmte Potenzreihe darstellen, die nun die Gleichung $G=0$ identisch erfüllt. An Beispielen wird der Entwickelungsgang verdeutlicht. Die Frage der Continuität der ganzen rationalen Function, die früher leider unbewiesen blieb, wird bei dieser Gelegenheit erledigt, jedenfalls etwas spät.

In § 39 wird die algebraische Gleichung $G(y, x)=0$ unter der Voraussetzung behandelt, dass an der Stelle $y=b$, $x=a$ gewisse Differentialquotienten verschwinden. Die Entwickelung von y erhält die Gestalt

$$y=b+(x-a)^{\mu}\,\mathfrak{P}_1(x\,|\,\alpha),$$

die von x dagegen

$$x=a+(y-b)^{\lambda}\,\mathfrak{P}_2(y\,|\,\beta).$$

Jede lässt sich unendlichfach transformiren, so dass ein Element des algebraischen Gebildes durch unendlich viele Paare von Potenzreihen dargestellt werden kann.

Unter Voraussetzung weiterer Schwierigkeiten wird die Entwickelung in der Umgebung singulärer Punkte versucht. Schliesslich ergiebt sich an jeder Stelle die Möglichkeit der Darstellung von x oder y durch ein oder mehrere Reihenpaare.

Mit der Transformation der algebraischen Gleichungen und dem Nachweise der Monogeneität der definirten algebraischen Function wird die gestellte Aufgabe als erledigt betrachtet.

An zweiter Stelle sollte die Definition durch eine Differentialgleichung geschehen. Zunächst wird nur eine unabhängige Variabele x angenommen und durch folgende Gleichung definirt:

$$F_{\nu}\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m_1}x_1}{dx^{m_1}}, \ldots, \frac{dx_n}{dx}, \frac{d^2x_n}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{m_n}x_n}{dx^{m_n}}\right)=0.$$

Durch Elimination gehe aus den zugehörigen Differentialgleichungen erster Ordnung die Gleichung

$$G_{\nu}\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{dx_{\nu}}{dx}\right)=0$$

hervor. Für diese ergiebt sich schliesslich die Möglichkeit, x als analytische Function zu entwickeln, was nur mit grösserem Formelaufwand verfolgt werden kann. Auch für die partiellen Differentialgleichungen werden die entsprechenden Untersuchungen durchgeführt.

Nach diesen schwierigeren und allgemeinen Untersuchungen, denen nicht jeder Anfänger folgen können wird, tritt eine Art von Ruhepunkt ein. Es handelt sich nämlich in Cap. V um die zweite der obigen Aufgaben der Functionentheorie auf einem leichteren Gebiete, um die Entwickelung der elementaren transscendenten Functionen aus vorgegebenen Eigenschaften. Die zu suchende Potenzreihe wird also formell hingeschrieben, dann werden die Coefficienten aus der gegebenen Eigenschaft bestimmt. Dieses Gebiet ist durch Universitätsvorlesungen allgemein bekannt geworden.

Aus $f(z_1)f(z_2)=f(z_1+z_2)$ ergiebt sich die Exponentialfunction e^z, die sich an jeder endlichen Stelle als Potenzreihe entwickeln lässt. Es folgen die aus der Exponentialfunction rational gebildeten eindeutigen Functionen, die stets einer algebraischen Gleichung $G\,[f(x+y), f(x), f(y)]=0$ genügen, also ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Beispielsweise ergiebt sich die Entwickelung der trigonometrischen Functionen in Reihen. Als gemeinsame Haupteigenschaft der gefundenen Functionen stellt sich ihre Periodicität heraus.

Als zweites Beispiel wird die Eigenschaft $f(x)+f(y)=f(xy)$ hingestellt, aus der sich der Logarithmus ergiebt.

Aus der Gleichung $f(x)\,f(y)=f(xy)$ ergiebt sich die allgemeine Potenz. Von hier aus lassen sich die Umkehrungen der trigonometrischen Functionen behandeln. Des Späteren halber wird auch der Entwickelung des Cosinus und Sinus ganzzahliger Vielfachen des Arguments gedacht. Anhangsweise wird noch die Gauss'sche hypergeometrische Reihe behandelt, die alle bis jetzt behandelten transscendenten Functionen umfasst.

Capitel VI umfasst eine dritte Aufgabe der Functionentheorie, die Bestimmung der analytischen Function aus vorgegebenen singulären Stellen, eine Aufgabe, deren charakteristische Bedeutung darin gefunden wird, dass sie zwischen dem Euler'schen und Cauchy'schen Functionsbegriffe vermittelt.

In § 50 handelt es sich um die Beantwortung dieser Frage für die ganze transscendente Function. Die Grundlage bildet die Darstellung einer ganzen Function mit unendlich vielen Nullstellen als Product von Factoren, deren jeder nur an einer Stelle verschwindet. Die Convergenzbedingungen für unendliche Producte gelangen zunächst zur Darstellung. Unter entsprechenden Bedingungen stellt jedes solche Product in einem gewissen Bereiche eine analytische Function dar, die dort stetig ist.

Um was es sich bei der Construction einer Function mit gegebenen Nullstellen eigentlich handelt, wird an einem Beispiele dargelegt, bei dem die Nullstellen $-1, -2, -3, \ldots$ gegeben sind, d. h. an der Function

$$\psi(nx)=\frac{1}{n^x}\prod_{\nu=1}^{\nu=n}\left(1+\frac{x}{n}\right) \quad \text{für} \quad n=\infty,$$

die sich als

$$F(x)=\prod_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-x\,Log\frac{\nu+1}{\nu}} \quad \text{oder} \quad e^{cx}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}$$

schreiben lässt, wo c eine näher zu bestimmende Grösse, die sogenannte Mascheroni'sche Constante ist. Die Function selbst heisst die Factorielle von x.

Dieses Beispiel bringt auf die Vermuthung, dass die ganze transscendente Function mit unendlich vielen Nullstellen a_ν der obigen Beschaffenheit stets als convergentes unendliches Product ganzer transscendenter Functionen darstellbar sei, deren jede nur eine einzige Nullstelle besitzt. Diese letzteren Functionen heissen Primfunctionen, weil sie den Primfactoren der rationalen Function entsprechen. Ihre Form ist

$$\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{g_\nu(x)},$$

wo g eine ganze Function bedeutet.

Nach Untersuchung der Convergenzbedingungen ergiebt sich als Resultat, dass eine ganze transscendente Function, je nachdem sie keine, oder unendlich viele Nullstellen besitzt, durch $e^{g(x)}$ oder durch $x^{n_0}\prod_{\nu=1}^{\nu=n}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{n_\nu}e^{g(x)}$, oder endlich durch

$$x^{n_0}\prod_{\nu=1}^{\infty}E^{n_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu},\ m_\nu\right)e^{g(x)}$$

dargestellt werden kann, wo

$$E\left(\frac{x}{a_\nu},\ m_\nu\right)=e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_\nu+\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu+\mu}}$$

ist. Die übrig bleibende Willkürlichkeit liegt in der Wahl der Constanten $C=e^{g(0)}$ und gewissermassen in der rationalen Funktion $g_\nu(x)$.

Das Product lässt sich stets durch eine Potenzreihe ersetzen, so dass jede ganze transscendente Function mit vorgeschriebenen Nullstellen sich als analytische Function darstellen lässt.

Führt man als Nullstellen die der trigonometrischen Functionen ein, so erhält man die Darstellung derselben in Form unendlicher Producte, z. B.:

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)e^{-\frac{x}{\nu}}=\pi x\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

Durch Vergleich mit der Summenentwickelung findet man Formeln für die ganzzahligen Potenzen von π, die mit den Bernoulli'schen Zahlen zusammenhängen. Auch die Formeln für Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen des Arguments werden entwickelt, und zwar als Producte einer endlichen Anzahl von *sin*- und *cos*-Functionen.

In § 52 wird die Weierstrass'sche σ-Function behandelt. Dieselbe entspringt der Aufgabe, eine Function der obigen Art $G_0(x)$ darzustellen, welche die ∞ vielen Nullstellen

$$w=2\mu w+2\mu' w'$$

besitzt, wo w und w' so beschaffen sind, dass in einem endlichen Bereiche der Variabelen x nicht ∞ viele Nullstellen liegen. Es zeigt sich, dass die Perioden w und w' nicht unendlich klein sein dürfen, und dass ihr Verhältniss rein imaginär sein muss. Die Untersuchung führt auf das doppelt unendliche Product

$$\sigma(x) = x \prod_{(\mu, \mu')} \left(1 - \frac{x}{w}\right) e^{\frac{x}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{w}\right)^2},$$

welches selbst noch nicht doppeltperiodisch ist, sich aber um einen Exponentialfactor ändert, sobald sich das Argument um eine Periode ändert. Für diese Function existiren die Formeln

$$1)\qquad \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{\mu, \mu'} \frac{x^2}{w^2 (x - w)},$$

$$2)\qquad -\frac{d^2 \lg \sigma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_{\mu, \mu'} \left(\frac{x^2}{(x - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right),$$

$$3)\qquad \frac{-d^3 \lg \sigma(x)}{dx^3} = -2 \sum \frac{1}{(x - w)^3}.$$

Diese Functionen sind analytische, die im Endlichen die einfach, zweifach oder dreifach ausserwesentlich singulären Stellen w besitzen, deren Häufungsstelle $x = \infty$ ist. Nur die zweite und dritte dieser Functionen sind doppeltperiodische.

Das einfach unendliche Product für σ ergiebt sich als

$$\sigma(x) = \frac{2w}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2w}\right) e^{\frac{\eta x^2}{2w}} \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2w}\right)}{\sin^2\left(\pi \frac{\mu' w'}{w}\right)}\right),$$

wo die Constante $\eta = \frac{\sigma'(w)}{\sigma(w)}$ ist.

Die Aehnlichkeit dieser Formel mit

$$\sin \frac{\pi x}{2w} = \frac{\pi x}{2w} \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(1 - \frac{\left(\frac{\pi x}{2w}\right)^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

bringt auf die Vermuthung, $\sin \frac{\pi x}{2w}$ aus $\sigma(x)$ abzuleiten, sobald man nur w' einen besonderen Werth beilegt, eine Vermuthung, die sich bestätigt.

Mit § 53 beginnen wiederum allgemeinere Betrachtungen, die den Laurent'schen Satz ergeben, nach dem jede eindeutige analytische Function, die in der Umgebung jeder Stelle x_0 eines um den Punkt $x = c$ gelegten ringförmigen Gebietes, wo $R_1 < |x - c| < R_2$ ist, regulären Verhaltens bleibt, daselbst einheitlich durch eine nach Potenzen von $(x - c)$ fortschreitende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x - c) + \frac{1}{x - c} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x - c}\right)$$

dargestellt werden kann.

In § 54 handelt es sich um die Aufgabe, eine eindeutige analytische Function mit unendlich vielen vorgegebenen singulären Stellen, die eine Grenzstelle haben, als Summe solcher Functionen darzustellen, deren jede ausser an einer Häufungsstelle nur an einer der gegebenen Stellen irregulären Verhaltens ist.

Mit Hilfe des Mittag-Leffler'schen Theorems wird die Aufgabe gelöst und die Function bis auf eine ganze Function $G\left(\frac{1}{x-b}\right)$ bestimmt, auch für den Fall, dass die Stellen a wesentlich singuläre sind.

Als Beispiel wird die Entwickelung von

$$p(x) = \frac{d^2 \lg \sigma(x)}{dx^2}$$

und von $\pi \sec \pi x$ als Summe von Functionen durchgeführt.

Nach einer Erweiterung des genannten Theorems kommt die Frage zur Untersuchung, ob ein und derselbe Ausdruck in verschiedenen Bereichen seiner gleichmässigen Convergenz verschiedene Functionen vollständig oder nur theilweise darstellen kann, oder ob er in manchen Bereichen Functionen vollständig und in anderen nur theilweise darstellt.

Die Untersuchung ergiebt, dass der Begriff der monogenen Function mit dem Begriff einer durch Grössenoperationen ausdrückbaren Abhängigkeit nicht vollständig zusammenfällt. Die Identität zweier Ausdrücke, deren Bereich gleichmässiger Convergenz aus verschiedenen Continuis besteht, ist also erst dann erwiesen, wenn man die Identität der verschiedenen Functionen, welche sie darstellen, erkannt hat.

In § 57 wird noch die Darstellung von analytischen eindeutigen Functionen durch den Quotienten unendlicher Producte von Primfactoren auf den Fall ausgedehnt, dass die eindeutige monogene Function ∞ viele wesentlich singuläre Stellen besitzt. Mit dieser Abschluss gebenden Untersuchung werden die allgemeinen Beobachtungen beendigt und die Ermittelung bestimmter analytischer Functionen von gegebenen Eigenschaften beginnt von Neuem.

Capitel VII giebt die Weierstrass'sche Theorie der doppeltperiodischen Functionen. Nach Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Perioden und nach Feststellung des Satzes, dass es keine drei- und mehrfach periodischen eindeutigen Functionen geben kann, wird die Aufgabe dahin beschränkt, nur solche eindeutige doppeltperiodische Functionen zu behandeln, die sich im Endlichen durchaus wie rationale Functionen verhalten und somit ein und denselben Werth in einem Periodenparallelogramm nur endlich oft annehmen können. Die ganze Zahl, welche angiebt, wie oft derselbe Werth in jedem Parallelogramm angenommen wird, heisst der Grad der doppeltperiodischen Function. Es soll nun eine solche Function m^{ten} Grades mit den Unendlichkeitsstellen

$$u_\mu + w \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und den Nullstellen

$$v_\nu + w \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

construirt werden. Aus dem allgemein dafür zu setzenden Ausdrucke ergiebt sich zunächst, dass $n = m$ sein muss, und endlich ergiebt sich

$$\varphi(u) = c \prod_{\mu=1}^{m} \frac{\sigma(u - u_\mu)}{\sigma(u - v_\mu)} e^{2\eta u},$$

wo c und η näher zu bestimmen sind.

Zu § 59 wird eine neue Definition der oben behandelten Function

$$p(u) = -\frac{d^2 \lg \sigma(u)}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum_{\mu, \mu'} \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

gegeben, nämlich

$$p(u) = p(u_1) - \frac{\sigma(u + u_1)\, \sigma(u - u_1)}{\sigma^2(u)\, \sigma^2(u_1)}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich zahlreiche Beziehungen zwischen den p und ihren Ableitungen einerseits und den σ und ihren Ableitungen andererseits, ebenso zwischen den p und p'. Schliesslich folgt der allgemeine Satz, dass jede zu einem Periodenpaare $(2w, 2w')$ gehörige eindeutige doppeltperiodische Function $\varphi(u)$, die im Endlichen den Charakter einer rationalen Function besitzt, sich rational durch die zu demselben Periodenpaare gehörige Function $p(u)$ und deren erste Ableitung $p'(u)$ ausdrücken lässt.

In § 61 handelt es sich darum, die Differentialgleichung für die doppeltperiodische Function 2ten Grades aufzustellen, womit eine weitere Definition gewonnen wird, in § 62 um das algebraische Additionstheorem für $p(u)$ und für jede doppeltperiodische Function mit der einzigen wesentlich singulären Stelle $u = \infty$, welches also stets in der Form

$$G[\varphi(u + v), \varphi(u), \varphi(v)] = 0$$

geschrieben werden kann, während umgekehrt

$$\varphi(u + v) = R_1[p(u), p(v), p'(u), p'(v)] = R[\varphi(u), \varphi(v), \varphi'(u), \varphi'(v)]$$

ist, wo R eine rationale Function bedeutet.

Ist ferner eine doppeltperiodische Function $x = p(u)$ durch die früher entwickelte Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

definirt, so lassen sich ihre Perioden ermitteln, und zwar in Gestalt der Integrale

$$w_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}\,\sqrt{\xi + e_1 - e_2}\,\sqrt{\xi + e_1 - e_3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^1 \frac{d\xi_{12}}{\sqrt{1 - \xi_{12}^2}\,\sqrt{1 - \varkappa^2 \xi_{12}^2}} = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

$$w_3 = i\int\limits_{-\infty}^{e_3}\frac{dx}{\sqrt{-R(x)}} = \int\limits_{e_3}^{-\infty}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = i\int\limits_0^{\infty}\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}\sqrt{\xi+e_1-e_2}\sqrt{\xi+e_1-e_3}} \quad \text{u. s. w.}$$

Nach Entwickelung weiterer Relationen, die zu den Untersuchungen von Legendre hinüberführen, werden in § 64 eindeutige Functionen des Periodenverhältnisses untersucht. Hat man z. B. $2w_1$ und $2w_3$ als primitive Perioden der durch die obige Differentialgleichung definirten Function $x=p(u)$, die in der Umgebung von $u=0$ die Entwickelung

$$p(u) = \frac{1}{u_2} + \sum_{\nu=2}^{\infty}(2\nu-1)\,c_\nu\,u^{2\nu-2}$$

besitzt, wo

$$c_\nu = \sum_{\mu_1\mu'}\frac{1}{(2\mu w_1 + 2\mu' w_3)^{2\nu}} \quad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so bleibt c_ν ungeändert, wenn man ω und ω_3 durch

$$\tilde{\omega}_1 = p\,\omega_1 + q\,\omega_3$$
$$\tilde{\omega}_3 = p'\omega_1 + q'\omega_3$$

ersetzt, wo $pq'-p'q = \pm 1$ ist. Die Grössen c_ν lassen sich als analytische Functionen von ω_1 und ω_3 nachweisen.

Diese und ähnliche Substitutionssätze führen über zu der von Poincaré aufgestellten Theorie der Functionen mit linearen Substitutionen in sich.

Es wird nämlich ganz allgemein nach solchen eindeutigen analytischen Functionen $F(x)$ von der Beschaffenheit gefragt, dass, wenn man statt x die lineare Function $f(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$ substituirt, die Gleichung

$$F\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = F(x)$$

besteht und zwar für jeden Werth x aus dem Innern oder der Grenze des Stetigkeitsbereiches von $F(x)$.

Allerdings verzichtet der Herr Verfasser auf die Darstellung der entsprechenden Theorie; vielmehr beschränkt er sich darauf, die functionentheoretische Behandlung der Frage zu charakterisiren, wobei sich zeigt, dass der Gang dem bei den doppeltperiodischen Functionen eingeschlagenen ganz analog sein muss. An Stelle der Perioden und ihrer Beziehungen zu einander sind hier die Substitutionen selbst zu betrachten, wobei $ad-bc=1$ vorausgesetzt wird.

Es stellt sich heraus, dass die Functionen mit einer Fundamentalsubstitution die einfach periodischen, die mit zweien der doppeltperiodischen sind. In § 67 werden noch die nöthigen Andeutungen über die Functionen mit einer endlichen Anzahl von Fundamentalsubstitutionen gegeben.

Das Schlusscapitel wendet sich zu Weierstrass'schen Sätzen zurück, die von den analytischen Functionen mehrerer Variabelen handeln. Zunächst wird das Verhalten in der Umgebung der Nullstelle untersucht, sodann gezeigt, dass eindeutige Functionen, die sich überall durch den Quotienten zweier Potenzreihen darstellen lassen, rationale Functionen ihrer Argumente sind. Der Schlussparagraph handelt von dem irreductiblen algebraischen Gebilde m^{ter} Stufe im Gebiete von $n+1$ Grössen.

Damit ist der Leser bis zu den Fragen vorgeschritten, mit denen sich die massgebenden Functionentheoretiker noch heute beschäftigen, und er wird in den Stand gesetzt sein, die neuesten Untersuchungen zu verfolgen. Unter Ausscheidung alles Unwesentlichen, unter Vermeidung jedes geometrischen Beweises, ohne Benutzung z. B. der Gauss-Riemann'schen Abbildungstheorien ist er von den einfachsten arithmetischen Grundbegriffen aus zum System der complexen Zahlen und Zahlenreihen übergegangen und hat dann durch einen analogen Gang das Gebiet der rationalen Function zu dem allgemeinen Bereiche der analytischen Function erweitert.

Nirgends handelt es sich um zufälliges Auftreten neuer Begriffe, sondern überall um innere Nothwendigkeit und Consequenz des Aufbaues. Das grossartige Gebäude ist allerdings erst in den Umrissen vollendet. Das Innere bedarf noch des Ausbaues, der gruppenweise vorzunehmen sein wird. Mit diesen Functionsgruppen, die sich dem Begriffe der analytischen Function unterordnen, wird sich die mathematische Forschung noch geraume Zeit beschäftigen müssen, ebenso mit der pädagogischen Verarbeitung, die es auch dem Anfänger ermöglichen wird, sich in wenigen Jahren in dem Gesammtgebiete zu orientiren.

Steht dann das Ganze als ein architektonisches Meisterwerk vor uns, dann erst mag es gerathen erscheinen, aus dem wohlbegrenzten Gebiete der Weierstrass'schen Functionentheorie herauszugehen, um auf einem noch allgemeineren Gebiete Entdeckungen zu versuchen, die eine vierte Periode der Functionenlehre anbahnen mögen.

Vorläufig wird das Biermann'sche Buch, hoffentlich in mehrfachen Auflagen, Vielen ein werthvoller Wegweiser sein.

Hagen, den 1. Januar 1888. Dr. Gustav Holzmüller.

Die Elemente der projectivischen Geometrie, von Dr. Emil Weyr, o. ö. Professor an der k. k. Universität Wien. Zweites Heft: Theorie der Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe. Wien, 1887. Wilhelm Braumüller. (Vergl. d. J. XXX, S. 106.)

Das Inhaltsverzeichniss weist Folgendes auf:

Einleitung: Curven und Flächen. 1. Cap.: Die Curven 2. O. als Erzeugniss projectivischer Strahlenbüschel. 2. Cap.: Das eingeschriebene einfache Sechseck oder Sechsseit. 3. Cap.: Die Curven 2. Cl. als Erzeugniss projectivischer Punktreihen. 4. Cap.: Das umgeschriebene einfache Sechsseit oder Sechseck. 5. Cap.: Die Polareigenschaften der Kegelschnitte. 6. Cap.: Projectivische Punkt- und Tangentensysteme an Kegelschnitten. 7. Cap.: Gemeinschaftliche Elemente zweier Kegelschnitte. 8. Cap.: Die Durchmesser und Axen der Kegelschnitte. 9. Cap.: Die Brennpunkte der Kegelschnitte.

In der Einleitung werden die verschiedenen Entstehungsarten der Curven und Flächen, sowie die Definitionen von Tangente, Berührungspunkt, Tangentialebene gegeben; dann auch die Begriffe von Ordnung, Classe, Rang der Gebilde erläutert. Das anfängliche Hereinziehen von Flächen, welche den Raum als Grundgebilde dritter Stufe voraussetzen, in den Rahmen des vorliegenden Heftes ist unnöthig, da später doch nur von ebenen Curven die Rede ist, es stört sogar zuweilen, wie bei der Einführung von „Rang“ und „Classe“ (S. 21). Es erscheint unstatthaft, die „Geometrie der ebenen Curven“ mit dem Theile der Raumgeometrie, welcher die ebenen Curven betrifft, zu verquicken. Mit der Definition der Tangente (S. 2) kann sich Ref. nicht einverstanden erklären. Nach dem dort Gesagten muss der Anfänger zu der Ansicht kommen, dass auf der Tangente drei Curvenpunkte liegen.

Der Inhalt der beiden ersten Capitel steht dem des dritten und vierten dual gegenüber. Die verschiedenen Modificationen, welche die Pascal- und Brianchon'schen Figuren infolge Auftretens unendlich ferner Elemente erleiden, werden ausführlich behandelt. Der allgemeine Inhalt gipfelt in dem Nachweise der Identität der Curven 2. O. und 2. Cl. Auch das fünfte, achte und neunte Capitel stehen im engen Zusammenhang. Während im erstgenannten wesentlich allgemeine Polareigenschaften zur Sprache kommen, enthalten die beiden letzten die in den Ueberschriften bezeichneten Gegenstände als specielle Polarengebilde. Das siebente Capitel enthält neben den Constructionen der Schnittpunkte zweier Curven 2. O., wobei mindestens zwei dieser Punkte als gegeben betrachtet werden, auch den analytisch geführten Nachweis, dass die Anzahl aller Punkte 4 ist. Conjugirt imaginäre Punkte und Tangenten werden in Betracht gezogen und Constructionen von Kegelschnitten, deren Bestimmungsstücke zum Theil imaginäre sind, durchgeführt. Ausserdem findet die Theorie der Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaaren, soweit dieselbe in Beziehung zum Desargues'schen Satze steht, ihre Erledigung.

Was bei der Besprechung des ersten Heftes Lobendes über die Abfassung des Werkes gesagt wurde, kann unverändert auf das vorliegende übertragen werden.

Hannover. C. Rodenberg.

Sammlung von Maturitätsfragen aus der darstellenden Geometrie. Nach den officiellen Jahresberichten der öffentlichen Realschulen Oesterreichs zusammengestellt von Joachim Steiner. Wien 1887. In Commission bei Alfred Hölder.

Der Verfasser hat sich die Mühe gegeben, alle Aufgaben, welche in der bezeichneten Disciplin an 56 Lehranstalten in einer Reihe von Jahren gegeben worden sind, neben einander aufzuführen. Eine und dieselbe Aufgabe tritt demgemäss zuweilen mehrfach auf, der Verfasser findet darin einen Maassstab für ihre Wichtigkeit. Allen Lehrern, die das Bedürfniss empfinden, ihren Aufgabenvorrath zu ergänzen, wird das Buch willkommen sein. Mitgetheilt sind Aufgaben aus der Orthogonalprojection und Perspective; die Axonometrie scheint demnach nicht an genannten Lehranstalten getrieben zu werden.

Hannover. C. Rodenberg.

Synthetisch-geometrische Theorie der Krümmung von Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Von Dr. Carl Cranz, Privatdocent an der polytechnischen Schule in Stuttgart. Stuttgurt, J. B. Metzler'sche Buchhandlung. 1886.

Der Verfasser stellt sich laut Vorrede die Aufgabe, „die wichtigsten Beziehungen der Krümmung von Curven und Flächen zweiter Ordnung auf Grund der projectivischen Geometrie, ohne Zuhilfenahme von analytischen und kinematischen Betrachtungen, in einfacher Weise darzulegen". — Man muss sagen, dass ihm die Lösung dieser Aufgabe geglückt ist. Der Stoff ist derart vorgetragen, dass das Buch von Jedem, welcher einigermassen die Elemente der projectivischen Geometrie inne hat, leicht gelesen werden kann.

In einer einleitenden Betrachtung über das Wesen der Krümmung einer Curve wird der Krümmungskreis auf zwei verschiedene Arten definirt, je nachdem die Curve als Punkt oder Geradenort gegeben ist, und dann wird bewiesen, dass beide Definitionen denselben Kreis enthalten. Das natürliche Mittel zu allen Constructionen der Ebene ist die collineare Beziehung zwischen dem gegebenen Kegelschnitte und dem Krümmungskreise in einem seiner Punkte. Zunächst wird der Steiner'sche Satz und die von Pelz gegebene allgemeine Auffassung der Steiner'schen Parabel begründet. Aus diesen Sätzen fliesst dann eine grosse Reihe von bekannten Constructionen, die alle als Beispiele zu dem allgemeinen Verfahren erscheinen. Der Krümmungstheorie der Flächen zweiter Ordnung geht eine Zusammenstellung der wichtigsten zur Anwendung kommenden Sätze über ebene Schnitte und Berührungskegel dieser Fläche voraus. An der Hand der früher für die Ebene gegebenen Constructionen werden dann die Sätze von Meusnier und Euler für Flächen zweiter Ordnung bewiesen. Daran knüpft sich eine Eintheilung der Flächen zweiter Grade nach ihrer Krümmung. Den Schluss bildet die Aufsuchung der Kreispunkte und der sie ausschneidenden Focalcurven.

Von Dingen, welche die Art der Arbeit betreffen, sei die zweckmässige Ausführung der Figuren hervorgehoben. Viele derselben sind rein schematisch gehalten, die Steiner'sche Parabel ist z. B. häufig als Kreis gezeichnet, um alle Constructionslinien anschaulich im Endlichen zu haben. Nach Gewinnung des Resultats ist dann eine Tangente, die in der Figur selbst durch die Bezeichnung „unendlich ferne Gerade" kenntlich gemacht ist, ins Unendliche zu rücken.

Hannover. C. Rodenberg.

Bibliographie

vom 1. December 1887 bis 31. Januar 1888.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1887, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissensch. 16. Bd., 2. Abth. Ebendas. 8 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe Abth. II. 96. Bd., 1. Heft. Wien, Gerold. 6 Mk. 40 Pf.

Astronomische und nautische Ephemeriden f. d. Jahr 1889. Deutsche Ausg. von F. Anton. Triest, Schimpff. 2 Mk. 70 Pf.

Jahrbuch des königl. sächs. meteorologischen Instituts. 1886. IV. Jahrg. 1. Lief. Chemnitz, Bülz. 10 Mk.

Annalen des kaiserl. russ. physikal. Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1888, 2. Thl. Meteorologische Beobachtungen. Petersburg und Leipzig, Voss. 15 Mk. 40 Pf.

Mathematische Annalen, herausgeg. v. F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. 31. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 20 Mk.

Acta mathematica, herausgeg. v. G. Mittag-Leffler. 11. Bd., 1. Heft. Berlin, Mayer & Müller. compl. 15 Mk.

Archiv der Mathematik u. Physik, begr. v. Grunert, fortges. v. R. Hoppe. 2. Reihe, 6. Thl., 1. Heft. Leipzig, Koch. compl. 10 Mk. 50 Pf.

Zeitschrift für mathem. u. naturwissenschaftl. Unterricht, herausgeg. v. J. C. V. Hoffmann. 19. Jahrg. (1888). 1. Heft. Leipzig, Teubner. compl. 12 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begr. v. Ohrtmann, fortges. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17. Bd. 1885, 1. Heft. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1888, 1. Heft. Leipzig, Barth. compl. 31 Mk.

Zeitschrift für Experimentalphysiker etc., herausgeg. v. M. Krieg. 1. Jahrg. 1888, 1. Heft. Berlin, Trenkel. compl. (12 Hefte) 6 Mk.

Zeitschrift für Instrumentenkunde, red. v. A. Westphal. 18. Jahrg. (1888), 1. Heft. Berlin, Springer. compl. 18 Mk.

Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. 7. série, tome 35, No. 8 et 9. Leipzig, Voss. 7 Mk. 80 Pf.

Connaissance des temps pour l'an 1889. Paris, Gauthier-Villars. 4 Frs.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Wohlwill, E., Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im 17. Jahrh. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 4 Mk.

Neumayer, G., Die Thätigkeit der deutschen Seewarte während der ersten 12 Jahre ihres Bestehens. Ebendas. 3 Mk.

Marie, M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. Tome XI, de Fourier à Arago. Paris, Gauthier-Villars. 6 Frs.

Tannery, P., La géométrie grecque. 1. Partie. Ebendas. 4 Fr. 50 C

Reine Mathematik.

Gauss, C. F., Allgemeine Untersuchungen über d. hypergeometrische Reihe; mit Einschluss d. nachgel. Forts. übers. v. H. Simon. Berlin, Springer. 3 Mk.

Schwartz, A., Ueber lineare partielle Differentialgleichungen II. O. (Dissert.) Tübingen, Fues. 80 Pf.

Kötter, E., Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven. (Sep.-Abdr.) Berlin, G. Reimer. 20 Mk.

Fenkner, H., Lehrbuch der Geometrie für höhere Lehranstalten. 2 Theile. (Planim., Stereom.) Braunschweig, Salle. 3 Mk. 20 Pf.

Vandermonde, N., Abhandlungen aus der reinen Mathematik, übers. v. C. Itzigsohn. Berlin, Springer. 3 Mk.

Angewandte Mathematik.

Möbius, A. F., Gesammelte Werke. 4. Bd. (hauptsächl. Mechanik, Astronomie und Optik), herausgeg. v. W. Scheibner. Mit einem Nachtrag, herausgeg. v. F. Klein. Leipzig, Hirzel. 18 Mk.

Encke, F., Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. 1. Bd.: Allgemeines betr. Rechnungsmethoden. Berlin, Dümmler. 7 Mk.

Förster, W., Studien zur Astronomie. Gesammelte Abhandlgn. Ebendas. 7 Mk.

Schönfeld, E., Bonner Sternkarten. 2. Serie, 4. Lief. (Schluss.) Bonn, Marcus. 12 Mk.

Epstein, Th., Geonomie (mathem. Geogr.). Wien, Gerold. 15 Mk.

Natanson, L., Ueber die kinetische Theorie unvollkommener Gase. Dorpat, Karow. 1 Mk. 50 Pf.

Voller, A., Die Messung hoher Potentiale mit d. Quadr.-Elektrometer. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 2 Mk.

Mascart, E., Handbuch der statischen Elektricität, deutsch von G. Wallentin. 2. Bd., 2. Abth. Wien, Pichler's W. & Sohn. 7 Mk.

Krejčí, J., Elemente der mathem. Krystallographie, herausgeg. v. F. Katzer. Leipzig, Opetz. 5 Mk.

Holzinger, F., Lehrbuch der politischen Arithmetik. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 50 Pf.

Wex, G. v., Hydrodynamik. Leipzig, Engelmann. 6 Mk.

Bibler, A., Leitfaden und Repetitorium der analytischen Mechanik. I. Thl., Statik fester Körper. Leipzig, Violet. 1 Mk. 80 Pf.

Seeliger, H., Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbes. des Saturn. (Sep.-Abdr.) München, Franz. 3 Mk. 40 Pf.

Krüss, H., Die Farbencorrection der Fernrohrobjective von Gauss u. Fraunhofer. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 2 Mk. 40 Pf.

Schultze, A., Ueber die Bewegung der Wärme in einem homogenen rechtwinkligen Parallelepiped. (Dissert.) Kiel, Lipsius & Tischer. 1 Mk. 20 Pf.

Bertrand, J., Thermodynamique. Paris, Gauthier-Villars. 10 Frs.

Physik und Meteorologie.

Boltzmann, L., Gust. Rob. Kirchhoff. Festrede. Leipzig, Barth. 1 Mk.

Budde, W., Physikalische Aufgaben f. d. Obercl. höherer Lehranst. Braunschweig, Vieweg. 2 Mk. 50 Pf.

Crookes, W., Die Genesis der Elemente. Vortrag, übers. v. A. Delisle. Ebendas. 1 Mk.

Glazebrook u. Shaw, Einführung in das physikalische Praktikum. Deutsch v. W. Schlosser. Leipzig, Quandt & Händel. 7 Mk. 50 Pf.

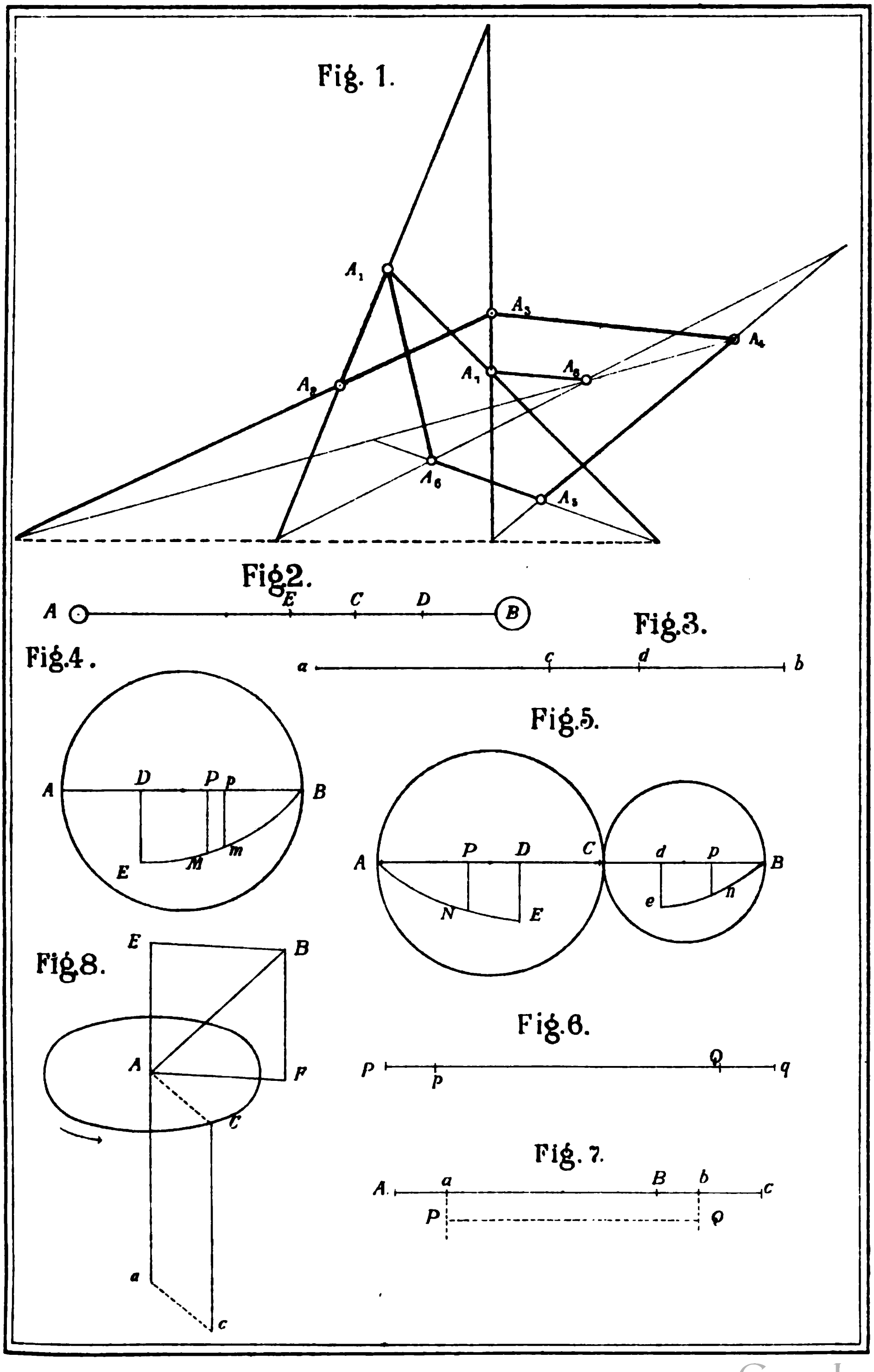


Fig. 1.
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_6
A_7
A_8
Fig2.
A E C D B
Fig.3.
a c d b
Fig.4.
A D P p B
E M m
Fig.5.
A P D C d p B
N E e n
Fig.6.
p Q q
p
Fig. 7.
A a B b C
P Q
Fig.8.
E B
A F
C
a
c

Historisch-literarische Abtheilung.

Entwurf einer Geschichte der Gesetze des Stosses.

Von

EUGEN GELCICH.

(Schluss.)

Hierzu Taf. II Fig. 1—4.

Angenommen nun, der Stoss bei C geschehe durch einen Körper B (Fig. 1) und zwar nach Angabe der Figur derart, dass BC senkrecht auf die Berührungsebene ausfalle, so wird A eine fortschreitende und eine drehende Bewegung annehmen. Nach einer Zeit ∂t gelangt A nach a, B nach b, G nach g. Gg ist grösser als Aa, da nebst der fortschreitenden eben auch die rotatorische Bewegung entstand. Die Entfernung BG in einem Augenblick des Stosses, d. i. in der Zeit ∂t nach erfolgter Berührung, bezeichnen wir mit x, den Winkel ACG mit α, die Distanz AG mit f. Die Geschwindigkeiten von A und B sollen mit u und v, die rotatorische Geschwindigkeit von G mit r bezeichnet werden. Zur einen Zeit ∂t sind die Theilbeträge von u, v und $r = \partial u$, ∂v, ∂r und $Aa = u\,\partial t$, $Bb = v\,\partial t$, $g\gamma = fr\,\partial t$. Es ist aber

$$bg = x\,\partial x,$$
$$Bg = x + u\,\partial t + fr\,\partial t = v\,\partial t + x + \partial x,$$

woraus

$$1)\qquad \partial t = \frac{\partial x}{u - v + fr}.$$

Man drücke ∂v, ∂u, ∂r durch die Kraft des Stosses (p) und durch die Massen aus, d. h. man setze

$$2)\qquad \partial v = \frac{-p\,\partial t}{B},\quad \partial u = \frac{p\,\partial t}{A},\quad \partial r = \frac{\sin\alpha . AC . p\,\partial t}{S}.$$

War die Geschwindigkeit von B vor dem Stosse b, so ist die Geschwindigkeit v nach dem Stosse:

$$v = b - \frac{\int p\,\partial t}{B}$$

und daher

$$3)\qquad B(b - v) = \int p\,\partial t.$$

Aus 2) und 3) folgt aber

$$4)\qquad B(b-v)=Au=\frac{sr}{AC\sin\alpha}=\frac{sr}{f}.$$

Durch Einführung des Werthes 1) in 2) erhält man drei Gleichungen, aus welchen sich folgende bilden lässt:

$$\alpha Bu\,\partial v-\alpha Bv\,\partial v+\alpha Bfr\,\partial v+CAu\,\partial u-CAv\,\partial u+CAfr\,\partial u$$
$$=(-a+C+p)\,p\,\partial x+\frac{\gamma Su\,\partial r}{f}-\frac{\gamma Sv\,\partial r}{f}+p\,Sr\,\partial r,$$

wobei $\alpha=-A$, $C=B$, $p=\frac{ABf^2}{S}$ bedeuten. Die Integration derselben ergiebt:

$$\frac{ABv^2+ABu^2+ABf^2r^2}{2}-ABvu-ABfrv+ABfru$$
$$=\left(A+B+\frac{ABf^2}{S}\right)\int p\,\partial x+\frac{ABb^2}{2},$$

aus welcher wieder folgt:

$$5)\qquad -v+u+fr=\sqrt{b^2+2\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{f^2}{S}\right)\int p\,\partial x}.$$

Die Gleichungen 4) und 5) sind die Grundgleichungen, aus welchen dann Euler die speciellen Fälle ableitet. Soll z. B. der excentrische Stoss elastischer Körper behandelt werden, so ist die Wirkung von B auf A in dem Augenblick vollendet, als sich die Körper wieder trennen, d. h. wenn $\partial x=0$ ist. Setzt man diesen Werth in 5) ein, so lassen sich aus 4) und 5) drei Gleichungen mit drei Unbekannten aufstellen, aus welchen folgt:

Geschwindigkeit von B nach dem Stosse

$$v=b-\frac{2ASb}{(A+B)S+ABf^2},$$

Geschwindigkeit von A nach dem Stosse in der Richtung Aa

$$u=\frac{2BSb}{(A+B)S+ABf^2},$$

rotatorische Geschwindigkeit

$$r=\frac{2ABfb}{(A+B)S+ABf^2}.$$

In ähnlicher Weise untersucht Euler alle möglichen übrigen Fälle des schiefen Stosses, er stellt für jeden Fall Gleichungen auf, die dann die entstehenden Fragen beantworten.

Karsten hat den schiefen Central- und den excentrischen Stoss fast ganz nach Euler behandelt[1]); Lambert[2]) seinerseits will vom schiefen Stoss nur soviel anführen, als es nöthig ist, um zu zeigen, „dass eine deutlich auseinandergesetzte Theorie desselben ungleich schwerer und weitläufiger

1) Karsten a. a. O. S. 236 § 244 u. S. 284 bis 315.

2) Lambert a. a. O. S. 533 § 171.

ist, als man sie gewöhnlich vorträgt". Zu diesem Zwecke behandelt er das schiefe Auftreffen einer elastischen Kugel gegen eine unbewegliche und ebenfalls elastische Wand. Bei dem Falle, wo zwei Kugeln in verschiedenen Richtungen zugleich auf eine dritte stossen, und daher die Bewegung aus der Zusammensetzung der Kräfte entsteht, glaubt er, dass die Regeln, die man dafür bis zu seinen Zeiten angab, zwar grösstentheils richtig seien, den eigentlichen und deutlich auseinandergesetzten Beweis hält er aber für viel zu verwickelt. Die Richtung des Druckes, sagt er, ändert sich mit der Lage der Mittelpunkte in Einem fort und der Weg der Mittelpunkte ist an und für sich sehr veränderlich. Die Gesetze dieser Bewegungen abzuleiten erklärt er für eine so verwickelte Sache, dass er von deren Behandlung abstrahiren will.

Lambert hat sich noch bei einer andern Gelegenheit mit den Gesetzen des Stosses beschäftigt[1]) und dabei gezeigt, wie schwer sich die Begriffe „elastisch" und „unelastisch" in der praktischen Anwendung der Bewegungsgleichungen bestimmen lassen. Es können die kleinsten Theile von Körpern, welche man als unelastisch ansieht, doch Elasticität besitzen, und da benimmt sich der Körper beim Stoss verschieden, je nach der Geschwindigkeit, mit welcher der Stoss stattfindet. Bei der Untersuchung solcher Bewegungen reicht wohl die Theorie nur zum Theil aus, Erfahrung ist in diesem Falle massgebend. Interessante Anwendungen hiervon bietet die Artillerie; die ersten Versuche über diesen Gegenstand hat, wie gesagt, Lambert veröffentlicht.

Es war früher davon die Rede, dass sich Wrenn vor der Bekanntmachung seiner Gesetze durch Versuche mit Pendeln von der Richtigkeit derselben überzeugte. Damals betrieb die Experimentalphysik mit vielem Eifer der bekannte Physiker Mariotte, der sich die Mühe genommen hat, alle möglichen Fälle des Stosses elastischer und unelastischer Körper durch Versuche zu erproben. Er schrieb die Resultate seiner Untersuchungen, welche nur die von Huyghens, Wrenn und Wallis aufgestellten Gesetze bestätigen, mit vielen Details nieder und veröffentlichte sie in einer kleinen Druckschrift, betitelt: „Traité de la percussion ou choc de corps", welche 1677 in Paris erschien[2]). Zur Ausführung dieser Experimente bediente er sich der nach ihm benannten Percussionsmaschine, die wohl aber ganz anders aussah, als die vermeintliche Percussionsmaschine unserer heutigen physikalischen Cabinette. Die Originalmaschine von Mariotte (Fig. 2) bestand aus einer gleichschenkligen Dreiecksfläche *abc*, mit zwei hervorstehenden

1) Anmerkungen über die Gewalt des Schiesspulvers und den Widerstand der Luft. Berlin 1776. §§ 24 — 27.

2) Die Brochure ist nur noch schwer zu finden, sie ist aber vollständig abgedruckt in den „Oeuvres de Mariotte, de l'acad. royale des sciences. Nouvelle Édition. Tome I. A la Haye 1740". Die Abhandlung „De la percussion ou choc des corps" umfasst 116 Seiten mit 61 auf 4 Tafeln gedruckten Figuren. Ich fand dieses Werk nur in der Münchener Hofbibliothek vor.

Haken d und e versehen, worauf die Schnüre df und eg befestigt waren. Bei f und g befanden sich zwei Kugeln, die nach Belieben gewechselt werden konnten, um Versuche mit elastischen und unelastischen Körpern auszuführen. hf, gl waren eingetheilte Bögen, um den von den jeweiligen Kugeln zurückgelegten Weg messen zu können.

Die heutige Percussionsmaschine, wie sie in allen Werken über Experimentalphysik abgedruckt erscheint, rührt von dem französischen Physiker Nollet her, der sie erdachte und zum ersten Mal beschrieb[1]). Aehnlich wie die Maschine von Nollet, aber doch noch complicirter als diese, war eine Maschine von Gravesandius, die Musschenbroeck in seiner Philosoph. nat. beschreibt.

Eine schöne Anwendung der Gesetze des Stosses bilden die Regeln des Billardspieles, die zuerst von Musschenbroeck, jedoch ohne Berücksichtigung der Drehung behandelt wurden[2]). Es greift bei denselben auch der Stoss beweglicher Körper gegen elastische Wände ein, den wir zwar nicht in den Rahmen unserer Skizze einbezogen; diese Partie glauben wir aber doch nicht unberücksichtigt lassen zu dürfen.

Musschenbroeck bestimmt den Weg der Billardkugeln für verschiedene Fälle durch den einfachen Constructionsweg. Ein oder zwei Beispiele werden genügen, um den Vorgang zu charakterisiren. Es soll in Fig. 3 die Kugel C jene A nach doppeltem Auftreffen an die Billardwände stossen; $VXZY$ seien die Billardwände. Man lege das Parallelogramm $V'X'Z'Y'' \parallel VXZY$ und zwar derart, dass die parallelen Seiten von einander um den Radius der Billardkugel abstehen. Zieht man $AB \perp VX$ und macht $AD = DB$, ferner $CM \perp XZ$, $CL = LM$, und verbindet BM, so sind aus naheliegenden Gründen J und L die Punkte, worauf eine oder die andere Kugel auftreffen muss, um auf die andere zu stossen.

Soll mit der eigenen Kugel C (Fig. 4) die fremde Kugel A in das Loch F getrieben und dabei die eigene Kugel von der Bewegungsrichtung abgelenkt werden, so verbinde man FA und lege beim Punkte r der FA die st tangent an A. Hierauf beschreibe man mit dem Halbmesser der Billardkugeln den Kreis B, fälle die $BE \perp XY$ und mache $BL = LE$. Verbindet man E mit C, so ist X der Punkt, gegen welchen die Kugel C zu dirigiren ist. Dann wird C den Weg CDB annehmen und die Kugel A bei r stossen. Zerlegt man die Br in die Componenten Br, st, so wird A mit der Componente Br gegen F getrieben und die Componente rs bleibt wirkungslos. In dieser Art sind alle weiteren Beweise geführt. Freilich gehört zur Entwickelung der Billardtheorie noch die Drehung, die viel zu sagen hat; Musschenbroeck war aber der Erste, der sich damit befasste, und von diesem Gesichtspunkte aus verdient seine Abhandlung immerhin Beachtung.

1) Nollet, Leçons de Physique. Band I.

2) Introductio ad philosophiam naturalem. Auctore Petro van Musschenbroeck. Lugduni Batavorum apud Sam. et Joh. Luchtmans. 1762. Bd. I S. 247 flgg.

Wir haben noch der Rolle zu gedenken, welche die Theorie des Stosses bei dem grossen Streite um die Entdeckung des Satzes von der kleinsten Wirkung spielte, welcher seiner Zeit die Gemüther so heftig erregte und bei welchem selbst die Berliner Akademie der Wissenschaften in Mitleidenschaft gezogen wurde.

Dieser Satz lautet wie folgt: „Wenn eine Veränderung in der Natur geschieht, so ist die dazu erforderliche Wirkung die kleinste, die möglich ist.“ Auf Grund dieses Satzes sind zugleich die Gesetze des Stosses in sehr einfacher und eleganter Weise von Maupertius entwickelt worden[1]. Es sei angenommen, dass zwei feste Körper von den Massen A und B einander folgen mit den Geschwindigkeiten a und b, und dass B von A erreicht wird. Nach dem Stosse sei die gemeinschaftliche Geschwindigkeit x. Nach den Gesetzen der gleichförmigen Bewegung kann man sagen, dass jede der Massen vor dem Stosse in der Zeit t einen Weg a und b zurücklegten und nach dem Stosse in derselben Zeit den Weg x ablaufen. Die Masse A hat nach dem Stosse an Geschwindigkeit verloren und zwar um $a-x$, die Masse B um $x-b$ gewonnen. Die Kräfte lassen sich nun ausdrücken durch die Producte der Massen in die Quadrate der Geschwindigkeiten und es soll nun nach dem Satze der kleinsten Wirkung die Summe dieser Kräfte ein Minimum sein. Setzt man also den ersten Differentialquotienten von $A(a-x)^2+B(b-x)^2=0$ und bestimmt daraus x, so wird

$$-2aA+2Ax+2Bx-2Bb=0, \quad X=\frac{Aa+Bb}{A+B}.$$

Aus diesem Satze lassen sich dann einfach auch die Gesetze der Bewegung elastischer Körper ableiten. Behalten A, B, a, b die frühere Bedeutung und setzt man die Bewegung von A nach dem Stosse $=\alpha$, von $B=\beta$, so ist wieder $A(a-\alpha)^2+B(\beta-b)^2$ und es muss

$$2Aa\,\delta\alpha+2A\alpha\,\delta\alpha+2B\beta\,\delta\beta-2Bb\,\delta\beta=0$$

sein. Weil nun bei elastischen Körpern die relativen Geschwindigkeiten vor und nach dem Stosse dieselben bleiben:

$$\beta-\alpha=a-b$$

und daraus

$$\partial\beta=\delta\alpha.$$

Setzt man diesen Werth in obige Gleichung ein, so wird:

$$-2Aa+2A\alpha+2B\beta-2Bb=0$$

oder, $\beta=\alpha-b+a$ gesetzt:

$$2Aa+2A\alpha+2Ba-2Bb+2B\alpha=0,$$

und

$$\alpha=\frac{(A-B)a+2Bb}{A+B}, \quad \beta=\frac{(B-A)b+2Aa}{A+B}.$$

1) Oeuvres de Mr. de Maupertius. Lyon 1756. Bd. I. — Auch in Mém. de l'Acad. Roy. de Prusse 1746, S. 268; oder in Essay de Cosmologie von Maupertius, 1750.

Wenn man aber gerade will, so muss man dieses Verfahren als unvollständig bezeichnen, da bei unelastischen Körpern schon vorausgesetzt ist, dass sie nach dem Stosse die gleiche Geschwindigkeit beibehalten, und auch bei elastischen die Gleichheit der relativen Bewegungen nicht erwiesen wird. Sollte die Formel ohne diese Voraussetzungen aufgestellt werden, dann müsste man allgemein setzen:

$$A(a-x)^2 + B(y-b)^2 = \text{Minimum},$$

woraus

$$-A(a-x)\,\partial x + B(y-b)\,\partial y = 0,$$

mit welcher Gleichung die Verhältnisse der gegebenen Grössen, da zwei Unbekannte darin vorkommen, nicht eruirt werden können. Lambert, der diesen Mangel der Ableitung tadelt, hilft sich darüber hinweg[1]), indem er für elastische Körper noch setzt:

$$a-b=y-x,$$

was dann die Gleichung

$$\partial y = \partial x$$

bedingt. Selbst durch diese Einführung setzt man aber Etwas als bekannt voraus, was erst zu beweisen wäre.

Schliesslich noch wenige Worte über das Kräftemaass beim Stosse.

Um die Kraft des Stosses zu messen, hat, wie früher erwähnt, der P. Mersenne versucht, erstere mit Gewichten zu vergleichen. Camus[2]) gab zu diesem Zwecke ein eigenthümliches, ganz falsches Verfahren an. Er liess eine Bleikugel mit einem Hammer von 1 Pfund Gewicht ohne Gewalt platt schlagen. Weil nun, um die gleiche Kugel durch Druck allein platt zu machen, ein Gewicht von 200 Pfund erforderlich war, so meinte er, der Schlag des Hammers sei gleich 200 Pfund. Was aber Camus unter dem Ausdrucke „ohne Gewalt“, der sehr relativ aufgefasst werden kann, meint, ist unmöglich zu errathen; noch weniger lassen sich daraus mathematisch-physikalische Schlussfolgerungen ziehen.

Euler hat die vorhergehende Aufgabe sehr gründlich in den Denkschriften der Berliner Akademie behandelt[3]). Er zeigt, wie bei derlei Untersuchungen auf die verschiedenen Zustände der Körper Rücksicht genommen werden muss. Bei dem Stosse elastischer Körper wird der Druck vom ersten Augenblick der Berührung bis zum Moment der grössten Zusammenpressung wachsen; wollte man also in diesem Falle die Kraft des Stosses durch Gewichte ausdrücken, so müsste man für jeden Augenblick die Entfernung der Schwerpunkte oder die Zeit kennen, welche von der ersten Berührung an verfliesst. Bei weichen Körpern, wo der Zusammenhang der Theile beim Stosse getrennt wird, wird die Kraft des Druckes eine bestän-

1) Lambert a. a. O., S. 554.

2) Traité des forces mouvantes. P. I ch. 3 prop. 5.

3) Mém. de l'acad. roy. des Sciences de Berlin. 1745. Sur la force de percussion, et de sa veritable mesure. S. 21 flgg.

dige Grösse. Derlei Körper drücken Gruben ineinander. Angenommen, ein Körper M stosse in einen Körper N eine Grube ein, welche die Tiefe a erreicht, so bestimmt Euler wie folgt die Kraft des Stosses. Es seien beide Massen M und N in Bewegung gewesen. In der Zeit t nach der ersten Berührung habe N den Weg x zurückgelegt und M sei in N um die Tiefe y eingedrungen, so ist der ganze Weg von $M = x + y$. Am Ende der Zeit t sei die Geschwindigkeit von $M = v$, jene von $N = u$, so ist:

$$\frac{\partial x + \partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = u.$$

Ist die Kraft, mit welcher die Körper gegen einander drücken, $= P$, so hat man für die Bewegung von M die Gleichung:

$$2 M v \, \partial v = -4 g P (\partial x + \partial y),$$

für N:

$$2 N u \, \partial u = 4 g P \, \partial x.$$

Weil P constant ist, giebt die Integration

$$M v^2 = C - 4 g P x - 4 g P y, \quad N u^2 = E + 4 g P y.$$

Sind die Geschwindigkeiten vor dem Stosse b und c, so ist für $x = 0$ $y = 0$; $v = b$, $u = c$, somit

$$M v^2 = M b^2 - 4 g (x + y) P, \quad N u^2 = N c^2 + 4 g P x,$$

aus welchen beiden Gleichungen folgt:

$$4 g P y = M (b^2 - v^2) + N (c^2 - u^2).$$

Nun fährt die Kugel fort, einzudringen, bis $v = u$ ist, und dann wird $y = a$. Nach Einführung dieser Werthe und einigen Umformungen erhält Euler

$$M \, \partial v = - N \, \partial u, \quad M v = C - N u.$$

Weil nun für $u = c$ $v = b$ wird, so ist:

$$M v = M b + N c - N u.$$

Setzt man also $v = u$, so erhält man:

$$v = \frac{M b + N c}{M + N};$$

man erhält ferner

$$(M + N)^2 v^2 = M^2 b^2 + 2 M N b c + N^2 c^2.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für $4 g P y$ und bestimmt daraus P, so ist:

$$P = \frac{M N (b - c)^2}{4 g a (M + N)}$$

oder, wenn der eine Körper N unbeweglich ist, in welchem Falle er als unendlich gross betrachtet werden kann und c verschwindet:

$$P = \frac{M b^2}{4 g a}.$$

Euler giebt hierzu ein Beispiel, bei welchem eine abgeschossene Bleikugel in einer Secunde 5 Zoll tief in Ulmenholz eindrang. Hierbei war der Druck in jedem Augenblicke 107760 mal grösser als das Gewicht der Kugel.

Bei unvollkommen harten Körpern lässt sich nicht sagen, wie stark beide Massen während des Stosses gegen einander drücken, wohl aber, wie stark dieser Druck bei einer gegebenen Entfernung der Schwerpunkte ist. Bei vollkommen harten Körpern lassen sich, sagt Karsten[1]), solche Betrachtungen nicht anstellen; bei denselben würde im Augenblick der Berührung eine Ruhe erfolgen, wenn sie mit gleichen Geschwindigkeiten gegen einander laufen. Es nimmt folglich die Kraft, welche im Augenblicke des Stosses die Körper entfernt, einem jeden eine endliche Geschwindigkeit in einem Augenblicke. Allein die Schwere kann keinem Körper in einem Augenblick eine endliche Geschwindigkeit geben. Daher verhielte sich die Gewalt des Stosses zur Schwere wie eine endliche Geschwindigkeit zu Null oder, wie sich Fischer ausdrückte[2]), wie ein Integral zu seinem Differential. Daher rührt der Galilei'sche Ausspruch, dass der Stoss unendlich grösser als der Druck ist. Daraus, folgt Karsten weiter, ist nicht zu schliessen, dass die Kraft eines solchen Stosses an sich unendlich sei; sie ist eben von anderer Natur als der Druck. Der Druck braucht, um endliche Geschwindigkeiten hervorzubringen, endliche Zeiten, der Stoss vermag dies in unendlichen Zeiten zu bewerkstelligen. Es lassen sich aber solche Kräfte vergleichen, sobald man sich geeinigt hat, was unter Kraft zu verstehen ist, oder besser, wie die Kraft gemessen werden soll. Diese Aufgabe hat zu dem berühmten Streite über das Cartesius-Leibnitz'sche Kräftemaass Anlass gegeben, der schon sattsam behandelt wurde und uns daher nicht weiter aufhalten soll.

Wir werden unsere Leser mit einigen geschichtlichen Bemerkungen über die Bedeutung des Kunstausdruckes „Mittelpunkt des Stosses" verlassen, der beim excentrischen Stosse eine Rolle spielt.

Stellt man sich durch den Schwerpunkt einer Masse N, welche von der Masse M getroffen wird, eine zur Richtung des Stosses senkrechte Ebene vor, so nennt man nach Euler denjenigen Punkt derselben, durch welchen die Richtung des Stosses gehen muss, damit er am stärksten ausfalle, den Mittelpunkt des Stosses. Wallis hat zuerst diesen Ausdruck gebraucht[3]) *(punctum percussionis maximae)* und wie folgt erklärt: Es ist gleichviel, ob man durch den Punkt des stärksten Stosses einer Masse N, die mit paralleler Bewegung fortgeht, denjenigen versteht, durch welchen die Richtung des Stosses hindurchgeht, wenn ein unbewegliches Hinderniss ihre Bewegung aufhält, oder ob derjenige verstanden wird, durch welchen die Richtung des Stosses hindurchgehen muss, wenn sie einer andern beweglichen Masse M, gegen welche der Stoss central stattfindet, die grösste Geschwindigkeit mittheilen soll.

---

1) a. a. O. S. 260.

2) Physik. Wörterbuch von Dr. J. C. Fischer. IV. Thl. S. 863 u. 864.

3) Mechanik. Cap. XI prop. XV.

Wenn sich die Masse *N* dreht, so muss ein Unterschied gemacht werden, ob es sich um den Stoss gegen eine unbewegliche oder gegen eine bewegliche Masse handelt, da dann der Punkt des grössten Stosses nicht mehr derselbe ist.

Der Umstand, dass der Mittelpunkt des Schwunges bei Betrachtung einzelner gegebener Fälle zu ähnlichen Gleichungen führt, wie solche aus dem Mittelpunkte des Stosses abgeleitet werden, veranlasste Wallis zur Annahme, der Mittelpunkt des Stosses sei vom Mittelpunkt des Schwunges nicht verschieden[1]), und Stone liess sich dadurch verleiten, beide Punkte unter einander zu verwechseln[2]). In seinen „Remarques sur le calcul integral de Msr. Stone“ hat Bernoulli den Fehler Stone's hervorgehoben[3]). Demnach sind Johann und Jacob Bernoulli in dem Begriffe des Mittelpunktes des Stosses mit Wallis einig[4]). Euler erst hat diesen Begriff genauer festgestellt und Karsten[5]) sammelte und löste in sehr verständlicher und eleganter Weise die verschiedenen Aufgaben, die damit in Zusammenhang stehen.

Gedächtnissrede

auf

Professor Dr. Leopold Prowe

(gest. am 26. September 1887),

gehalten in der ausserordentlichen Sitzung des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn

am 10. October 1887

von

M. Curtze.

Meine Herren!

Wir haben uns hier heute versammelt, um einer Ehrenpflicht zu genügen. Unser langjähriger, hochverehrter Vorsitzender, Herr Professor Dr. Leopold Prowe, ist seinen langwierigen, schmerzlichen Leiden erlegen. Nachdem wir soeben dem Heimgegangenen den Zoll des Dankes durch Er-

1) a. a. O. S. 681.

2) Analyse des infiniment petits comprenant le calcul integral. Sect. VII S. 131.

3) Oper. Bd. IV S. 180 flgg.

4) Oper. Jac. Bernoulli, Bd. XI S. 951. Demonstration du principe de Mr. Huyghens touchant le centre de balancement, et de l'identité de ce centre avec celui de percussion.

5) Karsten a. a. O., S. 304 flgg.

heben von den Sitzen dargebracht haben, ziemt es sich sicherlich, auch seine Verdienste um den Verein, seine Verdienste um die Wissenschaft hier näher darzulegen. Die Verdienste in seinem Berufe, die Verdienste, welche er sich als Bürger der Stadt erworben, fallen ausserhalb des Rahmens, der unserer Darlegung gesteckt ist; nur eines der letzteren, seiner Bemühungen für die Geschichte der Stadt, werden wir erwähnen müssen.

Dass Leopold Friedrich Prowe am 14. October 1821 hier in Thorn als Sohn des Rathsherrn Prowe geboren ist, dass er am hiesigen Gymnasium mit 18 Jahren das Abiturientenexamen ablegte, darauf in Leipzig Philologie studirte und von seinem Probejahre ab, 43 Jahre hindurch, zuletzt als erster Oberlehrer an der Anstalt wirkte, die ihm einst als Schüler den Weg zu den Wissenschaften eröffnete, das, meine Herren, brauche ich hier nur zu erwähnen.

In das Jahr seiner Entlassung zur Universität fällt die Gründung des Vereins, dem der unsere seine Entstehung verdankt. Am 19. Februar 1839, dem Geburtstage des Coppernicus, trat in Thorn eine Anzahl von Personen zu einem Vereine zusammen, der sich die Errichtung eines würdigen Denkmals für unsern grössten Mitbürger zum Ziele setzte. Als am 25. October 1853 die feierliche Enthüllung des von Fr. Tieck geschaffenen Erzmonumentes auf dem Altstädtischen Markte erfolgte, war es unserem Prowe, dem das Denkmalcomité den ehrenvollen Auftrag ertheilte, für die Festschrift den Lebensabriss des Gefeierten zu verfassen.[1])

Schon seit seiner Anstellung am hiesigen Gymnasium hatte Prowe es sich zur Aufgabe gemacht, die Lebensumstände des Coppernicus, soweit es möglich, aufzuhellen. Im Jahre 1853 waren ihm von Seiten des damaligen Cultusministers v. Raumer die Mittel geboten gewesen, in Schweden, vorzugsweise in Upsala, nach den dorthin als Kriegsbeute entführten ermländischen Archivalien, in denen sich vor allen Coppernicana befinden, Nachforschung halten zu können; damals hatte er zu ähnlichem Zwecke schon zweimal Frauenburg besucht und war in gleicher Absicht in Krakau gewesen. Mit grösster, dankenswerthester Liberalität waren ihm überall die Schätze der Archive und Bibliotheken zugänglich gemacht worden. Ueber die Resultate seiner Reise nach Schweden handelte er in einem an den Herrn Minister gerichteten Rechenschaftsberichte[2]); die erste genauere Verwerthung zum Zwecke der Biographie des Coppernicus jedoch fanden sie

1) Nicolaus Copernicus. Eine biographische Skizze (Denkschrift zur Enthüllungsfeier des Copernicus-Denkmals in Thorn). Herausgegeben vom Copernicus-Verein. Thorn 1853. S. 17—85.

2) Mittheilungen aus schwedischen Archiven und Bibliotheken. Bericht an Se. Excellenz den Herrn Minister der geistlichen Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten Herrn von Raumer. Von Dr. L. Prowe. Mit 2 lithographirten Tafeln. Berlin 1853. Verlag der Decker'schen geh. Oberhofbuchdruckerei. VII, 64 S. 4⁰. 2 Tafeln.

sämmtlich in der Festschrift des Gymnasiums zur Enthüllungsfeier, die aus Prowe's Feder die Abhandlung brachte: „Zur Biographie des Nicolaus Coppernicus.“[1]) Darin waren ausser den von ausserhalb erlangten Actenstücken die damals noch ungeordneten Urkunden unseres städtischen Archivs ausgiebig benutzt worden.

Als nun am 15. October, dem Geburtstage seines königlichen Protectors Friedrich Wilhelm IV., zehn Tage vor der Enthüllungsfeier, eine Zahl von Mitgliedern des Denkmalvereins auf Anregung des damaligen Oberbürgermeisters, geh. Regierungsrath Körner, zusammentraten, um diesen Verein, der mit Erfüllung seiner Aufgabe zur Auflösung kam, in erneuter Form als „Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst“ wieder aufleben zu lassen, da war Prowe einer der Eifrigsten, diesen Zweck zu fördern. Er wurde nebst dem ebenfalls unvergesslichen Dr. Brohm zum Schriftführer des neuen Vereines gewählt und führte dieses Amt bis zum Jahre 1864. Von diesem Zeitpunkte an bis 1869 war er stellvertretender, von 1870 bis jetzt, also fast 19 Jahre, erster Vorsitzender des Vereins. Während aller dieser Jahre ist seine wissenschaftliche Thätigkeit, mit vielleicht zwei oder drei Ausnahmen, ausschliesslich unserem Vereine zu Gute gekommen.

Was er für das Leben des Vereines sonst geleistet, das ist in unser aller Gedächtniss. Durch seine Reise nach Schweden hatte er in den Berliner massgebenden Kreisen Beziehungen angeknüpft, die für unsern Verein von weitestgehender Bedeutung werden sollten. Ich nenne nur Namen wie Alexander v. Humboldt, Abeken, Graf Stillfried von Alcantara, v. Quast, v. Wilmowski. Alle wusste er den Zwecken des Vereins geneigt zu machen und hat dadurch Grosses für denselben erreicht. Als nach seiner Uebernahme des Vorsitzes im Jahre 1870 zuerst über die Säcularfeier im Jahre 1873 verhandelt wurde, zeigte sich sein organisatorisches Talent im höchsten Glanze. Er war die Seele des Festcomités; er wusste durch Intervention des Fürsten-Reichskanzlers zu erwirken, dass ein Delegirter des Vereins die Erlaubniss zur Einsicht in die Originalhandschrift der „Revolutiones“ des Coppernicus in Prag behufs Collationirung mit den Ausgaben erhielt; er war es, der bei seinem Aufenthalt in Ems im Sommer 1872 Sr. Majestät über die beabsichtigte Jubelausgabe Vortrag halten, der schon im März desselben Jahres Sr. kaiserl. und königl. Hoheit dem Kronprinzen und dessen erlauchter Gemahlin die eben fertig gewordene Collation der Originalhandschrift vorlegen durfte, die dort so grosses Interesse erregte, dass sie erst nach mehrwöchentlicher Frist hier wieder eintraf; er erlangte

1) Zur Biographie von Nicolaus Copernicus. I. Ueber die Thorner Familien Koppernigk und Watzelrode. II. Ueber die Zeit der Geburt und des Todes von Nicolaus Copernicus. Festschrift des Königl. Gymnasiums zu Thorn zur Feier der Enthüllung des Copernicus-Denkmals. Thorn 1853. Druck und Verlag von Ernst Lambeck. VI, 58 S. 4°.

dann von Sr. Majestät die Allerhöchste Ermächtigung für den Verein, Allerhöchstihm die Jubelausgabe widmen zu dürfen, zugleich mit einer Subvention für den Druck derselben von 4500 Mark. Als dieser Fonds und eine von dem Provinziallandtage bewilligte weitere Beihilfe von 1500 Mark nicht aufgebraucht wurden, erhielt er die weitere Allerhöchste Ermächtigung, den Rest zur Drucklegung einer von Professor Menzzer in Halberstadt verfertigten Uebersetzung des Hauptwerkes von Coppernicus[1]), sowie zu einer Stiftung zu verwenden, welche unter dem Namen „Coppernicus-Stiftung für Jünglinge" jährliche Stipendien an Studirende austheilt.

Am Säculartage des Jahres 1873 lag die Jubelausgabe[2]) auf dem Tische jedes Subscribenten. Die Jubeltage selbst waren durch Deputationen und Gratulationen von allen Seiten her ausgezeichnet. Prowe war der Mittelpunkt des Ganzen. Seine Festrede[3]), die, wie natürlich, wieder das Leben unseres Namengebers zum Gegenstande hatte, war von zündender Wirkung. Seine Verdienste wurden damals von Sr. Majestät durch Verleihung des rothen Adlerordens ausgezeichnet. Schon vorher, im Februar 1871, hatte ihm für seine wissenschaftlichen Verdienste der *re galantuomo,* Victor Emanuel von Italien, das Ritterkreuz des Ordens der Italienischen Krone verliehen; bei der Säcularfeier wiederholte sich diese Anerkennung: er erhielt aus Anlass derselben das Officierkreuz genannten Ordens.

Kein Misston drängte sich damals — und das ist vor Allem sein Verdienst — in die Feier. Die zu jener Zeit mit den Vertretern der Universitäten und Nationen — selbst aus Amerika war ein Festtheilnehmer erschienen — angeknüpften Bande wusste er festzuhalten, und sie haben sich bis heute in segensreichster Weise bewährt.

Die erhobene Stimmung, in welcher sich der Verein durch das herrliche Gelingen der Feier befand, verstand er trefflich zu benutzen. Er regte die Veranstaltung von öffentlichen Vorträgen im Laufe der Wintermonate an, und diese waren von durchschlagendem Beifall begleitet. Ihr Ertrag kam zunächst der Coppernicus-Stiftung zu Gute; dann wurde aus demselben eine ähnliche Stiftung für Jungfrauen begründet, endlich, als der Vorschlag gemacht wurde, durch Herausgabe eines eigenen Vereinsorgans immer wei-

---

1) Nicolaus Coppernicus aus Thorn. Ueber die Kreisbewegung der Weltkörper. Uebersetzt und mit Anmerkungen von Dr. C. L. Menzzer. Durchgesehen und mit einem Vorwort von Dr. Moritz Cantor. Herausgegeben von dem Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst zu Thorn. Thorn 1879, Druck und Verlag von Ernst Lambeck. XII, 363, 66 S. gr. 8°.

2) Nicolai Copernici Thorunensis De Revolutionibus Orbium Caelestium Libri VI. Ex Auctoris Autographo Recudi Curavit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit Georgii Joachimi Rhetici De Libris Revolutionum Narratio Prima. Thoruni, Sumptibus Societatis Coppernicanae MDCCCLXXIII. XXX, 494 S. gr. 4°.

6) Festrede zur 4. Säcular-Feier des Geburtstages von Nicolaus Copernicus, gehalten im Saale des Rathhauses zu Thorn am 19. Februar 1873 von Leopold Prowe. Berlin 1873, Weidmann'sche Buchhandlung. 42 S. 8°.

tere Kreise für den Verein zu interessiren, nahm er denselben mit Freuden auf, und ein grosser Theil der Erträgnisse der Vorlesungen wurde zu diesem Zwecke verwendet. Wir können mit Genugthuung constatiren, dass dadurch ein Schriftenaustausch mit fast einem halben Hundert Akademien und wissenschaftlichen Vereinen sich herausgebildet hat.

Die hervorragenden Verdienste Prowe's um den Verein und um die Wissenschaft wurden noch weiter anerkannt. Zuerst übersandte ihm die *Rubiconia Accademia in Savignano di Romagna* das Diplom als Ehrenmitglied, dann wählte ihn die älteste Akademie Deutschlands, die Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher, zu ihrem wirklichen Mitgliede. So ist es durch die Richtung seiner Studien gekommen, dass er, der gelehrte Philolog, der mathematischen Section einer naturwissenschaftlichen Akademie angehörte.

Seiner Thätigkeit im Vereine verdankt die Wissenschaft ein weiteres Unternehmen. Als der Vorstand des Staatsarchivs zu Bologna, Dr. Malagola, in einem dortigen Privatarchiv die gesammten Acten der deutschen Nation an der Universität jener Stadt, welche von 1250—1790 reichen, aufgefunden hatte, war der Coppernicus-Verein die erste Instanz, welcher er seinen Fund mittheilte, da aus diesen Acten unwiderleglich erhellt, dass Coppernicus dieser Nation in Bologna angehörte[1]). Der Verein beschloss, Alles zu thun, um jene Acten zum Drucke zu befördern. Mit Feuereifer widmete sich Prowe jetzt der Aufgabe, die königl. Staatsregierung zur Herausgabe derselben, die für die Geschichte der Wissenschaft von unschätzbarem Werthe sind, zu erwärmen. Seine Bemühungen sind von Erfolg gekrönt gewesen. Die Drucklegung der Acten durch die Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin nähert sich ihrem Schlusse — leider sollte es Prowe, der mit den ersten Anstoss dazu gegeben, nicht mehr vergönnt sein, die Vollendung zu schauen. Das Verdienst, bei den Staatsbehörden die Anregung zu dieser Publication gegeben zu haben, wird jedoch stets dem Coppernicus-Verein, speciell seinem Vorsitzenden bleiben.

Was aber sein ganzes wissenschaftliches Leben ausgefüllt hat, die Untersuchungen über das Leben, die Schriften und die Schicksale der Lehre des Coppernicus, das hat noch vor seinem Hinscheiden, wenigstens in seinem ersten Theile, einen herrlichen Abschluss gefunden. In den Jahren

---

1) Die Untersuchungen Malagola's sind in verschiedenen Publicationen niedergelegt. Die erste derselben hat den Titel: Della vita e delle opere di Antonio Urceo detto Codro. In Bologna dalla tipografia Fava e Garagnani al progresso. 1878. XX, 599 S. 8°. Darin umfasst der fragliche Bericht die Seiten 306—366 und 519—595. Davon erschien eine deutsche Ausgabe: Der Aufenthalt des Coppernicus in Bologna von Dr. Karl Malagola. Thorn 1880, Druck und Verlag von Ernst Lambeck. 65 S. 8°. — I libri della Nazione Tedesca presso lo studio Bolognese. Note storiche-bibliografiche dal Dott. Cav. Carlo Malagola. In Modena coi tipi di G. T. Vincenzi e Nipoti 1884. 2 Blatt, 59 S. gr. 8°.

1883 und 1884 erschienen zu Berlin, Sr. kaiserl. und königl. Hoheit dem Kronprinzen gewidmet, in zwei Bänden, deren erster in zwei Theilen ausgegeben ist, das Leben des Coppernicus[1]). Während der erste Band die Darstellung des Lebensganges umfasst, enthält der zweite die beweisenden Urkunden. Es ist von hohem Interesse, die erste Skizze der Biographie des Coppernicus in der Denkschrift zur Enthüllungsfeier 1853 und die in der Festrede 1873 gegebene mit der gereiften Darstellung zu vergleichen, welche in diesen zwei Bänden niedergelegt ist.

Sie wissen, meine Herren, dass Alles, was man bis gegen die Mitte dieses Jahrhunderts von dem Leben des Coppernicus kannte, auf der Darstellung Gassendi's[2]) beruhte. Alle Fortschritte in der Erkenntniss der Thatsachen über diesen Geistesheros verdanken wir in erster Instanz Prowe. Seit 1853 finden wir in unseren Provinzialblättern[3]), in den Programmen unseres Gymnasiums[4]), in Festschriften unseres Vereins[5]) die Keime niedergelegt zu dem magistralen Werke von 1883. Alle Documente von Wichtigkeit hat zuerst Prowe wissenschaftlich verwerthet, obwohl er sich die erste Veröffentlichung mancher derselben, speciell der Frauenburger durch Hipler[6]), vorwegnehmen liess. Sie wissen ferner, meine Herren, dass bei den Fragen um Coppernicus eine der wichtigsten die nach der Nationalität des Mannes ist. Die Polen, seit sie ihre staatliche Selbstständigkeit verloren haben, suchen um so mehr aus Jedem, der in den Territorien gelebt hat, die einst unter polnischem Scepter standen, einen Polen

1) Nicolaus Coppernicus von Leopold Prowe. Erster Band: Das Leben. I. Theil, 1473—1512. II. Theil, 1512—1543. — Zweiter Band: Urkunden. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 1883—1884. XXVIII, 414 S. 7 Tafeln. — IV, 576 S. 2 Tafeln. 1 Karte. — VIII, 552 S. 5. Tafeln. 8°.

2) Tychonis Brahei, equitis Dani, astronomorum Coryphaei Vita Authore Petro Gassendo Regio Matheseos Professore. Accessit Nicolai Copernici, Georgii Peurbachii et Johannis Regiomontani Astronomorum celebrium Vita. Parisiis. Apud Viduam Mathurini Dupuis. M.DC.LIV. 28 Bltt., 304 S.; 13 Bltt., 110 S.; 6 Bltt. 4°. 2. Serie, S. 1—51.

3) Das Andenken des Copernicus bei der dankbaren Nachwelt. — Ueber den Sterbeort und die Grabstätte des Copernicus. — Ueber die Abhängigkeit des Copernicus von den Gedanken griechischer Philosophen und Astronomen. — Hat Copernicus Wasserleitungen angelegt?

4) Zur Biographie von Nicolaus Copernicus (s. die Anm. S. 91). — De Nicolai Copernici Patria. 2. Ausg. (in 4° und 8°). — Nicolaus Copernicus auf der Universität zu Krakau. — Westpreussen in seiner geschichtlichen Stellung zu Deutschland und Polen. (In dem Säcularprogramm und daraus in zwei Auflagen besonders abgedruckt.)

5) Nicolaus Copernicus in seinen Beziehungen zu dem Herzoge Albrecht von Preussen. — Monumenta Copernicana. — Coppernicus als Arzt. — XVII. bis XXXII. Jahresbericht des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn.

6) Spicilegium Copernicanum. Festschrift des historischen Vereins für Ermland zum 400. Geburtstage des ermländischen Domherrn Nikolaus Kopernikus. Braunsberg 1873, Verlag von Eduard Peter. II, 376 S. 8°.

zu construiren, und so vindiciren sie sich auch Coppernicus als den Ihrigen. Dass Prowe, auf seine Documente gestützt, unwiderleglich die deutsche Abstammung des Coppernicus nachwies, haben ihm die Polen nie vergeben. Er hat sich von einem polonisirten Deutschen sogar eine deutsch geschriebene Schmähschrift[1]) gefallen lassen müssen, die ihm *mala fides* und noch Gröberes vorwirft. In Sybel's Historischer Zeitschrift hat Prowe in ruhiger Hoheit den Angreifer von sich geschüttelt[2]).

Ich kann an dieser Stelle, bei dieser Gelegenheit Ihnen nicht ein Resumé des hochwichtigen Werkes geben; ich kann nur bemerken, dass es neidlos von allen berufenen Kritikern als eine ausgezeichnete Leistung hingestellt ist, und, meine Herren, zum grössten Theile kennen Sie es ja, denn die meisten Capitel desselben sind zuerst im Vereine, sei es in öffentlichen Vorträgen, sei es in solchen im engern Kreise, mitgetheilt worden, einzelne auch, wenn auch in den Umständen angemessener und veränderter Form, vor der Drucklegung des ganzen Werkes der Oeffentlichkeit übergeben. Wer sich aber dem Genusse des Ganzen hingiebt, muss, neben dem trefflichen Inhalte, mit Staunen die Beherrschung der Sprache bemerken, die Prowe, wie je einem, eigen war. Seine hohen Anforderungen an den Stil bewirkten, dass erst nach langem Drängen seiner Freunde Prowe sich entschloss, das Manuscript seines Werkes der Druckerei zu übergeben.

Vorarbeiten zu einem dritten Bande, der die Lehre des Coppernicus behandeln sollte, sind schon seit Jahren vorhanden, gelegentlich ist auch davon im Vereine Mittheilung gemacht worden. Unmittelbar nach Bekanntwerden seines Todes kam an den Verein mit dem Ausdruck des innigsten Mitgefühls für den herben Verlust, den wir in ihm erlitten haben, von mehreren Seiten die Frage: Ist das Erscheinen der Fortsetzung gesichert? Hoffen wir, dass die Vorarbeiten soweit gediehen sind, dass eine kundige Hand die letzte Feile anlegen kann, und dass nicht das Werk eines Menschenlebens ein Torso bleiben muss.

Dass bei seinen archivalischen Studien im hiesigen Rathsarchiv neben den Coppernicanischen Funden noch manches Andere zu finden gelang, ist natürlich. Eine dieser Studien, die Depeschen des Thorner Gesandten am Hofe zu Warschau, Samuel Luther v. Geret, hat Prowe ebenfalls *publici juris* gemacht[3]); sie geben einen nicht unwichtigen Beitrag zur polnischen Geschichte des vorigen Jahrhunderts unmittelbar vor der ersten Theilung.

Meine Herren! Prowe's Dahinscheiden hat eine klaffende Lücke in unsern Verein gerissen, die niemals völlig ausgefüllt werden kann. Niemand

1) Beiträge zur Beantwortung der Frage nach der Nationalität des Nicolaus Copernicus, von R*** (Romer). Breslau, Priebatsch's Buchhandl. 1872. IV, 213 S. 8°.

2) Zum Streit über die Nationalität des Copernicus (Siebel's Hist. Zeitschrift 1872, S. 367—372). 8°.

3) Polen in den Jahren 1766—1768. Aus den Berichten des Thorner Residenten am Warschauer Hofe Dr. S. L. v. Geret. Berlin 1870. II, 115 S. 8°.

wird so wie er das Interesse des Vereins, oft mit Hintansetzung seines eigenen, betreiben können. Er fand immer den rechten Mann für die rechte Stelle, er ging unentwegt dem einmal vorgesetzten Ziele nach, und stellten sich ihm auf dem eingeschlagenen Wege Hindernisse entgegen, die nicht zu bewältigen waren, so fand er auf der andern Seite fast stets den Zugang zu dem, was früher unmöglich geschienen.

Lassen Sie uns zusammenhalten, dass wir in seinem Geiste weiter für das Wohl des Vereines arbeiten, dann werden wir ihm das beste Denkmal setzen, das er selbst sich wünschen würde. In unseren Herzen aber wird er stets lebendig bleiben!

Historische Miscellen.

Von

Armin Wittstein.

1. R. Wolf sagt auf S. 147—148 seiner, mir erst vor wenigen Tagen hinreichend bekannt gewordenen „Geschichte der Astronomie“: „Bei Nacht musste, wie man aus Theon's Commentar zum Almagest erfährt, die Wasseruhr in der Weise aushelfen, dass man die vom Untergang der Sonne am vorhergehenden Abend bis zum Eintreffen des zu fixirenden Momentes aus einem stets voll erhaltenen Gefässe ausgeflossene Wassermenge mit derjenigen verglich, welche man von da hinweg bis zum Sonnenaufgang am folgenden Morgen oder bis zum Sonnenuntergang am folgenden Abend erhielt, je nachdem man ungleiche Stunden oder Aequinoctialstunden erhalten wollte.“

Ich habe seiner Zeit sowohl die „Handtafeln“ des Ptolemaeus, als auch die Commentare des Theòn gründlich durchgesehen, ohne eine Spur einer solchen Angabe darin zu finden, und deshalb in meinem Aufsatze* auch unterlassen, auf ein derartiges Instrument zur Zeitbestimmung einzugehen, dessen Benützung nicht einmal aus einer Andeutung oder aus dem Zusammenhange zu erkennen war. Man konnte (sehr wahrscheinlich) Wasseruhren benützt, oder sich der alten Methode der *συνανατολαί* bedient haben; einen positiven Anhalt dafür, dass es das Eine oder Andere gewesen sei, haben wir in diesem Falle jedoch nicht. Ich fand nur, dass in den betreffenden Schriften die Rede war: von der Dauer des längsten Tages, der Verwandlung der ungleichen Stunden in gleiche, der Reduction auf den gleichförmigen Sonnentag (*ὁμαλὸν νυχθήμερον*), der Reduction der verschiedenen Meridianzeiten auf einander.

Einmal spricht Theon allerdings von einem Instrumente der fraglichen Art (ganz im Vorbeigehen, möchte man sagen) mit den Worten:

* Hist.-lit. Abthlg. d. Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXXII, 6.

Ἐπεὶ δὲ τῶν ἀναδιδομένων χρόνων ὁ μέν ἐςιν ἐξ ὡροσκοπείων ἀναδιδόμενος, ὃν καὶ ἔφαμεν καιρικὸν, etc.

(S. 33 der Halma'schen Ausgabe), und bezieht sich später (S. 35) darauf. Allein hier bedeutet *ὡροσκοπεῖον* soviel wie *ὡρολόγιον*, Uhr, Stundenzeiger, wohl schlechtweg: Sonnenuhr, wie Halma übersetzt. Hätte Theon wirklich eine Wasseruhr gemeint, so würde er dies, denke ich mir, durch den Zusatz *ὑδραυλικόν* ausgedrückt haben*. Ich wende mich nicht dagegen, dass Ptolemaeus und Theon Wasseruhren benützt haben können, sondern nur dagegen, dass sie deren thatsächlichen Gebrauch durch einfache und klare Beschreibung ausser Zweifel gestellt haben.

2. Der (jüngere) Sédillot gedenkt in seinen Matériaux pour servir à l'histoire comparée etc. (Paris, 1845—1849) rühmend einer Abhandlung von A. Jaubert über den Compass, in welchem die Anwendung dieses Instrumentes im 12. Jahrhundert bei den Arabern constatirt werde, und hat mich durch diese ungenaue Ausdrucksweise einige Zeit hindurch in Aufregung versetzt, und zwar ganz unnöthig.

Als ich im Verzeichnisse der Schriften Jaubert's nichts finden konnte, was auf Abfassung einer ähnlichen Arbeit hinwies, veranlasste ich in Paris Nachforschungen nach einer solchen Publication, die ebenfalls zu negativem Resultate führten. Schliesslich musste ich an die Jaubert'sche Ausgabe des Edrîsî** denken, sah diese zum zweiten Male mit grosser Sorgfalt durch und fand auch dieses Mal nur das, was ich bereits wusste, nämlich zwei Stellen, die von magnetischen Bergen handeln und bei Klaproth fast wörtlich reproducirt sind; vom Compass ist nicht im Entferntesten die Rede.

Klaproth sagt selbst, dass er von J. bei seinen Untersuchungen in dankenswerther Weise unterstützt sei, und daraufhin glaubte wohl Sédillot Letzterem gleich eine besondere Arbeit über den Compass zuschreiben zu dürfen.

* *κλεψύδρα* kommt niemals vor. Ideler (Chronologie, I; S. 225—226) spricht sich zwar auch fast genau so aus, wie Wolf, wenn er z. B. die Beobachtung einer Sternbedeckung schildert und kurz vorher drei Stellen des Theon als Belege anführt; allein ich konnte, wie gesagt, nur deren zwei auffinden, mit denen mir überdies so gut wie nichts geholfen war. Nach dem, was er auf S. 230—232 sagt, muss ich annehmen, dass die Wasseruhr — *ὡρολόγιον ὑδραυλικόν* — des Ktesibius (aus Alexandria, etwa 140 v. Chr.) gar nichts mit der, zuerst von Aristophanes erwähnten *κλεψύδρα* zu thun gehabt habe. Die erstere scheint den griechischen Astronomen zu ungenau gewesen zu sein, „denn nirgends ist von ihr beim Ptolemaeus oder einem seiner Commentatoren die Rede". Dagegen können aber die *ὑδρία ὡρόσκοπα* auch *κλεψύδραι* genannt worden sein, wenngleich letztere niemals die hydraulische Uhr des Ktesibius bezeichneten.

** كتاب نزهة المشتاق في اختراق الآفاق تأليف الشريف الادريسي, Géographie d'Édrisi, etc. par P. Am. Jaubert. Paris, 1836—1840. 2 Bde. in 4°, der 1. mit 3 Karten. Bei der zweiten Stelle vermuthet J., dass es sich um Abtrift durch Stromversetzung handle.

Recensionen.

ZANGEMEISTER, **Entstehung der römischen Zahlzeichen.** Berlin 1887. 18 S.

Die Abhandlung, welche wir hiermit unseren Lesern zum gründlichen Studium empfehlen, wurde der Berliner Akademie am 10. November 1887 vorgelegt und ist in deren Sitzungsberichten abgedruckt. Die Bedeutsamkeit der Untersuchung veranlasst uns, nicht auf blosse Erwähnung im Abhandlungsregister uns zu beschränken. Wir erlauben uns vielmehr, ausnahmsweise den Sonderabzug zum Gegenstand eines kurzen Berichtes zu machen.

Herr Mommsen (Die unteritalischen Dialekte, S. 19 und 33) hat über die Entstehung der römischen Zahlzeichen eine Vermuthung ausgesprochen, welche er noch neuerdings (Zahl- und Bruchzeichen in Hermes XXII, 596—614 und ebenda XXIII, 152—156) aufrecht erhält.

Nach seiner Meinung sind I, V, X Nachbildungen des Fingers, der Hand, der Doppelhand, während die älteren Formen von L, C, M aus Buchstaben entstanden, nämlich aus den Aspiraten *chi, theta, phi*, welche in das römische Alphabet darum auch nicht eindrangen.

Wurde dieser Hypothese auch vielfach beigepflichtet, wir konnten uns so wenig mit ihr befreunden, dass wir in unseren Vorlesungen über Geschichte der Mathematik sie schweigend übergingen. Herr Zangemeister widerlegt sie vollends mit schlagenden Gründen, aus welchen wir nur zwei hervorheben wollen: Erstens die unbegreifliche Reihenfolge χ, ϑ, φ, in welcher jene Aspiraten auftreten würden; zweitens die unleugbare Thatsache, dass bei den Etruskern die Zeichen für 50, 100, 1000 ziemlich genau ebenso aussahen wie bei den Römern, während das etruskische Alphabet die mehrgenannten Aspiraten enthält. Unsere persönliche Abneigung gegen jene Hypothese beruhte allerdings auf einem dritten Grunde: Buchstaben statt Zahlzeichen können nur in doppelter Weise entstehen, entweder als Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter (so die sogenannten Herodianischen Zeichen), oder in Benutzung ihrer alphabetischen Reihenfolge (so in Griechenland seit etwa 500 v. Chr.). Worauf fussen die Mommsen'schen Zeichen für 50, 100, 1000?

Die Wucht seiner Einwürfe verstärkt Herr Zangemeister wesentlich durch neue positive Vorschläge. *Decussare* ist bei guten Schriftstellern in der Bedeutung kreuzen in Gebrauch, mag die Kreuzung eine senkrechte oder eine schräge sein. Zugleich ist der Zusammenhang des Wortes mit *decem* unabweisbar. Herr Zangemeister behauptet nun, Verzehnfachung und Kreuzung seien stets verbunden, mit anderen Worten: jede zu einer dekadischen Einheit neu hinzutretende gerade oder gekrümmte Linie verzehnfache das schon vorhandene Zeichen. Mithin werde die 10 aus der 1 durch eine erste Kreuzung, die 100, die 1000 entstehe, wenn eine dritte, eine vierte Bogenlinie sich einfüge. Die Bildungen für 1, 10, 1000, welche so hervortreten, sind von Herrn Zangemeister auf Denkmälern nachgewiesen, ebenso deren Hälften für 5 und 500. Das Zeichen für 100 allerdings ist noch nicht belegt, wohl aber die Hälfte desselben in der Bedeutung 50. Für die Zeichen selbst verweisen wir auf die unserem Berichte zu Grunde liegende Abhandlung.

Wir halten dieses ganze System in seiner Einfachheit für so folgerichtig, dass wir wenigstens nach anderweitiger Erklärung nicht länger forschen.

Herr Zangemeister findet einige Belege auf einer Pariser Gemme, welche in der Ausgabe des Leo Diaconus ed. Hase (Paris 1819) im vergrösserten Maassstabe der Vorrede als Titelvignette beigegeben ist. Diese von Mathematikern unseres Wissens bisher nicht verwerthete Abbildung stellt einen Abacisten vor, der in der Linken eine mit Zahlzeichen bedeckte Tafel hält und mit der Rechten Steinchen auf einen Tisch legt. Der Fundort des Carneols ist gänzlich unbekannt, sofern man nicht gestatten wollte, aus der etruskischen Umschrift Schlüsse zu ziehen.

Ganz gelegentlich spricht Herr Zangemeister auch von *sexcenti* in der Bedeutung sehr viele. In unseren Mathem. Beitr. z. Culturl. haben wir S. 362 vor 25 Jahren bereits angedeutet, dass wir diese Verwendung des Wortes mit dem *ner* der Euphratländer in Verbindung bringen. Herrn Zangemeister war diese Stelle nicht erinnerlich, aber auf dieselbe aufmerksam gemacht, half er uns Beweisstücke für unsere Meinung aufzufinden. Die älteste bekannte Anwendung von *sexcenti* = sehr viele findet sich bei Plautus um 200 v. Chr. Es galt, für jene Zeit die Möglichkeit chaldäischen Einflusses in Rom nachzuweisen. Nun erzählt Valerius Maximus lib. I, cap. 3 § 2: *C. Cornelius Hispallus praetor peregrinus M. Popillio Laenate Cn. Calpurnio coss. edicto Chaldaeos intra decimum diem abire ex Urbe atque Italia jussit: levibus et ineptis ingeniis fallaci siderum interpretatione quaestuosam mendaciis suis caliginem iniicientes.*

Nach Fischer, Römische Zeittafeln (Altona 1846), S. 134 fällt das genannte Consulat auf das Jahr 139 v. Chr. Es ist wohl nicht zu kühn, anzunehmen, dass mehr als 60 Jahre dazu nöthig waren, bis der schädliche Einfluss der Chaldäer sich so kenntlich machte, dass eine Ausweisung erfolgte. Plautus könnte dann eine gerade zu seiner Zeit aufgekommene Redewendung in seinen Lustspielen benutzt haben, was mit dem Wesen eines Lustspiels sich sehr gut vereinbart.

Cantor.

Scholien zur Sphärik des Theodosius, herausgeg. von Friedrich Hultsch. [Des X. Bandes der Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Nr. V.] Leipzig 1887, bei S. Hirzel. (S. 383 bis 446 des Bandes.)

Schon 1886 hat Herr Hultsch am 11. December der Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. über diese Scholien berichtet, welche dem Manuscrit grec 2342 der Pariser Nationalbibliothek entstammen. In seinem Berichte (Ber. philol.-hist. Cl. d. k. G. d. W. 1886, S. 119—155) hat er nächst einer Schilderung jener Scholien, welche als Einleitung in den jetzt vorliegenden Abdruck derselben betrachtet werden darf, eingehendere Untersuchungen der geschichtlich nicht unwichtigen Frage gewidmet, ob Autolykos und Euklid gleichzeitig neben einander, oder der Eine früher als der Andere, als Schriftsteller über Sphärik thätig gewesen sind. Diese Frage hängt nur nebensächlich mit der Sphärik des Theodosius zusammen. Gleichwie Nokk und Heiberg nimmt Herr Hultsch an, es habe schon vor jenen beiden Schriftstellern eine ziemlich entwickelte Sphärik gegeben, nicht blos einzelne Sätze, sondern ein Lehrbuch, aus welchem Manches im Wortlaute in die späteren Schriften überging, bis im I. vorchristlichen Jahrhundert Theodosius die nicht mehr übertroffene letzte Sammlung sphärischer nicht-trigonometrischer Sätze veranstaltete. Theodosius stimmt darum mit Autolykos wie mit Euklid oft genug überein, ohne dass ein weiterer Schluss gerechtfertigt wäre, als der der gemeinsamen Abhängigkeit von einer noch älteren Quelle. Aber an sich ist ja ganz interessant und ein Beitrag zur nichts weniger als feststehenden Gelehrtenchronologie, zu entscheiden, wie es sich mit der Aufeinanderfolge des Autolykos und Euklid verhielt. Herr Hultsch weiss die freilich schon früher geltende, aber ungenügend begründete Meinung, Autolykos habe etwa ein halbes Menschenalter früher als Euklid gewirkt, zu bestätigen. Der Hauptgrund liegt in der etwas alterthümlicheren Form des Autolykos, die keine Berechtigung besass, wenn die Schrift *περὶ σφαίρας κινουμένης* erst nach den Phänomenen des Euklid geschrieben wäre. Sie hätte alsdann einen Rückschritt bezeichnet und wäre kein Denkmal des Ruhmes ihres Verfassers geworden.

Die Scholien selbst sind, wie wir sagten, auf Grundlage eines Pariser Codex, der dem XIV. Jahrhundert entstammt, zum Abdruck gebracht. Sie sind aber auch in einem um 400 Jahre älteren Vaticancodex enthalten, der gleichfalls zur Feststellung des Wortlautes mit benutzt ist. Einzelne Lemmata finden dann noch weit ältere Bestätigung, indem sie mit Sätzen übereinstimmen, welche bereits Pappos unter dem Namen von Lemmata zur Sphärik vor sich hatte. Mit dem Alter gewinnen aber diese Erläuterungssätze einen ihre Veröffentlichung rechtfertigenden Werth, mag auch ihre wissenschaftliche Bedeutung nicht sehr hoch anzuschlagen sein.

Cantor.

Gerbert. Beiträge zur Kenntniss der Mathematik des Mittelalters von Prof. Dr. H. Weissenborn. Berlin 1888, bei Mayer & Müller. VI, 251 S. 6 Figurentafeln.

Als wir 1875 unsere Monographie „Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst" ausarbeiteten, durften wir in Heidelberg den Codex a. V. 7 der Bibliothek des Salzburger Benedictinerstifts zu St. Peter benutzen, und wir bestimmten unter der fachkundigen Beihilfe von Hofrath Zangemeister aus handschriftlichen Gründen die Entstehungszeit jenes Codex auf den Zeitraum zwischen 1100 und 1150. Inzwischen ist es uns gelungen, eine äussere Bestätigung dieser Vermuthung zu entdecken, und da Datirungen von Handschriften unter allen Umständen von Wichtigkeit sind, so benutzen wir die heutige Gelegenheit zur Veröffentlichung jener Thatsachen. Im September 1881, als die Naturforscher-Versammlung in Salzburg tagte, erfuhren wir nämlich bei einem Besuche im St. Petersstifte, dass das Kloster im Jahre 1127 durch einen furchtbaren Brand zerstört wurde. Damals konnten nur wenige Schriftstücke gerettet werden. Man kennt dieselben, und Codex a. V. 7 befindet sich nicht darunter. Von da an wurde nur um so emsiger an der Wiederbeschaffung einer Bibliothek gearbeitet, und es existirte bereits wieder um 1160 ein Katalog, der sich erhalten hat. In ihm kommt aber vor: Hermannus contracus *(sic!)* super astrolabium, d. i. dasjenige Werk, mit welchem Codex a. V. 7 beginnt. Da nun eine anderweitige Abschrift des gleichen Werkes, die mit jenem Katalogeintrag gemeint sein könnte, in St. Peter nicht vorhanden ist, so glauben wir uns berechtigt, eben jenen Codex darunter zu verstehen und anzunehmen, er sei zwischen 1127 und 1160 geschrieben.

Damals entstand, sagen wir, eine Pergamenthandschrift, in welcher der gleiche Schreiber, welcher zuerst ein Werk des Hermannus Contractus copirte, auf Fol. 39 verso mit den Worten: *„Incipit geometria Gerberti"* die Niederschrift eines Werkes begann, welches Fol. 95 verso Zeile 3 v. u. mit dem Worte *„finit"* endigt. Aber der fleissige Schreiber setzte seine Thätigkeit noch fort. An *„finit"* anschliessend begann er die Niederschrift eines Fragmentes, welche bis zum Schlusse von Fol. 101 recto reicht. Von wem dasselbe verfasst sein mag, wissen wir nicht. Der Anfang erinnert freilich inhaltlich an Heron und Vitruvius, muss aber, weil zugleich von Burgundern, Bayern und Arabern die Rede ist, in viel späterer Zeit als jene beiden Schriftsteller entstanden sein. So sagten wir (Agrimensoren, S. 156) in, wie wir glaubten, deutlicher Weise. Herr Weissenborn (Gerbert, S. 93) hat uns leider nicht verstanden, ein Missverständniss allerdings sehr nebensächlicher Natur, vielleicht darin begründet, dass unsere Darstellungs- und Forschungsweise überhaupt nicht das Glück hat, Herrn Weissenborn zu behagen. Er findet die bisweilen verschlungenen Fäden unserer Behauptungen und Folgerungen der Entwirrung bedürftig und ist an anderer Stelle mit der Art nicht zufrieden, in welcher wir Gerbert's Geometrie so obenhin gelesen haben. Ein solches Urtheil ist eigentlich ziemlich unhöflich, aber auch das ist für das uns vorliegende Werk nebensächlich. Bevor wir an dessen eigentliche Besprechung herantreten, müssen wir auch über den Salzburger Codex abschliessend beifügen, dass nach dem genannten Fragmente immer der gleiche Schreiber den Brief des Adelboldus an Gerbert über die Kugelausmessung, dann den Brief Gerbert's an Adelboldus über den Unterschied zwischen Dreiecksfläche und Dreieckszahl, endlich wieder ein kleines astronomisches Fragment abgeschrieben hat. Ein Glossator, der nur wenig später als der Schreiber des Codex gesetzt werden darf, hat überall Bemerkungen hinzugefügt, so zu cap. 2 der Geometrie (wenn wir der der Handschrift nicht angehörenden Capitelnumerirung der Druckausgabe uns bedienen dürfen) eine Bemerkung, welche ihn als Abacisten erkennen lässt; zu cap. 40 eine solche, welche die noch weit wichtigere Folgerung an die Hand giebt, dass damals das Werk des Frontinus über Felderberechnung noch existirte.

Herr Weissenborn stellt nun die Sätze auf: Gerbert habe wahrscheinlich überhaupt keine Geometrie geschrieben, denn seine Schüler reden von einer solchen so wenig als er selbst, die „Geometria Gerberti" insbesondere rühre weder im Ganzen, noch in einzelnen Theilen von ihm her. Sie sei überhaupt kein Ganzes, sondern nur unzusammenhängende Bruchstücke, in einem Codex miteinander und mit anderen Stücken vereinigt, „weil sie damals ‚modern' waren, wie Hermannus Contractus sagt, d. h. mathematische Dinge, die nicht blos von den Alten, sondern auch von den Arabern stammten" (Gerbert, S. 94). Denn: „Die genannte Geometrie zeigt bei genauerem Zusehen genug Spuren arabischen Einflusses, und gerade deswegen konnte man glauben und behaupten, sie rühre von Gerbert her" (Gerbert, S. 95).

Gerbert's Geometrie als solche hat schon Herr Friedlein angezweifelt, an welchen Herr Weissenborn sich vielfach anschliesst, wie er selbst wiederholt ausspricht. Diese Bemängelungen waren uns somit der Hauptsache nach 1875 bekannt, konnten uns aber nicht überzeugen. Wir meinten, wenn man etwa 150 Jahre nach Gerbert in einem Benedictinerkloster ein Werk als „Geometria Gerberti" ausdrücklich und unzweifelhaft bezeichnet, wenn ein Glossator dagegen Nichts erinnert, so sei das immerhin von Bedeutsamkeit. Wir sagten deshalb: „Damals glaubte man mit Bestimmtheit, hier eine Geometrie Gerbert's zu besitzen." Hätten wir sagen sollen: Nur der dumme Abschreiber hat diese verkehrte Meinung gehabt? Auf welchen Grund hätten wir so sagen dürfen? Weil von neun Handschriften die vollständigste, d. i. eben die Salzburger, die mit der Handschrift selbst gleichzeitige Benennung führt, sechs gar keinen Namen nennen, eine Oxforder Handschrift die Worte „*Incipit prologus in Theoriam Gerberti*" enthält und eine Pariser Handschrift am Rande die Worte „*Gerberti liber de Geometria*" geschrieben *à une époque relativement moderne* nach Herrn Olleris?

Aber was ist verhältnissmässig spät?

Wir meinten ferner, die Verschiedenheit der Bestandtheile der Geometrie könne nur günstig für die Auffassung stimmen, dass ein Werk vorliege, weil die Musterwerke jederzeit dieselben Bestandtheile enthalten hätten. Herr Weissenborn stellt das in Abrede. Er sagt, es sei nirgend bewiesen, dass die Heronischen Schriften zusammen ein Werk gebildet haben. Aber sind denn die Einzelschriften des Heron nicht selbst Sammlungen kunterbunten Inhalts? Hat Frontinus nicht in zwei Büchern (Agrimensoren, S. 96) ähnliche Gegenstände vereinigt? Ist im Epaphroditus des Codex Arcerianus weniger Verschiedenartiges zu finden, praktische Feldmessung (Agrimensoren, S. 215 § 39) mit eingeschlossen?

Herr Weissenborn stellt ferner in Abrede, dass Gerbert oder wer nun die Geometria Gerberti zusammenschrieb, den Codex Arcerianus gesehen habe. Erstens sei es nicht erwiesen, dass dieser Codex am Ende des X. Jahrhunderts dem Kloster Bobbio angehört habe, zweitens sei es unmöglich gerade wegen des Schreibfehlers im Nipsus, der uns jene Meinung stützte. Den ersten Einwurf geben wir zu. Verbürgt ist der Besitz des Codex Arcerianus im Kloster Bobbio erst für das Jahr 1493. Wahrscheinlich ist er uns und vielleicht auch Solchen, die mit uns den Schreibfehler im Nipsus zu verwerthen geneigt sind, schon für jene alte Zeit. Die damalige Armuth des Klosters ist jedenfalls kein Gegengrund, denn raubsüchtige Edelleute jener Zeit leerten vielleicht Keller und Speisekammer, aber nicht die Bücherschränke. Nun sagt aber Herr Weissenborn bezüglich jenes Schreibfehlers, das Wegfallen des Wortes *hypotenusae* vor oder nach *podismus* und dessen Einwirkung auf den Verfasser der Geometria Gerberti, dass diese sich ganz anders geäussert haben müsste, als durch Einschaltung der Definition, *podismus* sei gleich *hypotenusa*, im 10. Capitel. Nein, unmittelbar dort, wo die Aufgabe des Nipsus abgeschrieben wurde, hätte der Abschreiber, im Vollgefühle seiner neuen Definition schwelgend, fortwährend *podismus* statt *hypotenusa* sagen müssen; das that er aber nicht, folglich sind die von uns gezogenen Schlüsse falsch. Wir haben auf Alles nur eine Erwiderung, nämlich die, dass es unendlich schwer ist, wenn nicht unmöglich, zu erschliessen, was Jemand in einem angenommenen Falle gethan hätte. Wir würden uns nie gestatten, solche Schlüsse mit mehr als ganz subjectiver Beweiskraft zu ziehen. Wir sind auch nicht in der Lage, sagen zu können, dieser oder jener Briefsteller hätte so oder so schreiben müssen. Wir sind einfach gewöhnt, die Autoren selbst zu fragen, ob sie uns eine Antwort geben wollen, und wenn diese Antwort keinen inneren Widerspruch zeigt, so glauben wir ihr. Von diesem Standpunkte war uns Capitel 10 eine Bestätigung der durch den Salzburger Schreiber anerkannten Zusammengehörigkeit der Geometria Gerberti und zugleich eine Bestätigung dafür, dass der Verfasser den Codex Arcerianus oder einen ihm an dieser Stelle gleichlautenden kannte. Wer diese letztere Annahme vorzieht, verzichtet selbstverständlich auf jeden Datirungsversuch der Nachbildung. Die Verschiedenheiten zwischen dem Codex Arcerianus und der Geometria Gerberti — um auch dieses Umstandes zu gedenken — sind keinenfalls so bedeutend, um die Abhängigkeit der zweiten von dem ersten auszuschliessen, insbesondere, wenn man als deren Verfasser einen Mann annimmt, der im Rechnen geübt, in arithmetischen Begriffen klar war, was von Gerbert, dem Verfasser des Briefes an Constantinus wie des Briefes an Adelboldus, fest genug steht.

In dieser zuletzt erwähnten wissenschaftlichen Eigenthümlichkeit des Verfassers der Geometrie erkennen wir eine weitere Bestätigung seiner Persönlichkeit, und ebenso in der Uebereinstimmung des Briefes an Adelboldus mit der Geometria. Wir haben (Vorles. über Gesch. d. Math., 744—745) diese Uebereinstimmung betont und wiederholen heute, dass wir sie für sehr bedeutsam halten, mag auch Herr Weissenborn (Gerbert, S. 39) es als nahezu unmöglich betrachten, dass Gerbert sich mit Bezug auf die Geometrie so kurz ausgedrückt hätte: „*In his geometricis figuris, quas a nobis sumpsisti.*" Will Herr Weissenborn auch den Brief an Adelboldus für unecht erklären? Er spricht sich nirgend so aus. Dann hat aber doch Gerbert jene Redewendung in seinem Antwortschreiben auf einen uns verlorenen Brief des Adelboldus gebraucht. Wir können in der Geometria die Stelle nachweisen, woher die „Geometricae figurae" genommen sind. Für Herrn Weissenborn ist der Satz ohne angebbare Grundlage. Welches ist da das Wahrscheinlichere?

Wir sind nicht allen einzelnen Ausführungen des Herrn Weissenborn gefolgt; wir beabsichtigen auch nicht es zu thun, weil wir sonst dem Buche ein Buch gegenüberstellen müssten. Unsere bisherigen Erörterungen dürften überdies genügen, unseren Lesern ein Urtheil darüber zu gestatten, wie weit Herr Weissenborn das Recht hat, zu behaupten, er habe die Unechtheit der Gerbert'schen Geometrie bewiesen. Zwei Punkte wollen wir indessen noch hervorheben.

Erstens wird wiederholt auf den Widerspruch aufmerksam gemacht, der zwischen dem neupythagoräischen Satze, die Einheit sei nicht Zahl, sondern Ursprung und Quelle der Zahlen, und dem Rechnen mit der Eins obwalte. Philosophische Anschauungen, müssen wir entgegnen, beeinflussten nie das praktische Rechnen. War doch Nikomachus ein sprichwörtlich geschickter Rechner (ἀριθμέεις ὡς Νικόμαχος ὁ Γερασηνός). Und wenn wir im XIX. Jahrhunderte nach einem Beispiele suchen wollten, so könnten wir an Martin Ohm erinnern, bei welchem die gleiche Schrulle, die Eins sei nicht Zahl, vorhanden war.

Zweitens hat Herr Weissenborn bezüglich der oben besprochenen Nipsus Stelle im Zusammenhange mit der als Geometrie des Boethius betitelten Schrift eine von uns früher gemachte Bemerkung bemängelt. Wir hatten gesagt: bei Boethius hätte Gerbert den Wortlaut „*hypotenusae* *podismus*“ gefunden und würde alsdann erkannt haben, dass „*podismus*“ allein geschrieben ein Schreibfehler sein musste. Herr Weissenborn hat nun mit Recht darauf aufmerksam gemacht, dass bei Nipsus zwei Aufgaben stehen und dass bei Boethius die Worte „*hypotenusae podismus*“ bei derjenigen Nipsus-Aufgabe stehen, die jenen Schreibfehler nicht enthält. Mit Unrecht aber, nach unserem Dafürhalten, wird daraus eine Bemängelung unserer Folgerung abgeleitet. Wenn Gerbert bei irgendwelchem Satze die Wortverbindung „*hypotenusae podismus*“ fand, so zeigte ihm dieselbe, dass „*podismus*“ nicht mit der Bedeutung „*hypotenusa*“ auftreten könne.

Sind wir denn in der für einen Berichterstatter peinlichen Lage, Herrn Weissenborn's Ansichten nirgend beipflichten zu können? So verhält es sich doch nicht. Herr Weissenborn ist z. B. im Recht gegen uns bezüglich eines arabischen Wortes. Es ist vollständig wahr, dass, als wir die Geometrie Gerbert's studirten, der Gebrauch des arabischen Wortes al-'idâda (Thürpfosten, dann Lineal) in einem einzig dem Salzburger Codex angehörenden Capitel uns entging. Wir haben schon seit einigen Jahren diesen Irrthum in unserem Handexemplare unserer Vorlesungen berichtigt. Wirft, fragten wir uns, sobald wir den Irrthum erkannten, dieses Vorkommen eines unzweifelhaft arabischen Wortes unsere Meinung, Gerbert habe Arabisches sich nicht angeeignet, über den Haufen? Wir konnten und können uns nicht entschliessen, so weit zu gehen. Wir haben in unseren Vorlesungen über Gesch. d. Math. S. 739 von dem Salzburger Codex gesagt: Es ist nicht zu verkennen, dass kleine Widersprüche, Wiederholungen und dergleichen den Eindruck hervorbringen, es sei Einzelnes vom Abschreiber verfehlt worden, der z. B. ein Capitel, das im Urtext zuerst an einer Stelle vorkam, dann durch den Verfasser anderswohin gebracht und an der früheren Stelle durchstrichen wurde, zweimal abgeschrieben haben kann. Zu solchen Abschreibersünden rechnen wir auch das Vorkommen des Wortes al-'idâda. War es doch ein ganz ähnlicher Abschreiberfehler, welcher das Wort „Ellipse“ dreimal in eine Abhandlung des Archimed einschmuggelte, in welcher es keinenfalls gestanden haben kann.

Wichtiger erscheint uns und den Charakter einer Entdeckung geradezu zu tragen, was Herr Weissenborn in seinem II. Capitel aus Euklid's Optik anführt. Uns wenigstens war es neu, dass in jener Schrift Aufgaben praktischer Feldmessung gelöst sind, insbesondere Höhen- und Tiefemessungen mit Hilfe des Schattens, eines Spiegels, eines Stabes, und es ist unleugbar, dass ein Einfluss der dort gelehrten Methoden in der Gerbert-schen Geometrie zu Tage tritt. Selbstverständlich ist aber an einen unmittelbaren Einfluss nicht zu denken, und es fragt sich nur darum, ob die Vermittelung eine arabische oder eine römische war. Herr Weissenborn huldigt ersterer Meinung, wir letzterer. Er erkennt für das oft angewandte Quadrat von Holz kein römisches Vorbild; wir verweisen auf den Tetrans der Agrimensoren. Er meint, die Araber hätten Sklaven auf dem Boden herumrutschen lassen, bis sie längs der Seite eines mitgeführten Dreiecks visirend die Höhe eines Thurmes erschauten; wir meinen in diesem Falle überhaupt nicht, wir wissen, dass Epaphroditus im Codex Arcerianus diese Methode beschreibt. Hat darnach Herr Weissenborn das Recht, von nachweislichem arabischem Einflusse zu reden?

Herrn Weissenborn's III. Capitel ist der complementären Multiplication gewidmet und beschäftigt sich auch mit dem von Herrn Henry herausgegebenen Schriftchen Helceph. Wir benutzen wieder die Gelegenheit, um eine hierher gehörige Notiz zu veröffentlichen. Jene Schrift beginnt in der lateinischen Bearbeitung, welche allein bekannt ist, mit den Worten: *Prologus H. Ocreati in Helceph ad Adelhardum Baiotensem magistrum suum.* Dazu machte uns Herr Wattenbach am 24. December 1880 brieflich zwei Bemerkungen. Erstens glaubte er den Namen des Verfassers nicht O' Creat, sondern Ocreatus = der Gestiefelte als irgend einen Beinamen deuten zu sollen. Zweitens machte er darauf aufmerksam, dass Atelhart von Bath nur Bathonensis heissen könnte, während Baiotensem auf einen Adelhard von Bayeux schliessen lasse. In diesem Helceph kommt bekanntlich eine Art complementärer Multiplication bei der Quadrirung einziffriger Zahlen vor, indem $10-a=d$ gesetzt und $a^2=10(a-d)+d^2$ gerechnet wird, ein Verfahren, welches als Regel des Nikomachus bezeichnet wird. Herr Tannery hat die betreffende Stelle des Nikomachus (Buch II Cap. 23) erkannt, in welcher aus den Eigenschaften der arithmetischen Reihe hervorgehoben wird, es sei $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$. Die Folgerung $\alpha^2=(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)+\beta^2$ mit $\alpha+\beta=10$ entspricht dem im Helceph angeführten Verfahren. Herr Weissenborn ist der Ansicht, das Verfahren sei arabisch, Nikomachus von Gerasa werde nur citirt, weil seine Schriften — die eines halben Landsmannes — viel gelesen wurden; Nikomachus selbst habe aber an rechnende Verwerthung seines ganz theoretischen Satzes nie gedacht. Um dieser Ansicht beizustimmen, erwarten wir, dass Herr Weissenborn uns in irgend einem andern arabischen Schriftsteller ein theoretisches Citat aus Nikomachus bei Gelegenheit von Rechnungsvortheilen nachweise. Auch die Behauptung, Nikomachus habe nie über Rechenoperationen geschrieben, steht uns nicht so ganz fest. Wir erinnern an Das, was wir darüber (Vorles. über Gesch. d. Math., S. 478) gesagt haben, und fügen als nachträgliche Unterstützung hinzu, dass Nikomachus sich einmal auf eine von ihm verfasste Einleitung in die Geometrie beruft. Es ist uns persönlich wenigstens gar nicht undenkbar, dass diese einen wesentlich rechnenden Charakter hatte. War doch seit Heron's rechnender Geometrie gerade eine diese Vorkenntnisse umfassende Einleitung Bedürfniss geworden, während zu einer wahrhaft geometrischen Einleitung in die Geometrie Anlass kaum geboten war.

Die eigentliche complementäre Multiplication, und zwar nach der Formel $a.b=10(a-(10-b))+(10-a).(10-b)$, haben wir in einem Codex des

Klosters Salem aus dem Jahre 1200 etwa aufgefunden. Woher stammt dieselbe? Herr Weissenborn sagt: natürlich aus dem arabischen Urtexte des Alchwarizmî, von welchem hier eine Bearbeitung vorliegt, wie schon aus den Anfangsworten *(Incipit liber algorizmi)* hervorgeht. So einfach liegt aber die Sache doch nicht. Als wir im X. Bande der Zeitschr. Math. Phys. jenen Codex zum Abdruck brachten, haben wir eine Anzahl von Anmerkungen beigefügt, welche vielleicht Beachtung von Herrn Weissenborn verdient hätten. Er hätte an ihrer Hand möglicherweise die Ueberzeugung gewonnen, dass der Verfasser kein reiner Algorithmiker war, d. h. keine blosse Ueberarbeitung der Schrift des Alchwarizmî lieferte, des Alchwarizmî, von welchem er gar nicht mehr wusste, dass er eine Persönlichkeit gewesen. Das Wort „*differentia*" ist bald nach Art der Algorithmiker, bald nach der der Abacisten gebraucht. Der christlich-mystische Theil kann gewiss nicht als arabischem Urtexte nachgebildet aufgefasst werden. In heute noch vorhandenen arabischen Schriften, mit Einschluss der beiden durch Fürst Boncompagni herausgegebenen Bearbeitungen des Alchwarizmî, ist aber bis zu sehr später Zeit (Behâ Eddîn, 1547—1622) von complementärer Multiplication keine Rede. Folglich dürfte die Frage nach deren Ursprung noch lange nicht entschieden sein, dürfte die Entscheidung noch immer mit der Frage nach dem Ursprung der complementären Division zusammenhängen. Bei Herrn Weissenborn lautet der Schluss des Capitels, er glaube bestimmt nachgewiesen zu haben, dass mit der complementären Multiplication Nikomachus nicht das Entfernteste zu thun habe, und dass dieselbe nicht auf Römer und Griechen, sondern auf Araber und Inder zurückzuführen sei. Von der complementären Division sagt er, „man könnte ferner die Ueberzeugung hegen, nur dem grübelnden Gehirn eines in allen Rechenkünsten wohlbewanderten Hindu könne diese eigenartige, in ihrer Art scharfsinnige Divisionsmethode entsprungen sein". Von einem bestimmten Nachweis spricht er hierfür noch nicht.

Wir bleiben bei der Thatsache stehen, dass complementäre Division ausschliesslich bei dem Columnenrechnen auf dem Abacus vorkommt, mit diesem auftritt, mit diesem verschwindet. Giebt es aber nur in lateinischer Sprache Schriften über das Rechnen auf dem Abacus? Einst gab es in der St. Marcus-Bibliothek in Venedig auch eine griechische Schrift ähnlichen Inhalts. Bern. de Montfaucon hat sie im vorigen Jahrhundert noch gekannt und spricht von ihr als Abacus in Graeco (Bibliotheca bibliothecarum manuscriptarum I, 468 D). Heute ist diese Schrift leider verloren oder verlegt. Sie kommt wenigstens nach privater Mittheilung des Grafen Soranzo in Venedig in den Handschriftenverzeichnissen der genannten reichen Bibliothek nicht mehr vor.

Cantor.

Die Mathematik auf den Universitäten des Mittelalters, von Dr. Heinrich Suter. Wissenschaftliche Beilage zum Programm der Cantonsschule in Zürich 1887, zugleich als Festschrift zur 39. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Zürich erschienen. Zürich 1887. 58 S.

Herr Suter schliesst seine Abhandlung mit dem Bedauern, Herrn Günther's Geschichte des mathem. Unterrichts im deutschen Mittelalter zu spät erhalten zu haben, um sie noch berücksichtigen zu können. Wir sind überzeugt, dass Herr Günther ein gleiches Bedauern bezüglich der Suter-schen Abhandlung hegen wird, und wir selbst schliessen uns vollkommen dem von Herrn Suter nur als Hoffnung ausgesprochenen Urtheil an, „dass die beiden Schriften sich in manchen Punkten fruchttragend für die mathematisch-historische Forschung ergänzen“.

Herr Suter hat planmässig ausgeschlossen, was an mathematischem Unterrichte ausserhalb der Universitäten ertheilt wurde. Er hat dafür seine Untersuchung auf sämmtliche Universitäten ausgedehnt und aus ihren Statuten, welche er in seltener Vollständigkeit durchforschte, die mathematischen Lehren entnommen, die gefordert wurden, sofern ein akademischer Grad, Baccalaureat oder Licentiat, erlangt werden wollte. Dass auch Herr Suter gleich Herrn Günther einleitungsmässig über Entstehung und Organisation der Universitäten des Mittelalters und über die Artistenfacultät sich verbreitete, liegt in der Natur der Sache begründet.

Vergleichen wir an der Hand von Herrn Suter's Darstellung den Zustand unserer Wissenschaft an den einzelnen Hochschulen, so kommen wir zu dem gleichen Ergebnisse, welches wir Herrn Günther infolge seines enger gefassten Themas halbwegs auf guten Glauben zugestehen müssen: dass Wien die vorzugsweise mathematische Universität des Mittelalters war, wenn auch dort der äusserste Punkt, bis zu welchem der Unterricht sich erstreckte, nur niedrig lag. Von Büchern des Archimed oder gar des Apollonius, die irgendwo in Vorlesungen erklärt worden wären, ist nicht die Rede. Potenzrechnung unter dem Namen „Algorithmus proportionum“, Geometrie nach Euklid, etwas Trigonometrie, soweit sie zur Astronomie, beziehungsweise zur judiciären Astrologie unentbehrlich ist, coordinatenmässig gezeichnete Curven zur Versinnlichung physikalischer Vorgänge unter dem Namen „Latitudines formarum“ — das sind die lange nicht überall erreichten Gipfelpunkte.

Herr Suter lässt es an neuen Ergebnissen nicht fehlen. Die Zurückverfolgung der „Latitudines“ auf Richard Suisset, der Nachweis trigonometrischen Wissens in England, die mindestens wahrscheinlich gemachte Identification des Johan von London mit Johan Peckam dürften nunmehr der Geschichte erworben sein.

Wir glauben damit hinlänglich das Endurtheil begründet zu haben, dass die 39. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner allen

Grund bessass, sich durch diese ihr gewidmete Festschrift geehrt zu fühlen.

CANTOR.

Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525, von Dr. SIEGMUND GÜNTHER, o. ö. Professor an der technischen Hochschule in München. VI, 408 S. A. Hofmann & Co., Berlin 1887. (III. Band der Monumenta Germaniae Paedagogica, unter Mitwirkung einer Anzahl von Fachgelehrten herausgegeben von KARL KEHRBACH.]

Als wir im XI. Bande dieser Zeitschrift über Quételet's Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges, im XXIII. Bande über den von Herrn Rudolf Wolf bearbeiteten, die Astronomie betreffenden Theil der Geschichte der Wissenschaften in Deutschland berichteten, haben wir beidemal die Frage verneint, ob es möglich sei, die Geschichte mathematischer Disciplinen in einem bestimmten Lande für sich zu behandeln. Eine ganz ähnlich lautende Frage würden wir heute aufwerfen können, würden wir wieder verneinen müssen. Wie der Unterricht in einem Wissenszweige sich da und dort gestaltet, hängt neben dem besonderen Wissenszweige, der aus sich heraus die Methode, nach welcher er gelehrt werden will und soll, beeinflusst, auch von dem zur Zeit am gleichen Orte üblichen Unterrichtswesen im Allgemeinen ab. Eine logische Arbeitstheilung erforderte mithin zuerst eine Darstellung des deutschen mittelalterlichen Unterrichts überhaupt, an welche alsdann kürzer gefasste Darstellungen des Unterrichts in einzelnen Fächern sich angliedern konnten.

Eine solche Unterrichtsgeschichte fand aber Herr Günther nicht vor, und somit war er genöthigt, sie mit der ihm eigentlich gestellten Aufgabe zu verbinden. So entstand ein Werk, welches wir lieber mit dem Titel versehen wünschten: „Geschichte des Unterrichts überhaupt und namentlich des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter.“ Je früher die Zeit fällt, um welche es sich handelt, um so mehr ist das Allgemeine betont. Je näher der Verfasser dem Ende des Mittelalters kommt, um so genauer tritt der besondere mathematische Unterricht hervor.

Der Grund davon ist ein doppelter. Erstens fliessen die Quellen um so spärlicher, je höher hinauf wir in der Zeit steigen, und um einige Gleichmässigkeit in der einzelnen Zeiträumen gewidmeten Ausführlichkeit zu erhalten, musste am Anfang nicht streng zur Sache Gehörendes beigezogen werden, wie es aus dem erörterten Fehlen einer allgemeinen Unterrichtsgeschichte sich auch rechtfertigte. Zweitens nimmt thatsächlich von Jahrhundert zu Jahrhundert der mathematische Unterricht zu und liefert somit dem, der von ihm zu berichten hat, einen immer reichhaltigeren Stoff. Ist diese Zunahme dazu bestimmt, anzudauern? Wird nicht irgend einmal der Augenblick eintreten, von welchem an das mathematische Interesse wieder erlahmt? Diese Frage hat Herr Tannery bekanntlich aufgeworfen (vergl. S. 28 dieses Bandes); Herr Günther brauchte sie nicht in Erwägung zu ziehen, da bis zum Jahre 1525, dem Schlusspunkte seines Werkes, nur immer mehr und mehr Kreise der Mathematik gewonnen werden. In der Klosterschule diente der mathematische Unterricht kaum einem andern Zwecke als dem, die Festrechnung vollziehen zu können. Die Universität erkannte in der Mathematik die längste Zeit des Mittelalters hindurch nur den Weg zur Philosophie. Selbstzweck wurde dieses Studium kaum dann, als eigene Fachprofessuren der Mathematik gegründet wurden. Die Masse der Bevölkerung endlich erfuhr, dass mathematisches Wissen, freilich einfachster Art, unentbehrlich sei, als Volksschule und Privatlehrer sich dieses Unterrichtszweiges bemächtigten.

Wir haben in diesen wenigen Sätzen eigentlich schon den Gedankengang des Günther'schen Werkes dargelegt, wie sofort deutlich wird, wenn wir nur die Ueberschriften mittheilen, unter welche der Verfasser seinen Stoff geordnet hat:

Capitel I. Das Unterrichtswesen der ältesten Zeit und die kaiserlichen Palastschulen. Beda und Alkuin. — Capitel II. Der mathematische Unterricht an den Kloster-, Stifts- und Stadtschulen. — Capitel III. Uebersetzungszeitalter und scholastische Periode; das Quadrivium als Lehrgegenstand an den Hochschulen. — Capitel IV. Der Aufschwung der Mathematik zum selbstständigen akademischen Nominalfach. — Capitel V. Verbreitung arithmetischer und geometrischer Kenntnisse auf dem Wege privater Unterweisung.

Dass der Stoff nicht durchweg neu sein kann, bedarf bei einem geschichtlichen Werke so wenig der Erwähnung als der Entschuldigung. Weit eher dürften wir lobend betonen, dass es Herrn Günther gelungen ist, Dinge aufzustöbern, welche längst gedruckt, dennoch für die Geschichte der Mathematik noch nicht benutzt worden waren, dass er andererseits auch aus Archiven zu schöpfen gewusst hat, wobei namentlich der Localpatriotismus des geborenen Nürnbergers in den nutzbringenden Dienst des Geschichtsschreibers trat.

Dass wir mit kritischer Loupe auch Mängel nachzuweisen im Stande wären, ist ebenso selbstverständlich; wir wollen jedoch nicht durch Nörgeleien uns und unseren Lesern die Freude an dem im Ganzen wohlgelungenen Werke verderben.

Nur drei Einzelheiten möchten wir besonders hervorheben. Dass Hrotsvitha, die dichtende Nonne von Gandersheim aus dem X. Jahrhundert, mit der Arithmetik des Boethius wohlbekannt war, dürfte den meisten Mathematikern ebenso neu sein, als es uns war. S. 83 flgg. sind die Beweisstellen abgedruckt.

S. 285 Note 2 und S. 352 Note 3 hat Herr Günther bei Gregorius Reusch den indischen Näherungswerth $\pi = \sqrt{10}$, in der Geometria deutsch den altorientalischen Näherungswerth $\pi = 3$ zu enthüllen verstanden. Beide Vorkommen sind wohl vorher nicht bemerkt worden.

S. 303 flgg. ist von dem ersten deutschen Lehrbuche des Rechnens gehandelt, welches 1483 erschienen sei, und für dessen Verfasser der Buchdrucker Petzensteiner gehalten wird. Hier sind wir durch Hrn. Unger in Leipzig-Reudnitz, Verfasser einer nächstens im Druck erscheinenden Geschichte der Rechenkunst in Deutschland seit 1500, in die Lage versetzt, eine Richtigstellung zu geben. Herr Unger schreibt uns:

1. Das älteste deutsche Rechenbuch, ein Pergamentdruck, erschien 1482 in Bamberg.

2. Heinrich Petzensteiner ist der Drucker und Ulrich Wagner, ein Nürnberger Rechenmeister, der Verfasser. Von diesem Werke existiren nur neun kleine Pergamentstreifen in der königl. Bibliothek in Bamberg. Eine Notiz findet sich im Serapeum von 1847 S. 126.

3. Das Rechenbuch von 1483 ist bei dem gleichen Drucker und mit denselben Typen gedruckt wie das von 1482. Der Inhalt beider ist nicht gleichlautend.

Cantor.

Joachim Jungius und die Erneuerung atomistischer Lehren im 17. Jahrhundert. Ein Beitrag zur Geschichte der Naturwissenschaft in Hamburg von Dr. Emil Wohlwill. Sonderabdruck aus Bd. X der „Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften“ (Festschrift zur Feier des 50jährigen Bestehens des Naturwissenschaftlichen Vereins in Hamburg). Hamburg 1887, L. Friedrichsen & Co. 66 S.

Joachim Jungius (1587—1657), einen einst hochberühmten, 150 Jahre nach seinem Tode fast verschollenen Gelehrten wieder entdeckt zu haben, ist ein Verdienst Goethe's. Goethe's Fragmente über Jungius und zugleich eine eingehende Untersuchung über ebendenselben veröffentlichte Guhrauer 1850. Ihm folgte Avé-Lallemant 1863 mit der Herausgabe von Jungius' Briefwechsel, und auf diese Vorarbeiten stützt sich die Biographie von Rich. Hoche in der Allgemeinen deutschen Biographie XIV, 721—726. In allen diesen Schriften spielt der Brand von 1691 eine grosse Rolle, bei welchem etwa drei Viertel des schriftlichen Nachlasses vernichtet wurden. In den verbrannten Heften ging, so meinte man, das Meiste zu Grunde, welches, wenn es im Druck erschienen wäre, die hohe Achtung, in der Jungius bei seinen Zeitgenossen stand, als vollberechtigt erwiesen hätte. An dieser Meinung übt Herr Wohlwill eine vernichtende Kritik. Wir halten es mit ihm für undenkbar, dass die Schüler und Verehrer des Jungius zuerst seine minder hervorragenden, minder druckbereiten Schriften herausgegeben, das Bessere, Vollendetere dagegen aufgespart haben sollten. Sind aber die gedruckten Schriften des Jungius, sind die etwa 100 Fascikel, welche aus dem Brande von 1691 gerettet auf der Hamburger Stadtbibliothek sich befinden, wenig mehr als Materialsammlungen, so werden die verbrannten Papiere gleicher Natur gewesen sein. Eine erneute Jungius-Forschung wird daher in erster Linie an das gedruckt Vorhandene anknüpfen müssen, und in diesem Sinne hat Herr Wohlwill besonders des Jungius Hamburger Disputationen gründlich untersucht. Er fand dabei, dass Jungius unzweifelhaft zu den entschiedensten Gegnern der missverstandenen Aristotelischen Lehren seiner Zeit zu rechnen ist, und dass er in gleiche Linie mit Sennert gehört, dessen Verdienste um die Erneuerung einer wissenschaftlichen Atomistik Herr Lasswitz in ein so deutliches Licht zu setzen gewusst hat.

Cantor.

Pour l'histoire de la science hellène, par Paul Tannery. De Thalès à Empédocle. Paris 1887. Felix Alcan éditeur. VII, 396 S.

Zu derselben Zeit, während welcher Herr Tannery im Bulletin Darboux die Aufsätze zum Abdruck brachte, welche wir nach ihrer Vereinigung in Buchform unter dem Titel „La géométrie grecque etc." weiter oben (S. 27—31) besprochen haben, liess der gleiche unermüdliche Verfasser in der Revue Philosophique eine andere Reihe von Aufsätzen erscheinen, welche jetzt gleichfalls als stattlicher Band in unseren Händen sich befinden.

Herr Tannery unterscheidet in der Geschichte der griechischen Literatur vier Zeiträume von je drei Jahrhunderten. Die hellenische Zeit rechnet er in runden Zahlen von 600 bis 300, die alexandrinische von 300 bis zu Christi Geburt; daran schliesst sich für ihn die griechisch-römische Zeit bis 300, endlich die Zeit des Rückganges und der Commentatoren bis zum Jahre 600.

Die hellenische Zeit allein ist in diesem Bande behandelt, und zwar diejenigen Schriftsteller der genannten Zeit, welche von Thales bis zu Empedokles († 424) als Naturphilosophen bezeichnet werden dürfen, d. h. deren Lehre ein ganzes System zur Erklärung der Entstehung und der Gesetze des Weltalls bildet.

Herr Tannery ist nicht der Erste, der diese Aufgabe sich gestellt hat. In Herrn Diels, Herrn Teichmüller, Herrn Zeller — um nur die neuesten Forscher zu nennen — verehrt er Vorgänger, an die er häufig genug sich anschliesst. Aber nicht minder häufig geht er seine eigenen Bahnen und kommt zu Folgerungen, welche von denen seiner Vorgänger wesentlich abweichen.

Die Alten haben nicht minder eine ähnliche Zusammenstellung versucht, und wäre das Werk des Theophrastos von Lesbos über die Physiker, wie er jene Philosophen nannte, auf uns gekommen, so bedürfte es vielleicht nur geringer Mühe, um zu ermitteln, wie weit in demselben der unparteiische Geschichtschreiber vor dem philosophischen Parteigänger, oder dieser vor jenem das Uebergewicht besass. Leider entging das Werk des Theophrastos nicht dem Schicksal, welches auch die Geschichte der Geometrie seines Zeit- und Schulgenossen Eudemos von Rhodos traf. Nur in Spuren besitzen wir es, in Auszügen verschiedenen Ursprunges und dementsprechend verschiedenen Werthes. Die Doxographen nennt man heute die Schriftsteller des Alterthums, welche ihre Aufgabe darin fanden, die Meinungen der verschiedenen Schulen zu schildern und unter einander zu vergleichen.

Herr Tannery widmet nun sein I. Capitel den Doxographen selbst, sein II. Capitel der Chronologie derjenigen Philosophen, mit denen er sich in den folgenden Capiteln III bis XIII eingehend beschäftigt. Im Einzelnen lauten die Ueberschriften dieser Capitel: III. Thales von Milet. IV. Anaximander von Milet. V. Xenophanes von Kolophon. VI. Anaximenes. VII. Herakleitos von Ephesos. VIII. Hippasos und Alkmeon. IX. Parmenides von Elea. X. Zenon von Elea. XI. Melissos von Samos. XII. Anaxagoras von Klazomene. XIII. Empedokles von Agrigent. Jedem Capitel lässt Herr Tannery eine sehr schätzenswerthe Uebersetzung der Stellen folgen, in welchen die Doxographen über die betreffende Persönlichkeit sich äusserten, sowie der Fragmente der Philosophen selbst, soweit sie in Mullach's bekannter Sammlung herausgegeben sind.

Wir beabsichtigen keineswegs, Herrn Tannery Schritt für Schritt zu folgen. Seine Sätze einfach zu wiederholen widerstrebt uns; kritisch an dieselben heranzutreten sind wir nicht vorbereitet, da die griechische Philosophie für uns niemals einen Gegenstand eingehenderen Studiums bildete, es sei denn bezüglich derjenigen Persönlichkeiten, welche auch als Mathematiker sich hervorthaten. Nur von einigen dieser Männer soll also unsere Besprechung handeln.

Gleich bei Thales von Milet entfernt sich Herr Tannery von den landläufigen Ansichten. Darin stimmt er zwar mit Herrn Diels, dessen meistens abschliessender Arbeit „Chronologische Untersuchungen über Apollodor's Chronika“ im Rheinischen Museum für Philologie, Neue Folge, Bd. XXXI (1876) er in vollem Maasse gerecht wird, überein, dass der sogenannten Thaletischen Sonnenfinsterniss für die Bestimmung der Lebenszeit des Thales mehr Gewicht beizulegen sei, als Geburts- und Todesjahren, aber über jene Sonnenfinsterniss selbst ist er abweichender Meinung. Die Griechen — darüber ist man jetzt ziemlich einig — suchten womöglich eine hervorragende Leistung eines bedeutenden Mannes chronologisch zu bestimmen. Dieser Zeitpunkt galt ihnen dann als der Gipfelpunkt, ἀκμή, seiner Thätigkeit und wurde auf sein 40. Lebensjahr versetzt, d. h. 40 Jahre früher nahm man seine Geburtszeit an. So wird es auch bei Thales gewesen sein. Nun fanden Sonnenfinsternisse statt am 30. September 610, im Jahre 597 und am 28. Mai 585. Herr Tannery hält die erstgenannte für die von Thales vorverkündigte, weil Herodot dieselbe auf den Tag einer Schlacht zwischen dem Lyderkönig

Alyattes und dem Mederkönig Kyaxares verlegt. Kyaxares regierte aber nur bis 596 spätestens, worauf Astyages ihm auf dem Throne folgte. Herr Tannery spricht damit nur eine Behauptung aus, welche Oltmanns in den Abhandl. Berl. Akad. 1812 vertheidigte. Die spätere Ansicht, Thales habe die Finsterniss vom 28. Mai 585 vorausgesagt, stützt sich, wie Herr Gelzer (Rhein. Mus. f. Philol., Neue Folge, XXX, 264—268) sehr übersichtlich zusammengestellt hat, erstens auf den Umstand, dass andere Schriftsteller als Herodot die Schlacht durch Astyages geschlagen sein lassen, zweitens auf den Nachweis eines zweiten Irrthums des Herodot bei einem Zeitgenossen jener Schlacht, drittens auf den von Astronomen wie Airy und Hansen gelieferten Nachweis, dass nur die Sonnenfinsterniss von 585, nicht aber die von 610 an dem Schlachtorte als eine totale gesehen werden konnte. Ist aber diese Sonnenfinsterniss von 585 die ἀκμή des Thales, so kommt seine Geburt auf 624 oder 625, d. h. auf das 1. Jahr der 39. Olympiade, wie Apollodor nach der einleuchtenden Correctur des Herrn Diels behauptete. Wir bleiben der Ansicht, Thales habe die Finsterniss von 585 vorausgesagt. Ob die Geburt auf 624 zurückzurechnen oder ob das berichtete Datum von 640 anzunehmen sei, scheint uns weniger feststehend. Endlich bezüglich des Irrthums des Herodot wagen wir einen schüchternen Hinweis darauf, dass der Name des Kyaxares in der medischen Königsfamilie vielleicht wiederholt auftritt, dass z. B. nach der Cyropädie auch ein Sohn des Astyages so hiess und der in jener Schlacht siegreiche Kyaxares nicht der König gewesen zu sein braucht.

Bei Anaximander von Milet äussert Herr Tannery (S. 86 Note 3) eine gelegentliche Bemerkung, welche uns anmuthet: seine ὑποτύπωσις γεωμετρίας, von welcher Suidas berichtet und mit welcher man nichts Rechtes anzufangen weiss, beziehe sich ohne Weiteres auf die Erdtafel, von deren Anfertigung durch Anaximander Strabon und Andere berichten.

Als eines der schönsten Capitel erkennen wir das X. über Zenon von Elea, S. 247—261. Haben auch andere Schriftsteller vor Herrn Tannery zu zeigen gesucht, dass Zenon, ohne Mathematiker zu sein, deutliche Spuren seines Einflusses in der Geschichte der Mathematik hinterliess, so hat Herr Tannery zuerst unter den Schriftstellern, die uns persönlich wenigstens bekannt geworden sind, den Nachweis geliefert, gegen wen Zenon's bekannte Schlüsse sich richteten, wodurch auch ihre Bedeutung klarer wird. Zenon schrieb gegen die Pythagoräer, und seine Absicht ging nicht etwa dahin, die Bewegung zu leugnen, sondern nur auf die Widersprüche aufmerksam zu machen, welche unabweisbar hervortreten, sowie man mit den Pythagoräern untheilbare, aber doch eine Grösse besitzende Elemente des Raumes, der Zeit, der Bewegung annimmt.

Noch ein letzter Abschnitt des Tannery'schen Buches fordert unsere Besprechung, sein zweiter Anhang: „Sur l'arithmétique Pythagorienne", S. 369—391. Das geschichtlich Gesicherte in diesem Abschnitte ist die mit

Anmerkungen versehene Uebersetzung eines arithmetischen Fragmentes des Speusippos, auf welches Herr Tannery schon 1883 in einem wenig verbreiteten Aufsatze aufmerksam gemacht hatte und welches nunmehr dem allgemeineren Gebrauche übergeben ist. Aber auch die Folgerungen, welche Herr Tannery zieht, stimmen allzusehr mit unseren eigenen Ansichten überein, als dass wir sie nicht billigen sollten. Sie gipfeln dahin, dass, wenn die Arithmetik des Nikomachos, weit später als die des Euklid geschrieben, von dieser wesentlich abweicht, man doch keineswegs schliessen dürfe, die Euklidische Arithmetik stehe älteren Zusammenfassungen dieser Wissenschaft am nächsten. Im Gegentheil, gerade Euklid wich in seinen arithmetischen Büchern nach Form wie nach Inhalt gewaltig von seinen Vorgängern ab und Nikomachus lenkte wieder in die alte Bahn ein.

Unsere Leser werden aus den Bemerkungen, welche wir hier in geringer Zahl niederlegten, die ganze Bedeutung auch dieses Buches unseres gelehrten Freundes zu schätzen im Stande sein, eine Bedeutung, die wir selbst nicht hoch genug anschlagen zu können glauben, auch wenn wir nicht überall beipflichten können.

Cantor.

Die Hypothesis in Platon's Menon. Von Oberlehrer Carl Demme. Osterprogramm der Annenschule (Realgymnasium) zu Dresden-Altstadt. 22 S. [1888. Progr. Nr. 522.]

Seit A. Benecke 1867 seine Abhandlung über die geometrische Hypothesis in Platon's Menon veröffentlichte, welche im XIII. Bande dieser Zeitschrift, Literaturzeitung S. 9—12 eingehend besprochen ist, schien wenigstens für die meisten Forscher, welche die Benecke'sche Untersuchung studirten, die früher vielumstrittene Frage erledigt, und auch Referent ist seitdem unverändert der damals ausgesprochenen, im Ganzen beistimmenden Meinung treu geblieben.

Neuester Zeit hat Herr Carl Demme die Stelle einer wiederholten Untersuchung unterworfen, und dieser den Lesern der histor.-literar. Abtheilung wohlbekannte Gelehrte hat sich eine Auffassung gebildet, welche in wenigen, aber bedeutsamen Punkten von der Benecke's abweicht und welche er in dem heute vor uns liegenden Programm vertritt.

Herr Demme fasst nämlich (S. 19 letzter Absatz) die Worte Platon's: *εἰ μὲν ἔστι τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾖ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστι ταῦτα παθεῖν*, nicht so auf, dass das darin von dem Quadrat in seiner Umwandlung zum Dreieck Ausgesagte eine nothwendige Bedingung sei, sondern nur eine charakteristische Eigenschaft. Ein Diorismus, als dessen ältestes Beispiel man die Menonstelle anzuführen pflegt, sei folglich hier überhaupt nicht vorhanden.

Wir gestehen offen, dass es uns nicht gelingen will, in Herrn Demme's Meinung voll einzudringen. Vielleicht geht es anderen Lesern seiner Abhandlung besser, und lesenswerth ist sie unter allen Umständen, auch wenn man in dem Hauptgegenstande sich nicht überzeugt findet.

Herr Demme hat nämlich in seine Untersuchung eine Anzahl von Nebenbemerkungen verflochten, deren Interesse ein durchaus selbständiges ist, und die, vielleicht zum Schaden der Verständlichkeit der Abhandlung, fast überwuchern. Wir wollen nur zwei dieser Einschaltungen hervorheben, die wir für besonders wichtig halten.

Theorem und Problem der Griechen decken sich nicht mit unseren Ausdrücken Lehrsatz und Aufgabe. Beim Theorem handelt es sich um Eigenschaften, die einem Raumgebilde wesentlich sind, nicht anders sein können; beim Problem handelt es sich um Erfüllung von Forderungen unwesentlicher Art. Ueber einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck herzustellen ist ein Problem, denn man kann auch andere Dreiecke als gleichseitige über derselben Strecke zeichnen. Ueber der Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, welches zugleich gleichwinklig sei, ist kein Problem, weil kein gleichseitiges Dreieck nicht gleichwinklig ist. Dagegen ist wieder Problem: über einer Strecke ein gleichseitiges Viereck zu zeichnen, welches zugleich gleichwinklig sei, weil neben dem Quadrate Rhomben möglich sind.

Auch in dem Gebrauche des Artikels decken griechische und deutsche Sprache sich nicht. Eine gegebene Grösse ist dem Griechen als gegeben auch bestimmt; er verwendet daher bei ihr den bestimmten Artikel: *ἐπὶ τῆς δοθείσης ευθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.* Der Deutsche legt mehr Gewicht darauf, dass die gegebene Grösse eine an sich beliebige Länge besitzen darf, also immerhin unbestimmt bleibt; er verwendet daher den unbestimmten Artikel: über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. Februar bis 31. Mai 1888.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-naturwissensch. Cl. 1887, I u. II. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1887, 3. Heft und Jahrg. 1888, 1. Heft. München, Franz. 2 Mk. 40 Pf.

Sitzungsanzeiger der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 1888, Nr. 1. Leipzig, Freytag. compl. 8 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Cl. Abth. II. 96. Bd., 2., 3., 4. u. 5. Heft. Ebendas. 20 Mk.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, herausgeg. vom hydrogr. Amt d. Admiralität. 16. Jahrg. 1888. 1. Heft. Berlin, Mittler & S. halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Königreich Preussen während des Jahres 1886. Herausgegeben von W. v. Bezold. Berlin, Asher & C. 18 Mk.

Astronomisches Jahrbuch für 1890 nebst Ephemeriden d. Planeten 1—265 f. 1888. Herausgeg. v. F. Tietjen. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Die veränderl. Tafeln des astron. u. chronolog. Theils des königl. preuss. Normalkalenders f. 1889. Herausgeg. v. W. Förster u. P. Lehmann. Berlin, statist. Bureau. 5 Mk.

Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 18. 4. Bd. 5. St. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Beobachtungen des astrophysikalischen Observatoriums zu O Gyalla. Herausgegeben von N. v. Konkoly. 9. Bd. Halle, Schmidt. 10 Mk.

Beobachtungen d. kaiserl. Universitäts-Sternwarte zu Dorpat. 17. Bd. Leipzig, Köhler. 15 Mk.

Magnetische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums in den Jahren 1884—1885. Herausgeg. von J. Mielberg. Petersburg, Eggers & C. 3 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben v. A. Krüger. 119. Bd. Nr. 1. Hamburg, W. Mauke & S. compl. 15 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgeg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 22. Jahrg. (1887). 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn, red. v. L. Fröhlich. 5. Bd. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begr. v. Ohrtmann, fortges. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17. Bd. (1885). 2. Heft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Beiblätter zu Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. v. G. u. E. Wiedemann. 12. Bd. 1. Heft. Leipzig, Barth. compl. 16 Mk.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Weissenborn, H., Gerbert. Ein Beitrag zur Kenntniss der Mathematik d. Mittelalters. Berlin, Mayer & Müller. 9 Mk.

Lehmann, E., De la Hire und seine sectiones conicae. 1. Thl. Leipzig, Hinrichs. 1 Mk. 20 Pf.

Franz, Gedächtnissrede auf den verst. Königsberger Astronomen E. Luther. Königsberg, Koch. 25 Pf.

Kahlbaum, A., Aus der Vorgeschichte der Spectralanalyse. Vortr. Basel, Schwabe. 1 Mk.

Reine Mathematik.

Hoesch, L., Ueber die Coefficienten von $\Delta^n x^k$ und damit verwandte Zahlenverbindungen. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Wulfinghoff, R., Invariantenrechnung, besonders über die gegenseitige Abhängigkeit der Concomitanten einer binären Form. (Dissert.) Ebendas. 1 Mk.

Redlich, A., Praktische Anleitung zur algebraischen Lösung der Gleichungen höherer Grade nebst Beispielen. Breslau, Aderholz. 4 Mk.

Sickenberger, A., Die Determinanten in elementarer Darstellung. München, Ackermann. 1 Mk. 60 Pf.

Buka, F., Projectivische Maassstäbe. Ein Hilfsmittel zum Studium der synthetischen Geometrie. Berlin, Winckelmann & S. 2 Mk.

Götting, E., Bestimmung einer spec. Gruppe nichtalgebr. Minimalflächen, welche reelle algebr. Curven enthalten. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Hormann, G., Ueber die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide bei gegebenen Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen. (Dissert.) Ebendas. 1 Mk.

Breuer, A., Constructive Geometrie der Kegelschnitte aus deren Focaleigenschaften. Eisenach, Bacmeister. 1 Mk. 60 Pf.

Beez, R., Ueber Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie. Plauen, Neupert. 2 Mk.

Bär, A., Parabolische Coordinaten in der Ebene und im Raum. (Dissert.) Berlin, Mayer & Müller. 1 Mk. 60 Pf.

Kiefer, A., Ueber die geraden Kegel und Cylinder, welche durch gegeb. Punkte d. R. gehen oder gegeb. Gerade d. R. berühren. Frauenfeld, Huber. 1 Mk. 60 Pf.

Brockmann, J., Sammlung von Aufgaben aus allen Gebieten der Elementarmathematik. Paderborn, Schöningh. 1 Mk.

Enholtz, C., Lehrbuch der elementaren Mathematik. 1. Thl. Arithmetik, 3. Lief. (Schluss.) Aarau, Sauerländer. 1 Mk. 20 Pf.

Fischer, F., Anfangsgründe der Mathematik für höhere Schulen. 3 Theile. Leipzig, Grunow. 6 Mk. 50 Pf.

Euclidis opera omnia, ed. L. Heiberg et H. Menge. Vol. V. Leipzig, Teubner. 7 Mk. 50 Pf.

Angewandte Mathematik.

Goldschmidt, V., Ueber Projection und graphische Krystallberechnung. Berlin, Springer. 6 Mk.

Petersen, J., Lehrbuch der Dynamik fester Körper. Kopenhagen, Höst. 5 Kr.

Grofe, G., Ueber die Pendelbewegung an der Erdoberfläche. Dorpat, Karow. 1 Mk. 20 Pf.

Rausenberger, O., Lehrbuch der analytischen Mechanik. 1. Bd. Mechanik der materiellen Punkte. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Weyrauch, J., Beispiele und Aufgaben zur Berechnung statisch bestimmter Träger. Ebendas. 16 Mk.

Castigliano, A., Theorie der Biegungs- und Torsionsfedern. Aus d. Italien. übers. v. R. Totz. Wien, Gerold. 3 Mk.

Israel-Holzwart, K., Beiträge zur Anwendung unendlicher Reihen für die Bahnberechnung von Planeten und Kometen. Leipzig, Bach. 2 Mk. 40 Pf.

Thurein, H., Elementare Darstellung der Mondbahn. (Dissert.) Berlin, Gärtner. 1 Mk.

Bauernfeind, C. v., Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestr. Refraction. 3. Mitth. (Bayer. Akad.) München, Franz. 1 Mk. 60 Pf.

Miller, A., Ueber die Bestimmung des longitudinalen Elasticitätsmodulus. Ebendas. 1 Mk. 70 Pf.

Orff, C. v., Telegraphische Längenbestimmungen für die königl. Sternwarte zu Bogenhausen. 1. Thl. Ebendas. 5 Mk.

Weber, R., Aufgaben aus der Elektricitätslehre. Berlin, Springer. 3 Mk.

Wronsky, R., Das Intensitätsgesetz und die Gleichartigkeit der analytischen Formen in der Lehre von der Energie. Eine elementare Einführung in die Energetik. Frankfurt a. O., Harnecker & Co. 80 Pf.

Wittstein, Th., Grundzüge der mathematisch-physikalischen Theorie der Musik. Hannover, Hahn. 2 Mk.

Physik und Meteorologie.

Gerber, P., Der absolute Nullpunkt der Temperatur. Die Arbeit der Dämpfe beim Sieden etc. (2 Abhandl.) (Leop.-Carol. Akad.) Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 20 Pf.

Groth, P., Ueber die Molecularbeschaffenheit der Krystalle. Festrede. München, Franz. 80 Pf.

Kohlrausch, F., Das Wärmeleitungsvermögen harten und weichen Stahls. Würzburg, Stahel. 20 Pf.

Schumann, F., Elektromagnetische Rotationserscheinungen flüssiger Leiter. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Everett, J., Physikalische Einheiten und Constanten. Den deutschen Verhältnissen angepasst durch P. Chappuis u. D. Kreich. Leipzig, Barth. 3 Mk.

Fig. 1.

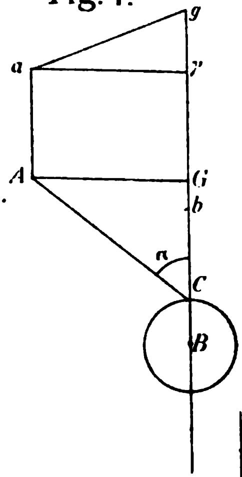


Fig. 2.

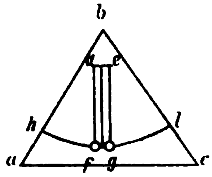


Fig. 3.

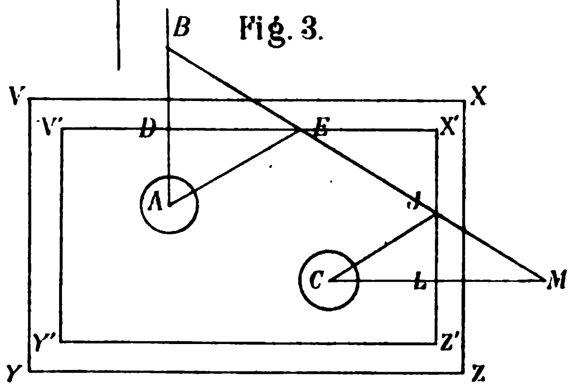
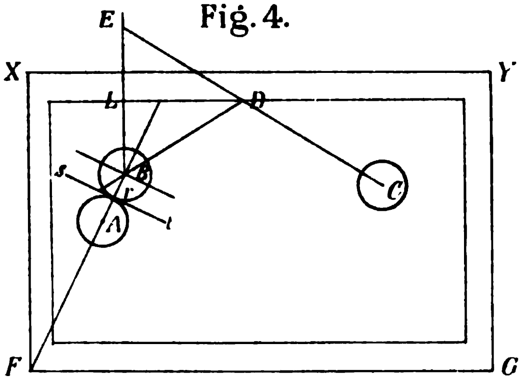


Fig. 4.



Historisch-literarische Abtheilung.

Carl Gustav Axel Harnack.

Von

M. Noether.

Es kann kein Zweifel sein, dass **Harnack**, als er sein jüngstes S. 146 zu besprechendes Werk über die ebene Potentialfunction schrieb, sich mit dem Gedanken trug, auch das räumliche Problem des **Newton**'schen Potentials vollständig zu erledigen. Aber dieses Ziel zu erreichen war ihm nicht mehr vergönnt: er hat es als Vermächtniss hinterlassen. Am 3. April d. J. erlag derselbe einem mehrjährigen Lungenleiden, bis zuletzt wissenschaftlich und amtlich unverdrossen thätig.

Axel Harnack, aus einer bekannten Dorpater Professorenfamilie stammend, wurde am 7. Mai 1851 zu Dorpat geboren, erlangte seine Gymnasialbildung in Erlangen (wo sein Vater damals Professor der Theologie war) und Dorpat, seine Universitätsbildung 1868—1873 in Dorpat und nach absolvirter Staatsprüfung 1873—1875 in Erlangen. Während der Dorpater Studienzeit, in der er hauptsächlich unter **Minding**'s Leitung arbeitete, erwarb sich H. 1872, in Beantwortung einer Preisaufgabe der dortigen physico-mathematischen Facultät, mit einer umfangreichen Abhandlung „Ueber die Maxima und Minima des Flächeninhalts von Ellipsen in Kegelschnitt-Netzen und -Reihen" die goldene Medaille. Die Facultät lobt an dieser frühen, wesentlich analytisch gehaltenen Arbeit die völlige Beherrschung des Materials, die durchgängige Klarheit und consequente Entwickelung — Züge, welche auch für die späteren Arbeiten H.'s charakteristisch sind. In Erlangen stand H. unter dem Einflusse von **Klein**, im Winter 1874/75 auch von **Gordan**, und promovirte daselbst im Herbst 1874 mit einer Dissertation „Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades" (Mathem. Annal. IX); 1875 habilitirte er sich an der Universität Leipzig mit einer Schrift „Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten" (Annal. IX), folgte 1876 einem Rufe als ausserordentlicher Professor an die technische Hochschule in Darmstadt, Herbst 1877 einem Rufe an das Polytechnikum in Dresden, dem er trotz mehrfacher anderweitiger Berufungen bis zu seinem Hinscheiden treu blieb.

Seit Ostern 1877 war Harnack mit Elisabeth von Oettingen aus Dorpat verheirathet, aus welch' glücklicher Ehe vier Kinder hervorgegangen sind.

Seine bedeutende Lehrthätigkeit in Dresden als ordentlicher Professor der Mathematik und Leiter des mathematischen Seminars, ebenso sein allgemeines Wirken für das Gedeihen seiner Hochschule wurden allseitig anerkannt. Leider wurde diese Thätigkeit durch mehrere Semester unterbrochen, in denen ihn sein Lungenleiden zu einem Aufenthalt in Davos zwang, der doch nicht dauernde Heilung gebracht. Aber ununterbrochen fort ging seine rastlose wissenschaftliche Arbeit, auf die ein näherer Blick geworfen werde.

In H.'s Schaffen lassen sich zwei Perioden bestimmt unterscheiden. Die erste Periode, von 1874—1879, hat ihre Richtung durch den Einfluss von F. Klein erhalten, während die zweite, spätere aus seiner eigenen, abstracteren Geistesanlage entsprungen ist.

Die Arbeiten der ersten Richtung, die in den Mathem. Annalen Bd. IX bis XV niedergelegt sind, beziehen sich auf den Zusammenhang zwischen der Geometrie einer Curve, vor Allem der elliptischen Curven, und den auf dieselben bezüglichen Integralen. Von der Klein'schen Repräsentation aller Elemente der Curve ausgehend, suchen sie eine anschauliche Darstellung der Parametervertheilung und mit deren Hilfe eine geometrische Interpretation der allgemeinsten zulässigen linearen Relation zu erzielen. Wie sich hieran schon gestaltliche und functionentheoretische Probleme reihen, so entstehen, indem H. die Idee durchführt, für die Curve dritter Ordnung die Gleichung dritten Grades voll zu entwickeln, welcher die Werthe des elliptischen Differentials, genommen für die drei Schnittpunkte der Curve mit einer Geraden bis zu denen mit einer benachbarten Geraden, genügen, ganz neue Probleme: Differentialprobleme, welche Interpretationen von der Curve dritter Ordnung zugehörigen Zwischenformen gestatten. In der weiteren algebraischen Durchbildung dieser Probleme — besonders die reichen invariantentheoretischen Betrachtungen für die allgemeine ebene Curve vierter Ordnung (Habil.-Schrift) scheinen noch entwickelungsfähig — macht sich der Einfluss Gordan's bemerkbar. Aber das interessanteste Resultat ist ein neuer Beweis des Abel'schen Theorems, nur gestützt auf eine Anwendung des bekannten Jacobi'schen Satzes auf zerfallende Curven; schon die ganze Auffassung dieses Satzes durch Betrachtung der vollen Gleichung für das Differential einer Curve (der oben angeführten Gleichung dritten Grades analog) ist sehr bemerkenswerth. Diese Schaffensperiode trägt in eminentem Grade den Zug an sich, der für die auf Clebsch zurückgehende Schule überhaupt bezeichnend ist: den umfassenden Blick auf alle Zweige der Wissenschaft und ihr Zusammenfassen zu neuer Forschung.

Anders von 1880 an. Hier wendet sich H. der Erörterung und Vertiefung der principiellen Fragen und Voraussetzungen zu, auf denen die

Wissenschaft sich aufbaut. Zunächst giebt er, aus dem Bedürfniss seiner Vorlesungen heraus und als Ergänzung derselben für die reinen Mathematiker zur Einführung in ihr tieferes Studium bestimmt, ein Werk über die „Elemente der Differential- und Integralrechnung“ (Teubner, 1881), in dem er zum Zweck einer systematischen Lehrmethode von vornherein die Voraussetzungen für die Lehre von den reellen Functionen ziemlich allgemein fasst. Es gelingt ihm zwar, die schwierigsten Theorien in aller Strenge und doch klar und fasslich, auch den Anfänger nicht abschreckend darzustellen; aber dass er selbst jenes Ziel als ein für die erste Zeit zu hoch gestelltes erkannte, beweist die schon 1884 von ihm bewirkte deutsche Uebertragung des Serret'schen Lehrbuches der Differential- und Integralrechnung (Teubner, 2 Bände), das sich, bei Klarheit und Vielseitigkeit in Methoden und Anwendungen, in den Voraussetzungen beschränkt, die gemachten aber deutlich angiebt — was in der That das für eine Einleitung Richtige scheint.

Die wissenschaftlichen Forschungen dieser Periode lassen sich nach drei übrigens eng zusammenhängenden Untersuchungsrichtungen sondern. Zuerst (1880—1882) beschäftigen H. die Fragen der Darstellbarkeit von irgendwie definirten Functionen einer reellen Variablen, vor Allem die durch die Fourier'sche Reihe, die bei H. überhaupt die Grundlage aller functionentheoretischen Entwickelungen wurde (Mathem. Annal. XVII—XIX, insbes. die Arbeit in Darboux' Bull. Math. Sér. II T. 6; in Bezug auf einzelne Probleme Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 32 und Mathem. Ann. XXIX, auch Anhang zur Bearbeitung des Serret'schen Werkes). Diese Arbeiten sollen hauptsächlich, an der Hand einer systematischen concisen Ableitung der Hauptsätze der Theorie der reellen Functionen, zu dem Hauptsatze führen, dass eine eine Function darstellende trigonometrische Reihe zu einer Fourier'schen wird, sobald die Function integrabel ist.

Diese Untersuchungen finden aber erst ihre Vervollständigung durch eine weitere Reihe von Arbeiten (1881—1885) über den Zusammenhang der Definitionsbedingungen. Bei dieser Erforschung der allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen mit ihren Differentialquotienten, über „gleichmässige Stetigkeit“, über die unendliche „discrete Punktmenge“ erweitern sich der reelle Functionsbegriff und die darauf bezüglichen Sätze fortwährend (Annal. XIX, XXIII—XXVI). Während H. sich in dem Begriff der „Punktmenge“ auf G. Cantor stützte und dessen Unterscheidungen als wesentlich anerkannte, wich doch seine Begriffsbildung etwas davon ab; ich möchte nur hervorheben, dass H. im Grenzprocess der Analysis und im Grössenunterschiede zulassenden Begriff der unendlichen Punktmenge nur denselben Begriff des Unendlichen — als Wachsthum einer Grösse über jede denkbare Grösse — sehen konnte, — eine von Vielen getheilte Anschauung.

Die dritte functionentheoretische Richtung, die Untersuchung specieller Definitionsmethoden von Functionen einer reellen oder auch einer complexen Variablen, insbesondere durch die bekannten partiellen Differentialgleichungen, hatte H. schon in seinem Aufsatze über die Fourier'sche Reihe, als Grundlage für die Potenzentwickelungen, Annal. XXI, verfolgt, ausführlicher aber in dem eingangs erwähnten Werke über das logarithmische Potential (s. auch einen Anhang zu Serret's Werk).

Der philosophische Sinn Harnack's hat sich, ausser in diesen abstracten Untersuchungen, auch in seiner Stellungnahme zu den Fragen bewährt, die sich an den Inhalt und den Ursprung unserer Raumvorstellung knüpfen (Ber. d. Ges. Isis III u. IV, Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. II). Ihm war dabei die mathematisch mögliche Unterordnung unseres Euklid'schen Raumbegriffs unter einen allgemeineren Grössenbegriff die Hauptsache; aber es sei doch erwähnt, dass H. dazu neigte, unsere ganze Raumvorstellung, so lange ihr Inhalt nicht begrifflich erfasst ist, als durch ein anschaulich nicht abzuänderndes Raumaxiom uns gegeben anzusehen, obwohl dieser Inhalt doch einen Maassbegriff involvirt. — Ein ausgeprägter historischer Sinn, der sich überall durch das Zurückgehen auf die Quellen zeigte, und der sich zuletzt in einer Ostern 1887 gehaltenen Rede über Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik (Dresden, Zahn & Jaensch) documentirte, ergänzt H.'s vielseitiges Wesen.

Axel Harnack ist für die Wissenschaft, die ihm noch viele feinsinnige Gaben hätte verdanken können, zu früh dahingeschieden. Und auch für seine Schüler und für seine Freunde: diese werden das Andenken an seinen auf's Höchste gerichteten Sinn, an seine charaktervolle, liebenswürdige und vertrauenerweckende Persönlichkeit immer in Ehren halten.*

---

* Ein ausführliches Verzeichniss der literarischen Publicationen H.'s hat Herr A. Voss seinem Nachruf „Zur Erinnerung an Axel Harnack", Mathem. Annalen XXXII, angeschlossen. Zuzufügen wären noch die Selbstreferate H.'s in den beiden Bänden von Königsberger's „Repertorium" und eine Recension von B. Erdmann's „Axiomen der Geometrie" in der Vierteljahrsschr. für wiss. Philosophie, Bd. II. (August 1888.)

Erlangen, Mai 1888.

Das älteste deutsche Rechenbuch.[1])

Herausgegeben und übersetzt
von

Friedrich Unger
in Leipzig-Reudnitz.

(S. 1.) **Allgorismus**[2]) is een aerst in den welken (= der welker) sun ‖ gheníficeert IX figuren[3]). Aend dit sind die ‖ IX 9 8 Λ σ ɥ ϱ ʓ z ȷ* want die ‖ minste figuer byduet ons (= uns) 1 Aend die ‖ and' twe aend die derde tre aend alzo voert ‖ aen wãneer ghy comt tot neghen [mer ter ‖ dre doet neghen]. Aend die X is gheheyten een cyfer[4]) Aend is dit 0. ‖ Dese cyfer een byduet ons in haer seluen nicht. Ofte in ‖ gheen numerus mer sy byduet ons vp (= up, ob, wenn) die figuren die haer ‖ folghen dien doetse den numerus tyenwerue dubeleren als dese hiir ‖ 10 20 30 40 50 60 70 80 90 Ofte anders hoe sy staen. ‖ Aend elke vanden voerseyden 9 figuren in die eerste[5]) stede staende ‖ die beduden ons simpeliit (?) haerseluen aend die in die ander ‖ stede staen tyenwerwe haerseluen aend die derde stede hun- ‖ dertwerwe haerseluen aend in die vyerde stede dusent

Allgorismus ist eine Kunst, in welcher sind bezeichnet neun Ziffern. Und dies sind folgende neun: 9 8 7 6 5 4 3 2 1, wovon die kleinste Ziffer bedeutet nur 1, und die andere 2, und die dritte 3, und also fort, und wenn ihr kommt zur 9 ..... Und die zehnte ist geheissen Null, und ist dies (Zeichen) 0. Diese Null bedeutet an und für sich nichts, auch in keiner Zahl bedeutet sie mehr; nur wenn ihr Ziffern (nach links) folgen, dann thut sie die Zahl zehnmal mehren, wie diese hier: 10 20 30 40 50 60 70 80 90; oder welche (Ziffern) sonst stehen mögen. Und jede von den vorgenannten 9 Ziffern in der ersten Stelle (rechts) stehend (besser: in die erste Stelle tretend) bedeutet nur sich selbst, und die in der zweiten Stelle stehenden (bedeuten) zehnfach sich selbst, und in der dritten Stelle (bedeuten sie) hundertfach sich selbst, und in der vierten Stelle tausend-

---

* In der Handschrift kommen überall nur diese alten Zifferformen vor, die im Drucke weiterhin durch die modernen Formen ersetzt sind.

werf ‖ haerseluen aend in die vüfte stede 10m werf haerseluen Aend in ‖ die 6te stede cm werf haerseluen etc pterea. Aend alsoe voert ‖ emmer tyenwerf meer. Aldus 1 10 100 1000 10000 (100000) 1000000 ‖ 10000000 Aend aldus is van elken andern figuren waer dat saech ‖ dat daer voer stunden cyferen Ofte een enich ander figuren. ‖ Aend dat is altoes die jerste stede die naest d'rechter Hand staet ‖ Ofte die laetste wert ghescreuen als men scriift int ghe- ‖ meen wan sy dubleren vander rechter hant ter slinker hant voert- ‖ tellende aldus [tincaruacar̄] 1410 van drien numeren of ghetael. ‖ Heet sint dre manieren van numeren ‖ in desen (= deser) arst. Dat is tho weten aldus ‖ Numerus digitus[6]) Numerus articulus Numerus ‖ compositus *siue mixtus*. Aend num. digitus en ‖ elc. numerus byneden IX als hiirna ‖ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 Numerus articulus en 10 20 ‖ 30 40 50 60 70 80 90 Aend al dat men by X maech ‖ delen. Aend num. *compos. siue mixtus* en bedekent elkich numerus tusschen ‖ tynen Als 11 12 13 14 Aend 21 22 23 24 25 Ofte 31 32 ‖ 33 34 35 36 Ofte anders die ghemacht sun van *digito* ‖ *et articulo*. **It is van numereren tho le- ‖ ren scriuen van ellech numer.**

Om tho leren scriuen enen numerus. Int jerste by- ‖ syet waer dat numer is digitus ofte articulus ofte compositus. ‖ (S. 2.) Is hy digitus soe suldi een scriuen by hen. Ist compositus soe suldi scriuen ‖ digitum in die jerste stede end articulum an die slinker syde als ‖ hiir 12 14 ofte 22 24

fach sich selbst, und in der fünften Stelle zehntausendfach sich selbst, und in der sechsten Stelle hunderttausendfach sich selbst etc. Und also fort immer zehnmal mehr, also 1 10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000. Und also ist's mit allen anderen Ziffern, wo es der Fall ist, dass davor (rechts) stehen Nullen oder irgend eine andere Ziffer. Und das ist stets die erste Stelle, die nächst der rechten Hand steht; aber die letzte wird geschrieben, wie man schreibt insgemein, wenn sie sich vervielfachen von der rechten Hand zur linken fortzählend, wie hier ... 1410. Von dreien Arten der Zahlen. Es giebt drei Arten von Zahlen in dieser Kunst. Das ist zu wissen also: Fingerzahl (Einer), Gliedzahl (Zehner), zusammengesetzte Zahl (zweistellige Zahl ohne Null). Und Fingerzahl ist jede der (folgenden) 9 (Zahlen) wie hiernach: 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Gliedzahl ist jede (der folgenden): 10 20 30 40 50 60 70 80 90, und sie alle man mit 10 kann theilen. Und zusammengesetzte Zahl bezeichnet jegliche Zahl zwischen den Zehnern, wie: 11 12 13 14, und 21 22 23 24 25, oder 31 32 33 34 35 36, oder die sonstwie gemacht sind aus einem Digitus und einem Articulus. Folgendes ist über das Schreiben der Zahlen zu lernen.

Um schreiben zu lernen eine Zahl, beseht zuerst, ob die Zahl ist ein Digitus oder Articulus oder Compositus. Ist sie ein Einer, so sollt ihr ihn schreiben nebenhin; ist sie ein Compositus, so sollt ihr schreiben den Einer an die erste Stelle (rechts) und den Zehner an die linke Seite, wie hier:

Ist articulus soe sul- ‖ di scriuen cyfer in die eerste stede end articulum an die slinker sid' ‖ als hiirna screuen staet 10 20 30 Daer om mach men sunder ‖ cyfer articulum niet scriuen. In elken numer als die jerste num. is ‖ effen soe ist alle die numer effen. Aend is die jerste num. figuer ‖ oneffen alle die numer is oneffen. **DIt is die delin- ‖ ghe [des artes].**

Dese arst is ghedeelt in 7 partyen[7]). Die eerste ‖ partye is *addicio*. Die ander is *subtracio*. Die derde ‖ is *duplicacio*. Die vierde *mediacio*. Die V *multiplicacio*. ‖ Die 6te *diuisio*. Die 7e *extracio* van den ‖ wortel in *quadratus* (aend) in *cubitus* hoe dat men werken ‖ sal in elken ars. Men sal in *addicio subtracio* aend in ‖ *mediacio* beginnen werken an die recht' syde. Aend an die ander ‖ 4 arten beginnen werken an die slinker syde. ‖

Addicio is een vergaderenghe van enen numer ‖ tot enen anderen Aend wãneer ghy wilt adderen enen ‖ numer tot enen anderen soe sult ghy scriuen 2 ‖ ordinen van figuren welke ghy wilt end stellen ‖ die jerste onder die jerste Aend die twe onder twe ‖ aend also van alden anderen hoe veel figuren dat daer sint als hiir ‖ $\begin{matrix}5\,4\,3\,7\,6\\9\,8\,7\,6\,5\end{matrix}$ Aend oft van der addicione van dese figuren wasset ‖ numerus digitus dat sult ghy scriuen in die jerste ‖ stede. Aend comt daer aff numerus compositus soe sult ghy ‖ digitum scriuen in die jerste stede ‖ (S. 3.) end articulum an die slinker hant. Aend

12 14, oder 22 24; ist sie ein Zehner, so sollt ihr schreiben eine Null an die erste Stelle und den Zehner an die linke Seite, wie hiernach geschrieben steht 10 20 30. Drum mag (= kann) man ohne Null einen Zehner nicht schreiben. Jede Zahl, in welcher die erste Stelle gerade ist, ist gerade; und ist die erste Stelle ungerade, so ist die ganze Zahl ungerade. Es folgt die Eintheilung der Kunst.

Diese Kunst ist getheilt in 7 Partien. Die erste Abtheilung ist die Addition, die zweite die Subtraction, die dritte die Verdoppelung, die vierte die Halbirung, die fünfte die Multiplication, die sechste die Division, die siebente die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. Wie dass man operiren soll in jeder Species (d. h. in welcher Richtung). Man soll in der Addition, Subtraction und Halbirung beginnen zu operiren an der rechten Seite, und in den anderen 4 Species an der linken Seite.

Die Addition ist eine Hinzufügung einer Zahl zu einer andern. Und wenn ihr wollt addiren eine Zahl zu einer andern, so sollt ihr schreiben zwei Reihen von Ziffern, welche ihr wollt, und (sollt) stellen die erste (Ziffer rechts) unter die erste, und die zweite unter die zweite und also (thun) mit all' den anderen, wie viele Ziffern vorhanden sind, wie hier: $\begin{matrix}54376\\98765\end{matrix}$. Und wenn durch die Addition dieser Ziffern sich ergiebt ein Einer, so sollt ihr den schreiben an die erste Stelle. Und kommt daraus eine zusammengesetzte Zahl, so sollt ihr den Einer schreiben an die erste Stelle (rechts) und den Zehner zur linken Hand. Und wenn durch die ofte van der addicione van dese figiuren ‖ ouer wasset numerus compositus als aldus $\begin{matrix}654\\987\end{matrix}$ ‖ Aend als van der addicione ower (= over) wasset ‖ num. articulus soe sal men die cyfra scriuen in die jerste stede end articulum ‖ sal men adderen mitten figuren na volkende an die slingher hant ‖ ofte syde. Aend oft der gheen figuren affter kommen soe sal men articulus ‖ scriuen by hen van dese figuren wast num. articulus offt articulus $\begin{matrix}345\\765\end{matrix}$ ‖ Aend als die ouerste orden von den figuren siin cyferen end ‖ ghy der tho wilt adderen figuren soe suld ghy die cyferen ‖ vort doen end die figuren in die stede zetten Aend als in die nederste ‖ orden sint cyferen sy en doen met den ten figuren die bouen staen ‖ also als hit schiiut in die addicione van dese figuren $\begin{matrix}43000\\60543\end{matrix}\Bigg\|\begin{matrix}906 & 766 & 906\\124 & 234 & 124\end{matrix}\Bigg\|\begin{matrix}9999 & 398 & 699 & 468\\3661 & 632 & 369 & 766\end{matrix}\Bigg\|$ Die subtracion prouet die addicion end die addicion prouet die subtracion. ‖

Subtracio is aff the slaen den minsten ‖ numerus van den mesten. Als ghy wilt aff ‖ doen enen numerus vanden andern soe sult ghy (scriuen) ‖ twe orden van figuren Aend die minste onder ‖ die meste end setten die jerste onder die jerste ‖ aldus twe onder die twe end alsoe voert hoe- ‖ veel dat daer sint. Aend ghy sult beghinnen aff ‖ the slaen an die rechter syde

Addition der Ziffern aber sich ergiebt eine zusammengesetzte Zahl, wie allda $\begin{matrix}654\\987\end{matrix}$ (Nachsatz fehlt). Und wenn durch die Addition aber sich ergiebt ein Zehner, so soll man die Null schreiben an die erste Stelle (rechts) und die Zehnerziffer soll man addiren zur nachfolgenden Ziffer an der linken Hand oder Seite. Und wenn keine Ziffern hinterher (d. h nach links hin) kommen, so soll man die Zehnerziffer schreiben nebenhin. Von diesen Ziffern ergiebt sich (d. h. durch Addition derselben) ein Zehner $\begin{matrix}345\\765\end{matrix}$. Und wenn in der obersten Reihe der Ziffern (d. h. im oberen Summanden) sind Nullen und ihr wollt dazu zählen (geltende) Ziffern, so sollt ihr die Nullen wegthun (= löschen) und die (geltenden) Ziffern an ihre Stelle setzen. Und wenn in der untern Reihe (d. h. im untern Summanden) Nullen sind, so sollt ihr nichts thun (= nichts hinzuzählen) zu den Ziffern, die oben (= im oberen Summanden) stehen, also wie hier geschieht in der Addition dieser Ziffern $\begin{matrix}43000 & 906 & 766 & 906 & 9999 & 398 & 699 & 468\\60543 & 124 & 234 & 124 & 3661 & 632 & 369 & 766\end{matrix}$. Die Subtraction probirt die Addition, und die Addition probirt die Subtraction.

Die Subtraction ist ein Abziehen einer kleineren Zahl von einer grösseren. Und wenn ihr wollt abziehen eine Zahl von einer andern, so sollt ihr schreiben zwei Reihen von Ziffern und zwar die kleinere (Zahl) unter die grössere, und setzen die erste (Ziffer rechts) unter die erste, ebenso die zweite (Ziffer) unter die zweite, und also fort wieviel, dass da (Ziffern)

$\begin{matrix}654\\543\end{matrix}$ *Nota bene* ‖ Daer na off ghy moghet treeken aff die jerste van d'jerste ‖ Aend scrif dat daer ower comt als hiir na staet gescreuen $\begin{matrix}654\\543\end{matrix}$ ‖ Aend bliif daer niet ower soe sult ghy scriuen cyfra in die ‖ jerste stede aldus $\begin{matrix}5432\\5432\end{matrix}$ ‖ Aend offt ghy niet en moghet aff treeken die eerste van die jerste ‖ om dat die overste minnere is dan die onderste Dan ‖ sult ghy aff doen een ander daer die daer naest is ‖ (S. 4.) van figuren na volgende end doet der toe die een is 10 weerf ‖ Aend sult ghy aff treeken die eerste figuer van onder van der jerster *et* vander ‖ jerster figuren van bouen. Aend aldus sult ghy doen van der andern figuren ‖ navolghende etc. Als die 2. figuer is een end ghy wilt doen ter jerster ‖ figuren soe sult diit doen end scriuen een cyfra in die stede end daer na ‖ vander jerste figuer end van den enen dat 10 werf is sult ghy aff slaen ‖ die figuer die onden staet als hiir staet ghetoghen in die subtracione der ‖ figuren aldus $\begin{matrix}21321\\7654\end{matrix}$ ‖ Aend offt dat vaelt in die oversten orden van den figuren sint cyferen ‖ van der naesten figuren sult ghy nemen 1 Aend die een sal alle die ‖ ciferen maghen 9 wert sunder die achterste die wert 10 wert ‖ Aend van dien soe sult ghy

sind. Und ihr sollt beginnen abzuziehen an der rechten Seite $\begin{matrix}654\\543\end{matrix}$. Wenn ihr dann könnt ziehen ab die erste (Ziffer rechts) von der ersten, so schreibt das, was dort übrigbleibt, wie hiernach geschrieben steht $\begin{matrix}654\\543\end{matrix}$. Und bleibt dort nichts übrig, so sollt ihr schreiben eine Null in die erste Stelle (rechts), wie da: $\begin{matrix}5432\\5432\end{matrix}$. Und wenn ihr nicht könnt abziehen die erste (Ziffer) von der ersten (rechts), um dass (= weil) die obere (Ziffer) kleiner ist denn die untere, so sollt ihr wegthun (= borgen) 1 an derjenigen Ziffer, welche die nächste ist von den nach links folgenden Ziffern und dazu thun (zur oberen Ziffer), diese 1 gilt das Zehnfache; und (nun) sollt ihr abziehen die erste Ziffer der unteren Zahl von der ersten und von der (zur) ersten (geborgten) Ziffer von oben. Und ebenso sollt ihr thun mit den anderen noch folgenden Ziffern etc. Wenn die zweite Ziffer (an welcher geborgt ist) eine 1 ist, und ihr wollt sie zur ersten Ziffer (thun), so sollt ihr das thun und schreiben eine Null an ihre Stelle, und darnach von der ersten Ziffer und von der 1, welche 10 gilt, sollt ihr abziehen die Ziffer, die unten steht, wie hier steht abgezogen in der Subtraction der Zahlen, allda: $\begin{matrix}21321\\7654\end{matrix}$. Und wenn es vorfällt, dass in der oberen Reihe der Ziffern (im Minuenden) Nullen vorkommen, so sollt ihr von der nächsten Ziffer (nach links) 1 nehmen (= borgen), und diese 1 soll alle die Nullen machen 9 werth, ohne die hinterste (Null rechts), diese wird 10 werth; und von diesen die onderste figuren aff treeken end scriuen ‖ dat deer over bliift als voer gheseyt is. Aend also het schyet ‖ in die subtracione van desen figuren $\begin{matrix}20000\\ 7358\end{matrix}$. **Duplicacio.** ‖

Off ghy wilt enen numerus dupleren soe ‖ sult ghy beghinnen dupleren die jerst ‖ figuren an die luchter zide. Aend off van ‖ deser duplicacione wasset numerus digitus soe sult ‖ ghy scriuen in dieselue stede. Aend waster (= wasset daer?) ‖ aff numerus articulus soe sult ghy scriuen cyfra in die- ‖ selue stede end stellen articulum an die slinker ‖ zide. Aend comt daer aff numerus compositus soe sult ghy scriuen digitum in dieselue ‖ stede end articulum in die slinker zide als doet in addicione. Aend aldus sult ‖ ghy dupleren alle die andern figuren daer na volghende. **Mediacio.** ‖

Offt ghy wilt enen numerus helften soe moet ‖ ghy ten jersten besyien waer die jerste ‖ figuer sy effen offte onneffen. Ist ‖ effen soe sult ghy dien helf aff slaen ‖ end scriuen die ander helf in die stede. Is ‖ die jerste figuer onneffen[8]) soe sult ghy 1 aff ‖ doen end dat daer dan bliuet sult ghy die een ‖ helf aff slaen end scriuen die ander helf in die- ‖ selue stede end vp die eerste figuer daer een aff is ghenommen sult ‖ ghy maken een teken dat bedieden sal een aff ghedaen bedi een en ‖ mach men niet helften. Aend off die eerste figuer is 1 so sult ghy ‖ aff doen end scriuen een cyfra in die stede end maken een teken bouen ‖ (s. s.) als te voren. Aend

(den Neunen und der Zehn) sollt ihr die unteren Ziffern abziehen und schreiben, was dort übrig bleibt, wie zuvor gesagt ist, und wie geschehen ist in der Subtraction dieser Zahlen $\begin{matrix}20000\\ 7358\end{matrix}$. Verdoppelung.

Wenn ihr wollt eine Zahl verdoppeln, so sollt ihr beginnen zu verdoppeln die erste Ziffer zur linken Seite. Und wenn durch diese Verdoppelung entsteht ein Einer, so sollt ihr (ihn) schreiben an dieselbe Stelle; und entsteht daraus ein Zehner, so sollt ihr schreiben eine Null an dieselbe Stelle und setzen die Zehnerziffer zur linken Seite; und ergiebt sich daraus eine zusammengesetzte Zahl, so sollt ihr schreiben die Einerziffer an dieselbe Stelle und die Zehnerziffer zur linken Seite, wie ihr thut in der Addition. Und in gleicher Weise sollt ihr verdoppeln alle die anderen Ziffern. Halbirung.

Wenn ihr wollt eine Zahl halbiren, so müsst ihr zuerst sehen, ob die erste Ziffer (rechts) gerade oder ungerade sei. Ist sie gerade, so sollt ihr die eine Hälfte wegthun und schreiben die andere Hälfte an ihre Stelle. Ist die erste Ziffer ungerade, so sollt ihr 1 abziehen, und von dem, was dann dort bleibt, sollt ihr die eine Hälfte wegthun und schreiben die andere Hälfte an dieselbe Stelle, und über die erste Ziffer, von welcher 1 weggenommen ist, sollt ihr machen ein Zeichen, welches bedeuten soll 1 weggethan; denn 1 kann man nicht halbiren. Und wenn die erste Ziffer 1 ist, so sollt ihr (sie) wegthun und schreiben eine Null an ihre Stelle und ofte die jerste figuer 1 cyfra soe sult ghy bet voert (bet voert = fürbass) ‖ biden (= warten, schauen, gehen) bedy het ne mach niet ghehelft siin. Aend als die eerste figuer ‖ is ghehelft soe sal men besyen die andere figuer weder sy is effen ‖ ofte onneffen is sy effen soe sal men helften gheliick der jerster ‖ is sy onneffen soe sal men een aff doen. Aend dat 1 wert 10 Van den ‖ 10 sal (= sult) ghy deen helft eenweech werpen. Aend die ander helleff ‖ dats 5 die sult ghy doen metten jersten figuer. Aend *vp* (= up, ob, wenn) die ‖ andere figuer si 1 dat sult ghy aff doen end scriuen een cyfra ‖ in die stede. Aend die 1 is 10 wert von dien 10 soe sult ghy nemen ‖ deen helleff dat is 5 end doet metten jersten figuer Aend die ander ‖ helleff dat is oech 5 dat sult ghy eenweech werpen. Aend gheen ‖ cyfra en sal men scriuen off daer een quaem eyn figuer after. Aend ‖ offt eyn cyfra staet tussechen die 2 figuren te helften ghy sult ‖ *voert* gaen end laete ze staen. *Duplicaio prouet mediacionem.* ‖ Aend *mediacio prouet duplicacionem.* **Multiplicacio h'.** ‖

In *multiplicacione* sint te doen 2 manieren ‖ nuteliick. Dat is numerus *multiplicans et numerus* ‖ *multiplicandus.* Aend men moet ze scriuen in ‖ desen manieren soe dat die jerste figuer ‖ van numerus *multiplicans* moet staen vnder ‖ die achterste figuer van numerus multiplicandus ‖ als aldus $\begin{matrix}467\\32\end{matrix}$ ‖ want die vnderste numerus heyt numerus multi- ‖ plicans Aend die

machen ein Zeichen oben wie zuvor. Und wenn die erste Ziffer (rechts) eine Null ist, so sollt ihr weiter fortgehen, denn sie (= die Null) kann nicht halbirt werden. Und wenn die erste Ziffer (rechts) halbirt ist, so soll man die andere Ziffer besehen, entweder ist sie gerade oder ungerade; ist sie gerade, so soll man sie halbiren gleich der ersten; ist sie ungerade, so soll man 1 (davon) abziehen; und diese 1 gilt 10. Von dieser 10 sollt ihr die eine Hälfte hinwegwerfen, und die andere Hälfte, das ist 5, die sollt ihr thun (hinzuzählen) mit zur ersten Ziffer. Und wenn die andere Ziffer 1 ist, (dann) sollt ihr diese hinwegthun und schreiben eine Null an ihre Stelle; und diese 1 gilt 10. Von dieser 10 sollt ihr nehmen die eine Hälfte, das ist 5, und mit zur ersten Ziffer thun. Und die andere Hälfte, das ist auch 5, die sollt ihr wegwerfen. Und keine Null soll man schreiben, ausserdem es käme noch eine andere Ziffer dahinter (d. h. nach links hin). Und wenn eine Null steht zwischen den zwei zu halbirenden Ziffern, so sollt ihr fortgehen und sie (die Null) stehen lassen. Die Verdoppelung probirt die Halbirung, und die Halbirung probirt die Verdoppelung. Multiplication.

In der Multiplication sind zwei Bezeichnungen zu wissen nützlich (?). Das ist der Multiplicator und der Multiplicand. Und man muss sie schreiben in dieser Weise, so dass die erste Ziffer (rechts) des Multiplicators steht unter der letzten Ziffer (links) des Multiplicanden, wie allda: $\begin{matrix}467\\32\end{matrix}$, *o*verste heyt numerus multiplicandus. Aend off ghy wilt multipliceren[9]) ‖ enen *digitum* mit enen andern *digitus* soe ‖ moet ghy weten by hoe *v*ele enen dat die meste digitus ‖ staet van 10. Alsoe menichwerf moet ghy aff doen die minste *di*- ‖ *gitum* van sinen tyende die after hen ghenuemt is. Aend dat dan ‖ daer bliuet so *v*ele is die numerus vander multiplicacione. Exemplum. ‖ Offt ghy wilt weten hoe *v*ele sy 8 werf 9 besyet hoe ‖ *v*eel enen dat neghen staet van 10. Het een staet mer een ‖ van 10 soe dat dan eenwerf 8 van 80 soe bliift daer 72 ‖ Aend dat is die Numerus van desen multipliceren. Aldus is tho doen offt ‖ een digitus multipliceert henseluen. Offt men wil multipliceren ‖ enen articulus mit enen andern soe sal men nemen beyde haer ‖ digitus end multipliceren den enen mit den anderen end alzo ‖ *v*eele enen als desen multiplicacie in heuet alsoe menich ‖ hundert is daer. Offt ghy wilt multipliceren enen ‖ (S. 6.) numerus mit enen andern soe scriuet 2 ordinen van figuren[10]) alsoe ‖ dat die jerste figuer van den num. multiplicans staet vnder die achterste ‖ figuer van num. multiplicandus alsoe het *v*oer gheseyt is. Daer na sal ‖ men leiden alle die figuren van den num. multiplicans in die achterste ‖ van den num. multiplicandus ellech by hen sunderlinghe end die ‖ numerus die daer aff coemt die sult ghy scriuen int hoeft van den ‖ num. multiplicans Aend als die achterste figuer van den num. multi- ‖ plicandus is ghemultipliceert met allen den figuren (van den)

wovon die untere Zahl heisst Multiplicator und die obere Multiplicand. Und wenn ihr wollt multipliciren eine Einerzahl mit einer andern Einerzahl, so müsst ihr wissen, um wieviele Einheiten der grössere Einer absteht von 10 (d. h. kleiner ist als 10). Ebenso oftmal müsst ihr abziehen den kleineren Einer von seinem (eigenen) Zehnfachen, das hinten hin genommen (= gesetzt) ist. Und was dann dort bleibt, soviel beträgt die aus jener Multiplication hervorgehende Zahl. Beispiel. Wenn ihr wollt wissen, wieviel 8×9 sei, so steht, wie viele Einheiten die Neun absteht von 10, diese steht nur eine 1 von 10 ab, so thut dann (= zieht ab) einmal 8 von 80, so bleibt dort 72, und das ist die Zahl von diesem Multipliciren. Ebenso ist zu thun, wenn ein Einer multiplicirt sich selbst. Wenn man will multipliciren einen Zehner mit einem andern, so soll man nehmen von beiden die geltende Ziffer und multipliciren die eine mit der andern, und so viele Einheiten als dieses Product in sich hält, so viele Hunderte kommen heraus. Wenn ihr wollt multipliciren eine Zahl mit einer andern, so schreibt zwei Reihen von Ziffern also, dass die erste Ziffer (rechts) des Multiplicators steht unter der letzten Ziffer (links) des Multiplicanden, wie es zuvor gesagt ist. Darnach soll man führen (= multipliciren) alle Ziffern des Multiplicators in die letzte (Ziffer) des Multiplicanden, jede für sich besonders, und die Zahl (= Product), welche sich daraus ergiebt, die sollt ihr schreiben zu Häupten (= über) des Multiplicators (d. h. immer über die entsprechende Stelle des Multiplicators). Und wenn die letzte Ziffer (links) des Multiplicanden ist num. multipli- || cans soe sult ghiis anterioreren by een differencia die figuren || van num. multiplicans Aend dan sult ghy leyden achterste figuer van || num. multiplicandus in die ghene die staet bouen die jerste figuer || van num. multiplicans. Van desen multipliceren soe coemt || num. digitus offte num. articulus offte num. compositus *siue mixtus* || Coemt daer aff digitus so sal men doen totten figuren die bouen || int hoeft staen van num. multiplicans. Offt daer articulus over || wasset soe sult ghy laten die figuer die staet int hoeft van den || num. multiplicans end stellen den num. articulum met den andern || figuren an die slinker zide. Aend aldus en sal men met fiueren || voer dat elke figuren van num. multiplicandus siin ghemultipliceert || met allen den figuren van num. multiplicans. Aend als ghy multipli- || ceert die achterste figuer van num. multiplicandus mer (= met) der achter- || sten van num. multiplicans daer aff wasset num. digitus ofte || articulus offte compositus. Coemt daer digitus sal men alleen scriuen || int hoeft van num. multiplicans. Aend coemt daer articulus soe sult ghy || scriuen een cyfra int hoeft van multiplicans aend articulus an die slinker || zide. Aend offt *compositus* over wasset soe sult ghy scriuen digitum in die || stede vnd articulum an die slinker zide. Weel is tho weten || dat die eerste figuer van num. multiplicandus in die multipli- || ceringhe soe doet aff die figuer die bouen hen staen (= staet) ghescreuen in || deser condicione Ist

multiplicirt mit allen Ziffern des Multiplicators, so sollt ihr vorrücken (nach rechts) um eine Stelle die Ziffern des Multiplicators. Und dann sollt ihr führen (= multipliciren) die letzte (d. h. nun die vorletzte) Ziffer des Multiplicanden in diejenige, die steht über der ersten Ziffer (rechts) des Multiplicators. Aus diesem Multipliciren ergiebt sich ein Einer oder ein Zehner oder eine zusammengesetzte Zahl. Entsteht daraus ein Einer, so soll man ihn thun (d. h. hinzuzählen) zu den Ziffern, die (schon) oben zu Häupten des Multiplicators stehen. Wenn dort ein Zehner aber entsteht, so sollt ihr lassen (ungeändert) die Ziffer, welche steht zu Häupten des Multiplicators und zählen (die geltende Ziffer) des Zehners mit zu den anderen Ziffern an der linken Seite. Und in gleicher Weise soll man fortfahren, bis dass alle Ziffern des Multiplicanden multiplicirt sind mit allen Ziffern des Multiplicators. Und wenn ihr multiplicirt die letzte Ziffer (links) des Multiplicanden mit der letzten (links) des Multiplicators, so entsteht daraus eine Einerzahl oder ein Zehner oder eine zusammengesetzte Zahl. Ergiebt sich daraus ein Einer, so soll man ihn allein schreiben zu Häupten (= über) des Multiplicators; ergiebt sich daraus ein Zehner, so sollt ihr schreiben eine Null zu Häupten des Multiplicators und die Zehnerziffer zur linken Seite; und wenn eine zusammengesetzte Zahl aber entsteht, so sollt ihr schreiben die Einerziffer in die Stelle (d. h. genau über den Multiplicator) und die Zehnerziffer zur linken Seite. Wohl ist zu wissen, sobald die erste Ziffer des Multiplicanden bei der Multiplication (erledigt ist), so streicht alsoe dat van sulker multiplicacione wert || digitus die *v*oer seyde figuer sal men aff doen end scriuen die digitus in die || stede. Aend coemt daer articulus soe sal men dese figuer aff doen end stellen || een cyfra in die stede vnd articulus an die linker zide. Aend coemt || daer aff num. compositus soe sult ghi die figuer aff doen end stellen || digitum in die stede aend articulum an die slinker syde. Aend als ghy || wasset dat die jerste (figuer) van num. multiplicans is een cyfra soe sal men || die figuren (= figuer) die bouen hen staen (= staet) aff doen end stellen die cyfra in die || stede[11]). Aend als die ander figuer van num. multiplicans || is een cyfra end die stede bouen hen is ydel dan sult ghy || (S. 7.) die cyfra daer in setten[12]). Aend alst also is dat cyferen siin in num. || multiplicandus soe sal men bet *v*oert (bet voert = fürbass) liden end dan sal men anterioren || by alsoe *v*ele differentia als daer cyferen sint aldus $\begin{matrix} & 3002 \\ 540 & \end{matrix}$ || Aend offt ghy wilt weten aff ghy die *multiplicacie* || wel hebt ghemacht soe sult ghiit diuideren by num. multiplicans || aend sult ghy weder hebben dieseluen figuren die ghy tho || woren stellede tho multipliceren. **Diuisio ẽ h'.** ||

Off ghy wilt enen numerus diuideren || soe scryf 2 manieren van nu- || meren wellich ghy wilt end || stellet die mynste onder die || meste Aend stellet die ach- || terste figuer van den minsten || numerus onder die achterste

aus die Ziffer, die obenhin [= darüber] steht geschrieben mit dieser Bedingung: Ist es der Fall, dass durch solche Multiplication entsteht eine Einerzahl, soll man die zuvor besagte Ziffer ausstreichen und schreiben jene Einerzahl an ihre Stelle; und entsteht daraus ein Zehner, so soll man diese Ziffer ausstreichen und setzen eine Null an ihre Stelle und die Zehnerziffer an die linke Seite; und kommt daraus eine zusammengesetzte Zahl, so sollt ihr die Ziffer ausstreichen und setzen die Einerziffer an ihre Stelle und die Zehnerziffer an die linke Seite. Und wenn es der Fall wäre, dass die erste Ziffer (rechts) des Multiplicators eine Null ist, so soll man die Ziffer, die darüber steht, ausstreichen und setzen die Null an ihre Stelle. Und wenn die andere Ziffer (die zweite links) des Multiplicators eine Null ist, und die Stelle darüber ist leer, dann sollt ihr die Null dahin setzen. Und wenn es also wäre, dass (einige) Nullen im Multiplicanden sind, so soll man fürbass (= weiter) gehen und dann soll man vorrücken um ebensoviele Stellen als dort Nullen sind, wie hier: $\begin{matrix} & 3002 \\ 540 & \end{matrix}$. Und wenn ihr wollt wissen, ob ihr die Multiplication recht gemacht habt, so sollt ihr es (d. h. das Product) dividiren durch den Multiplicator und ihr sollt wieder bekommen dieselben Ziffern, die ihr zuvor stelltet zu multipliciren (= Multiplicand). Division.

Wenn ihr wollt eine Zahl dividiren, so schreibt zwei Zahlen, welche ihr wollt, und stellt die kleinere unter die grössere; und stellt die letzte Ziffer (links) der kleineren Zahl unter die letzte (links) der grösseren Zahl;

van den || mesten numerus. Aend alle die anderen || figuren sult ghy stellen by ord- || nen au die rechter syde[13]). Daer- || na treek aff die achterste figuren alsoe menich- || werue als ghy moghet van der ghenre die || bouen haer staet. Aend dan scriuet dat daer bliift dat ghy || alsoe menighwerf moghet aff treeken alle die anderen figuren || van denghenen die bouen hen staen aend van dat daer *over* || bliuet. Aend isser meer een figuer onder die sult ghy aff tree- || ken alsoe menigwerf als ghy moghet van allen den figuren || die bouen staen altoes scriuende dat daer bliift. Aend offt || alsoe is dat ghy die achterste figuer nyet een moghet aff treeken || van achterste die bouen haer staet om dat sy minre is dan || die onder staet soe sult ghy die achterste figuer die onder || staelt stellen (nicht) onder die achterste sunder een van den ghenen || die bouen staen. Aend treeken aff als hiir tho foren seyt is || als hiir 78956 / 9871˙ ||

Van dastanen diuisien[14]) wast een numerus aend heet numerus || *quociens*. Aend men sal scriuen int hoeft bouen van den || *numerus divisor vp* (= up, ob, über) die jerste figuer om te bedieden dat || alsoe menichwerf moet elke figuer siin aff ghedaen off || ghetoghen van den ghenen die bouen staen aend van dat daer || ower bliift. Aend derna sal men anterioreren die figuren || (S. 8.) van num. divisor by ene differentie end diuideren alsoe men to || *v*oren dede altoes scriuende num. quociens int hoeft bouen

und alle die andern Ziffern sollt ihr stellen der Reihe nach an die rechte Seite (jener). Darnach zieht ab die letzte Ziffer so oftmals als ihr das könnt, von derjenigen (Ziffer), die über ihr steht; und dann schreibt, was dort bleibt, damit ihr noch ebenso oftmals mögt abziehen alle übrigen Ziffern (des Divisors) von denjenigen, die darüber stehen und von dem eben erhaltenen Reste. Und ist nur eine Ziffer unten (d. h. ein einstelliger Divisor), so sollt ihr sie abziehen, so oftmals als ihr könnt von allen Ziffern, die oben stehen, allzeit schreibend, was dort übrig bleibt. Und ist es also, dass ihr die letzte Ziffer (des Divisors links) nicht (wenigstens) einmal könnt abziehen von der letzten (Ziffer des Dividenden), die über ihr steht, weil diese kleiner ist denn die, die unten steht, so sollt ihr die letzte Ziffer, die unten steht, nicht stellen unter die letzte, sondern eine Stelle weiter nach rechts; und abziehen, wie hier zuvor gesagt ist, wie hier:

78956
 9871˙

Aus solcher Division ergiebt sich eine Zahl und diese heisst Quotient; und man soll ihn schreiben zu Häupten des Divisors über die erste Ziffer (rechts), um anzudeuten, dass ebenso vielemal jede Ziffer (des Divisors) muss weggenommen oder abgezogen werden von denjenigen, die oben stehen und von dem, was dort übrig blieb (d. h. beim Abziehen der ersten Ziffer). Und darnach soll man vorrücken die Ziffern des Divisors um eine Stelle und dividiren, wie man zuvor that, allzeit schreibend den Quotient zu van den || eersten figuren van num. diuisor. Dese num. quociens || sal teghen in hoe vele partien die numerus mach siin gedeelt || off ghediuideert. Die overbliuen die men niet een mach delen || dat sal bliuen van num. diuidendus. Die numerus die bouen staet || (heet) num. diuidendus Aend die vnder staet heet num. diuisor. Aend || alle die figuren sint gheanterioreret by enen differentie aend dan || ghevalt dat die achterste figuer van num diuisor niet een || mach siin aff getreekt van die ghenen die bouen hen staen || dan sal men scriuen 1 cyfra in die orden van num. quociens end daer- || na weder anterioreren end divideren tot dat die jerste figuer van || num. diuisor sy aff getreekt van den figuren van num. diuidendus. || Aend off ghy prouen offt weel ghedaen is soe sult ghyt || multipliceren num. diuisor bi num. quociens end dan suldi weder || hebben dieseluen figuren die ghy tho voeren stellede om to diui- || deren met den toe doen van dat daer over bliift off bleef van || num. diuidendus [by di]. Die multiplicacie prouet die diuisie end die diui- || sie die multiplicacie. ||

Nota. Man sal num. diuisor niet hogher setten dan dat ghetael || van neghenen off een ghetael off digitus daer beneden neghenen is.

Radices. || Om te vinden die wortel van num. quadratus || soe sal men eerst besyen wat is num. || quadratus *et* wat die wortel is van || num. quadratus. Als 1 numerus is gheleet || in hen seluen dats numerus quadratus [bedy. || Als

Häupten der (jeweilig) ersten Ziffern des Divisors. Der Quotient soll anzeigen, in wieviele Theile der Dividend getheilt oder dividirt werden kann. Das Uebrigbleibende, das man nicht mehr theilen kann, das soll übrig bleiben vom Dividenden. Die Zahl, welche oben steht, heisst Dividend, und die, welche unten steht, heisst Divisor. Und wenn alle Ziffern (des Divisors) sind (nach rechts) um eine Stelle vorgerückt, und es dann der Fall ist, dass die letzte Ziffer (links) des Divisors nicht (wenigstens) einmal kann abgezogen werden von derjenigen, die darüber steht, dann soll man schreiben eine Null in die Ziffernreihe des Quotienten, und darnach wieder vorrücken (den Divisor) und dividiren, bis dass die erste Ziffer (links) des Divisors abziehbar ist von den Ziffern des Dividenden. Und wenn ihr probiren wollt, ob recht gethan sei, so sollt ihr es multipliciren, (nämlich) den Divisor mit den Quotienten, und dann sollt ihr wieder erhalten dieselben Ziffern, die ihr zuvor stelltet zum Dividiren, vermehrt um das, was dort übrig bleibt oder blieb vom Dividenden. Die Multiplication probirt die Division und die Division die Multiplication.

Nota. (Vielleicht: man soll den Divisor nicht mehr als neunmal nehmen, d. h. die grösste Quotientenziffer sei neun; oder man soll eine Ziffer [als Quotientenziffer] setzen, die unter neun beträgt.)

Wurzelausziehung. Um zu finden die Wurzel einer Quadratzahl, so soll man sich erst unterrichten, was eine Quadratzahl und was die Wurzel einer Quadratzahl ist. Wenn beispielsweise eine Zahl ist multiplicirt mit mēt verste deutliich (?) nemt soe || 4 heuet effen ziden gheliich eene || 4 haenter figuren]. Die wortel van num. quadratus is || 1 numerus die is gheleet in henseluen als 2 werf twe dat is 4 || *et* 4 is num. quadratus *et* 2 is siin wortel. Aend als ghy wilt vinden || den wortel van num. quadratus soe sult ghy scriuen 1 ordien van figuren || van alzoe vele als ghy wilt Aend dan besyet weder die numerus sy || effen off onneffen. Want is hy effen (= onneffen) soe sult ghy mogen vinden || 1 figuer onder die achterste figuer an die slinker zide[15]) dat hy || in henseluen gheleedt mach aff doen dat bouen hen staet Daer na || (S. 9.) wert die figuer dupleert end gestellet onder die naeste figuer van digitus || duplicatus wert ghevonden 1 ander digitus end dat hy leet in digitum || duplatum aff doet al dat bouen staet aend daerna gheleet in hensel- || uen aff doet al dat bouen henseluen staet *et* die digitus (i) wert ghe- || dupleret end ghestellet vnder die naeste figuer an die rechter || zide end vnder die naeste figuer *voer* hen wert ghevonden 1 ander || digitus dat hy gheleedt in *digitos duplatos* aff doet al dat || bouen hen seluen staet Aend daer na gheleedt in hen seluen doet || aff al dat bouen henseluen staet[16]) Aend men sal niet cesseren || te vinden dese *digitos* noech van den duplacien van *digitorum* noech || van anterioreren der *digitos duplatos* tot dat ouer die erste figuer || wert vonden 1 digitus dat hy ghe-

sich selbst, so ist das (Product) eine Quadratzahl ... Die Wurzel einer Quadratzahl ist eine solche Zahl, die mit sich selbst multiplicirt wird, wie 2×2 ist 4, und 4 ist die Quadratzahl und 2 ist deren Wurzel. Und wenn ihr berechnen wollt eine Quadratwurzel, so sollt ihr schreiben eine Reihe von Ziffern, so viele als ihr wollt; und dann beseht die Zahl, ob sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Stellen habe. Hat sie eine ungerade Anzahl Stellen, so sollt ihr finden eine Wurzelstelle zur letzten Ziffer an der linken Seite (und zwar so gross), dass sie, mit sich selbst multiplicirt, vernichtet (durch Subtraction) das, was oben steht. Darnach wird die gefundene Wurzelstelle duplirt und gestellt unter die nächste Ziffer (des Radicanden). Mit Hilfe des Duplum wird (hierauf) gefunden eine zweite Wurzelstelle und zwar so gross, dass diese, multiplicirt mit dem Duplum, vernichtet (durch Subtraction) all' das, was oben steht, und ausserdem, multiplicirt mit sich selbst, vernichtet all' das, was über ihr steht. Und (hierauf) werden die (gefundenen) Wurzelziffern duplirt und (das Duplum) gestellt unter die nächste Ziffer (des Radicanden) an die rechte Seite, und zur nächsten Ziffer (des Radicanden) weiterhin wird gefunden eine neue Wurzelstelle, (so beschaffen,) dass sie, multiplicirt mit dem Duplum, vernichtet all' das, was über derselben steht; und ausserdem, multiplicirt mit sich selbst, vernichtet all' das, was darüber steht. Und man soll nicht aufhören zu finden die Wurzelstellen, noch mit dem Dupliren der Wurzelstellen, noch mit dem Vorrücken der Dupla, bis dass über die erste Ziffer (rechts) des Radicanden eine Wurzelstelle gefunden ist, welche, nachdem leedt wert in den andern digi- ‖ tos duplatos aff doet al dat bouen hen leeden (= beden?) staet want bliift ‖ yet *over* dat sal men buten houden. Aend om dat digitus moet ‖ siin ghedupleert daer aff wasset num. digitus offte num. compositus ‖ offte num. articulus. Aend *over* waseet num. compositus soe sal men scriuen ‖ digitus onder die naeste figuer an die rechter zide aend arti- ‖ culus an die slinker zide. Aend *over* wasset num. articulus soe ‖ sult ghy scriuen 1 cyfra vnder die naeste figuer an die rechter ‖ zide aend articulus an die slinker zide. Aend offt gheualt ‖ dat voer digitum duplatum en gheen digitus mach siin vonden ‖ om dat digitus duplatus is meere dan die numerus daer bouen ‖ hen staet suldi stellen 1 cyfra vnder die naeste figuer end dan anterio- ‖ reren by enen differentie et dan doen alsoet *voer* seyt is. Aend ‖ offt also is dat die digitus die achterste is vonden aff doet ‖ al die numerus daer bouen staet soe ist numerus quadratus. Aend wil ‖ ghy dan vinden siin wortel soe moet ghy helften al digitos ‖ duplatos end deen helfd met den digitus die achterste was ‖ vonden waert die wortel. Aend wilt ghy vinden siin wortel son- ‖ der helften soe moet ghy scriuen alwoes sbdupl (= *sub duplum*) onder digitus ‖ duplatus Aend dan die digitus die achterste wass vonden met sb- ‖ dupl. (= *subduplum*) dats siin wortel. Aend off ghy wilt prouen Offt wel sy ‖ ghedaen soe sult

sie multiplicirt ist mit den übrigen duplirten Wurzelstellen, vernichtet all' das, was darüber steht. Wenn bleibt etwas übrig, so soll man das aussen bergen (= hinten anmerken als Rest). Wenn eine Wurzelstelle muss duplirt werden, so ergiebt sich daraus eine Einerzahl oder eine zusammengesetzte Zahl oder ein Zehner. Ergiebt sich eine zusammengesetzte Zahl, so soll man schreiben die Einerziffer unter die nächste Ziffer (des Radicanden) zur rechten Seite und die Zehnerziffer an die linke Seite. Entsteht aber ein Zehner, so sollt ihr schreiben eine Null unter die nächste Ziffer (des Radicanden) zur rechten Seite, die Zehnerziffer zur linken Seite. Und wenn es der Fall ist, dass für ein Duplum keine Wurzelstelle gefunden werden kann, weil das Duplum mehr beträgt als die Zahl, welche darüber steht, so sollt ihr setzen eine Null (als Wurzelstelle) unter die nächste Ziffer (des Radicanden) und dann vorrücken (mit dem Duplum) um eine (= zwei) Stellen, und dann thun, wie zuvor gesagt ist. Und wenn es sich begiebt, dass die Wurzelstelle, welche zuletzt gefunden ist, vernichtet den ganzen Radicanden, so ist die Zahl (der Radicand) eine Quadratzahl. Und wollt ihr dann finden die Wurzel dazu, so müsst ihr halbiren das ganze Duplum und die eine Hälfte davon (angehängt) mit der Wurzelstelle, welche zuletzt gefunden wurde, bildet die Wurzel. Und wollt ihr finden die Wurzel, ohne zu halbiren, so müsst ihr schreiben allemal das halbe Duplum (= die Wurzelstelle) unter das Duplum (der Wurzelstellen), und dann ist die zuletzt gefundene Wurzelstelle (angehängt) an jenes halbe Duplum (an jene ersten Wurzelstellen) die Wurzel. Und wenn ihr wollt probiren, ob recht gethan ghy multipliceren die wortele in henseluen ‖ Aend dan suldi weder hebben dieseluen figuren die ghy tho voeren ‖ stellet. tho voeren is gheseyt dat siit also dat daer nyet ‖ *over* een bliift soe is numerus quadratus end bliift daer wat o*v*er ‖ soe is gheen quadratus. Aend in deser manieren soe moet men mul- ‖ tipliceren die wortel in hen seluen end met dat daer over bliift. ‖ (S. 10.) Aend voeren was gheseyt dats off die numerus onneffen soe soude ‖ men beghinnen werken onder t'achterste an die slinker zide *over* ‖ is die numerus effen soe sal men beghinnen werken vnder t'achterste ‖ sonder een siit also dat die digitus die men *v*int aff doet al dat ‖ bouen hen staet soe sal men scriuen 1 cyfra in die stede *v*p dat daer 1 ‖ figuer staet an die slinker zide. Aend siit alsoe dat daer bliuen ‖ cyferen soe sal deen helft van cyferen met sbdupl (= *subduplum*) siin die wortel ‖ van den numerus. **Radices cubiti.** ‖

Om den wortel te vinden van radices ‖ cubiti soe moet men eerst besyen ‖ wat is numerus cubitus aend wat die wor- ‖ tel is van num. cubitus. [Ass] numerus ‖ cubitus is 1 numerus die 2 werf ‖ is gheleet in henseluen off een ‖ werf in siin quadratus dat eenen ‖ is elke numerus mach wel siin die ‖ wortel van num. cubitus. Offt ‖ ghy dan wilt vinden die wortel ‖ van num. cubitus soe suldi enen ‖ numerus den welken dat ghy

sei, so sollt ihr multipliciren die Wurzel mit sich selbst, und dadurch sollt ihr wieder erhalten dieselben Ziffern, die ihr zuvor ansetztet (als Radicand). Zuvor ist gesagt, dass, sobald dort (beim Radiciren) nichts übrig bleibt, die Zahl eine Quadratzahl ist; und bleibt dort etwas übrig, so ist es keine Quadratzahl. Und in diesem Falle muss man (als Proberechnung) multipliciren die Wurzel mit sich selbst und dazu zählen, was dort übrig blieb. Und vorher wurde gesagt, dass, wenn der Radicand eine ungerade Anzahl von Stellen habe, so sollte man beginnen zu operiren unter der letzten Ziffer an der linken Seite. Hat aber der Radicand eine gerade Anzahl von Stellen, so soll man zu operiren beginnen (nicht) unter der letzten Ziffer, sondern (unter den beiden letzten Ziffern). Ist es also, dass die Wurzelstelle, die man findet, vernichtet all' das, was darüber steht, so soll man schreiben eine Null an die Stelle, wenn dort eine Ziffer steht an der linken Seite (?). Und ist es der Fall, dass dort (am Radicanden) übrig bleiben einige Nullen, so soll die eine Hälfte der Nullen vereint mit dem halben Duplum (= den bereits gefundenen Wurzelstellen) sein die Wurzel der (gegebenen) Zahl. — Cubikwurzel.

Will man die Cubikwurzel berechnen, so muss man erst sich unterrichten, was eine Cubikzahl und was die Wurzel einer Cubikzahl ist. Eine Cubikzahl ist eine solche Zahl, welche zweimal (nacheinander) multiplicirt ist mit sich selbst (aaa) oder einmal mit dem Quadrat (a^2a), welches von dem Einfachen (gebildet) ist. Jede Zahl kann sehr wohl sein eine Cubikwurzel. Wenn ihr wollt berechnen die Wurzel einer Cubikzahl, so sollt ihr wilt[17]) *et* dan sul- ‖ di die figuren distingweren byden steden van millenariorī ‖ [2] onder die figuren ind' achterste stede van millenarii soe woert von- ‖ den 1 digitus die in hen seluen gheleed cubitus aff doet al dat ‖ bouen hen staet daer na woert ghestelt die digitus ghedre- ‖ uendicht Aend woert ghestelt an die rechter zide onder die ‖ naeste daer die figuer end siin sbtpulū (= *subtriplatum*) onder hen [assloch] onder die ‖ naeste figuer *v*oer digitum t'*platū* (= *triplatum*) wert vonden 1 digitus die geleed ‖ sal siin met sbt'*plo* (= *subtriplato*) in t'*platū* (= *triplatum*) aend der na sonder sbt'*plo* (= *subtriplato*) gheleed ‖ in p*ductū* (= *productum*) aff doet al dat bouen staet jeghen den digitū *t'platū* (= *triplatum*) *et* daer na gheleedt in hen cubite aff doet al dat bouen hen staet ‖ [Assloch] wert die digitus drietvldich dat is *triplandus* end wert ghe- ‖ steelt onder die derde figuer an die rechter zide [end die eerste ‖ digitus t'*platus* wert ghetreekt achter hen]. Daer na wertg he- ‖ vonden een ander digitus dat hy met sbt'*pts* (= *subtriplatum*) gheleed in *triplatum* end daer na sonder sbt*plts* (= *subtriplatum*) gheleed in p*ductū* (= *productum*) doet aff al dat bouen ‖ *digitos triplatos.* end daer na gheleed in hen seluen *cubite* aff doet al ‖ dat bouen hen staet. Aend men sal niet cesseren van te vinden ‖

eine Zahl (wählen), welche ihr wollt, und dann sollt ihr die Ziffern (der Zahl) abtheilen (bezeichnen, punktiren) bei den Stellen der Tausendfachen [d. h. nach Gruppen von je drei Stellen]. Zu den Ziffern in der letzten Tausendergruppe (links) wird gefunden eine Wurzelstelle ($a = 2$), deren Cubus ($a^3 = 8$), vernichtet (durch Subtraction) alles das, was oben steht. Darnach wird die (gefundene) Wurzelstelle verdreifacht ($3a = 6$), und wird gestellt zur rechten Seite unter die nächste Ziffer (d. h. Gruppe von drei Ziffern), und ihr Subtriplum (d. h. der dritte Theil des Triplums, oder die Wurzelstelle a selbst) darunter. Zu der nächsten Ziffer über dem Triplat wird gefunden eine (neue) Wurzelstelle ($b = 4$), die gelegt werden soll an das Subtriplum (d. h. an die erste Wurzelstelle selbst $[a + b = 24]$) und dann multiplicirt mit dem Triplatum ($[a + b]3a = 24 \times 6 = 144$), und darnach ohne das Subtriplum (a) multiplicirt werden soll mit dem (vorigen) Product ($[a + b]3a \,.\, b = 144 \times 4 = 576$) und dies Resultat soll dann vernichten all' das, was über dem Triplat steht, und darnach soll der Cubus der zweiten Wurzelstelle ($b^3 = 64$) vernichten all' das, was darüber steht. Hierauf werden die vorhandenen Wurzelstellen (24) verdreifacht (72), und (die Zahl 72) wird gestellt unter die dritte Ziffer (d. h. dritte Gruppe von Ziffern) zur rechten Seite. Darnach wird gefunden eine neue Wurzelstelle ($\beta = 5$), welche so beschaffen sein muss, dass sich, wenn man sie an das Subtriplum (d. h. an die ersten zwei Wurzelstellen) fügt, ($\alpha + \beta = 245$) und diese Zahl mit dem Triplat ($3\alpha = 72$) multiplicirt und das Resultat ausserdem ohne das Subtriplatum mit ihr (β) multiplicirt, dann eine Zahl ergiebt, welche vernichtet alles das, was über dem Triplat steht, und dass ausserdem ihr Cubus (β^3) vernichtet alles das, was oben steht (d. h., dass die *digitos* noch van te driuendighe die *digitos triplatos* altoes vnder de derde figuer tot vnder die eerste figuren is gheuonden ‖ 1 *digitus* die gheleed met sbt'*plts* (= *subtriplatum*) in t'*platū* (= *triplatum*) aff doet all dat ‖ bouen staet alsoe *voer* gheseyt is. Aend als die wortele is ‖ (S. 11.) aldus aff ghetreekt end dan niet meer een bliift dat is numerus ‖ cubitus end die digitus die achterste was vonden met sb*triplis* ‖ is wortel van den numerus. Aend dan die wortel met hen seluen ghe- ‖ multipliceert brenghet weder die figuer die ghy tho voren hadt. ‖ Aend siit alsoe dat daer jet *over* biuet soe is die numerus niet *cubitus*. Aend dan sal men den wortel multipliceren by hen seluen ‖ [end daer na met sinen *pductum* aend ghy sult hebben den wortel ‖ van den g⁰ten (= gheleeten?) num. *cubite*] end met dat daer *over* bliift ‖ soe suldi weder hebben die figuren die ghy tho voren stellet. ‖ Aend offt also is dat en gheen digitus een mach sun vonden ‖ om dat digitus *triplatus* is meerne dan die numerus die bouen ‖ staet soe sal men setten dat 1 cyfra voer t'*platū*. Aend dan wert hy *[scaphans]* ghetreekt onder die derde figuer end die digiti ‖ *triplati* achter haer daer na wert een ander digitus von- ‖ den die met sbt'*plts* (= *subtriplatum*) gheleed in t'*platū* (= *triplatum*) aff doet alsoet to voren ‖ wel is to weten. Dat cyfra niet een wert onder haer ‖

β^8 noch abgezogen werden kann). — Und man soll nicht aufhören mit dem Finden der Wurzelstellen, noch mit dem Dreifältigen der Wurzelstellen, bis dass zur dritten Ziffer (links) der ersten Ziffern (d. h. ersten Gruppe von drei Ziffern rechts) ist gefunden eine Wurzelstelle, welche, nach Vorschrift multiplicirt, ein Resultat ergiebt, welches vernichtet alles, was oben steht, wie es zuvor gesagt ist. Und wenn die Wurzel ist also (= vorschriftsmässig) abgezogen, und es bleibt dann nichts übrig, so ist die Zahl eine Cubikzahl; und die zuletzt gefundene Wurzelstelle, angefügt an das Subtriplum (d. h. an die übrigen Wurzelstellen) ist die Wurzel der vorgelegten Zahl. Und die Wurzel, (dreimal) mit sich multiplicirt, bringt dann wieder die Ziffern, welche ihr zuvor hattet (als Radicand). Und begiebt es sich so, dass dort (vom Radicanden) etwas übrig bleibt, so ist die Zahl keine Cubikzahl. Und in diesem Falle soll man die Wurzel (dreimal) mit sich selbst multipliciren,. . . . und vermehrt um das, was dort übrig blieb, werdet ihr dann wieder erhalten die Ziffern, die ihr zuvor stelltet (als Radicand). Und wenn es der Fall ist, dass eine Wurzelstelle nicht kann gefunden werden, weil das Triplat mehr beträgt als die Zahl, die oben steht, so soll man setzen eine Null vor (d. h. rechts an) das Triplat; und dann wird es getragen (= gesetzt) unter die dritte Ziffer (links; der nächsten Gruppe) und die triplirten Wurzelstellen dahinter (nach links). Darnach wird eine neue Wurzelstelle gefunden, die, wenn sie vorschriftsmässig multiplicirt wird, ein Resultat ergiebt, welches vernichtet alles das, wie es zuvor wohl zu merken ist. Die Null (als Wurzelziffer) wird nicht unten hingestellt, sondern diese soll man bergen (anhängen) neben das Subtriplum gestellet dat men sal houden met sbtripl (= subtriplum). weel is to weten || dat van den Drievonden van den digitos *over* wasset num. compositus || ofte num. articulus ofte digitus end siit also dat || daer digitus aff coemt dat sal men stellen onder die der- || de figuer aen die rechter zide. Aend wast daer aff num. compositus || digitus wort ghescreuen aen die rechter zide onder die || derde figuer end articulus met den naesten digito *triplato* an die || slinker zide aend coemt daer aff num. articulus men sal scriuen || die cyfra onder die derde figuer aen die rechter zide aend articulus || aen die slinker zide alst *voer* ghescreuen is aldus || die figuer te niet siin eñ dan by een num. bliuen vele cy- || feren teen derden deel met spt'*plis* (= *subtriplum*) is die wortel van || numerus *cubiti*.

(d. h.: Erscheint eine Null als Wurzelstelle, so wird durch sie keine Multiplication und Subtraction veranlasst, sondern man schreibt sie ohne Weiteres in die Reihe der Wurzelstellen). Es ist wohl zu wissen (= merken), dass durch das Verdreifachen der Wurzelstellen entsteht entweder eine zusammengesetzte Zahl, oder ein Zehner oder eine Einerzahl; und ist es der Fall, dass dort eine Einerzahl entsteht, so soll man diese stellen unter die dritte Ziffer (der einzelnen Gruppen von je dreien) der rechten Seite. Und entsteht daraus eine zusammengesetzte Zahl, so wird die Einerziffer geschrieben zur rechten Seite unter die dritte Ziffer (der Gruppe) und die Zehnerziffer vereint mit dem nächsten Triplum zur linken Seite; und entsteht daraus ein Zehner, so soll man schreiben die Null unter die dritte Ziffer (der Gruppe) zur rechten Seite und die Zehnerziffer an die linke Seite, wie es zuvor beschrieben. Ist es also, dass die (geltenden) Ziffern (im Radicanden) nicht bis ans Ende gehen und dass dann bei dem Radicanden bleiben viele Nullen, so ist der dritte Theil (der Nullen) mit den (links vorgesetzten) Wurzelstellen die Wurzel der (vorgelegten) Cubikzahl.

Noten.

1) Die hier zum Druck beförderte Anweisung für's Ziffernrechnen befindet sich handschriftlich auf der Universitätsbibliothek zu Basel in einem Sammelbande (Octav), signirt: F. VII, 12, auf Bl. 169a bis 174a. Wir zählen diese 11 Seiten der Handschrift fortlaufend 1, 2, ..., 11.

In runden Klammern () stehen unsere Correcturen, Zusätze und Auflösungen, während wir durch eckige Klammern die unerledigt gebliebenen Stellen einschliessen. Die Auflösung der meisten Abkürzungen ist stillschweigend geschehen. Wo im Drucke ein cursives *v* steht, hat die Handschrift ein w. Je zwei senkrechte Striche || im Texte zeigen das Ende einer Zeile in der Handschrift an.

Bei der Erledigung sprachlicher Schwierigkeiten hat uns Herr Professor Dr. Hildebrand in Leipzig in bereitwilligster Weise unterstützt, für welche Güte wir ihm auch an dieser Stelle unsern wärmsten Dank aussprechen.

2) In folgenden Stellen ist auf diesen Algorismus Bezug genommen:

a) Mone, Zeitschr. f. d. Gesch. d. Oberrheins 1851, II, 136: „Alte Lehrbücher des Rechnens findet man hier und da in Handschriften, welche für die Geschichte der Lehrmethode nicht unerheblich sind. So enthält die Handschrift zu Basel F. VII, 12 eine deutsche Anweisung zum Zifferrechnen *(algorismus)* von 1408, die also nicht für gelehrte, sondern für Volksschulen bestimmt war, und woraus man nebst der Lehrmethode ersieht, dass damals die Zifferrechnung 7 Capitel umfasst, nämlich *additio, subtractio, duplatio, mediatio, multiplicatio, divisio, radices.*"

b) Kriegk, Deutsches Bürgerthum im Mittelalter. Neue Folge, 1871, S. 81 ff. fusst auf Mone.

c) In Kehrein, Erziehung und Unterricht, S. 263, und in Kehr, Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichts, 1877, I, 287 ist das Jahr 1117 als Abfassungszeit dieses Algorismus angegeben.

d) Joh. Müller macht (Kehr, Geschichte der Methodik IV, 335) auf den Irrthum bezüglich der angegebenen Abfassungszeit aufmerksam und giebt zugleich die richtige Zeit 1445 ca. an.

e) In Monumenta Germaniae Paedagogica, 1887, Bd. III, welcher Band eine „Geschichte des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525" von Günther enthält, findet man anhangsweise ein Photogramm des Algorismus, welches die erste, zehnte und elfte Seite zur Anschauung bringt. Im Vorworte jenes Bandes steht folgende Notiz: „Aus dem fünften Decennium des XV. Jahrhunderts existirt ein Algorithmus, der sowohl in sprachlicher als auch in sachlicher Hinsicht von hohem Interesse ist. Er ist geschrieben in jenem deutsch-holländischen Patois, welches noch heute in der Gegend von Cleve und Emmerich gesprochen wird und somit wohl das älteste arithmetische Document in vaterländischem Idiome. Zu spät auf das in Basel aufbewahrte Manuscript aufmerksam geworden, muss sich der Verfasser damit begnügen, auf die schöne artistische Beigabe am Schlusse dieses Bandes zu verweisen, welche einige Seiten der fraglichen Handschrift in trefflicher photographischer Nachbildung zur Anschauung bringt, und zugleich dem verehrten Baseler Collegen Herrn Professor Kinkelin, welchem er diese Bereicherung verdankt, seinen verbindlichsten Dank abzustatten."

Etwas Weiteres ist bis jetzt über unsern Algorismus nicht veröffentlicht worden.

Dass mit dem fünften Decennium des XV. Jahrhunderts die richtige Zeitbestimmung getroffen ist, kann zwar dem Algorismus nicht selbst entnommen werden; es folgt jedoch in jenem Sammelbande auf Bl. 177b bis 180a ein von derselben Hand geschriebener anderer Tractat, welcher Bl. 180a folgende Schlussworte hat: *„Deo gratias affinitus et completus p. (= per) me bernardum studentem tpis (= temporis) tc̄ (= tunc) hildēsim. Anno dm (= domini) M°cccc°xlv°."* Es ist demnach auch die Abfassungszeit des vorstehenden Algorismus entweder in oder kurz vor das Jahr 1445 zu setzen. — Zugleich ersieht man aus jenen Worten, dass der Schreiber ein Hildesheimer Stiftsschüler Bernhard war. Damit wird die Behauptung Mone's widerlegt, als sei der Algorismus für Volksschulen (welche es, in unserem Sinne wenigstens, damals noch gar nicht gab) bestimmt; er repräsentirt vielmehr den arithmetischen Unterricht in den lateinischen Schulen.

3) Figuren hiessen die neun geltenden Ziffern 1, 2, ..., 9. — Der Bezeichnung sämmtlicher zehn Zahlzeichen mit dem Ausdruck „Ziffern" begegneten wir zuerst 1514 bei Böschensteyn, Ain Newgeordnet Rechenbiechlin mit den zyffern etc. (Ex. in Leipzig, Univ.-Bibl.).

4) cpfer ist der Name für die Null. — Die Null nannten die Ostaraber *aṣ-ṣifr,* das Leere, als Uebersetzung von *sunya,* dem indischen Worte für Null (Cantor, Vorlesungen über Gesch. d. Math. I, 610). — Der byzantinische Mönch Planudes

(XIV. Jahrh.) nennt sie *Tsiphra* (Cantor, Vorles. I, 482). Der Italiener Lucas de Burgo braucht (In Summa de Arithmetica geometria, 1494) schon *nulla*. In Deutschland fanden wir *nulla* zuerst bei Köbel (Een New geordët Vysirbuch. Oppenheim, 1515. Bl. XV): „Achtmal Newntzig/ Such VIII mal IX so fyndestu LXXII die schreib mit zeyffern vnd setz ein 0 zeiffer: eine *nulla* dafür/ so werden es sibenhundert vnd tzwentzig vnd stet also 720.“

5) Die „erste“ Stelle ist stets die Einerstelle, die zweite die Zehnerstelle. — Die Ziffer der höchsten Ordnung in einer Zahl heisst immer die „letzte“ oder die „achterste“ (= hinterste) Stelle.

6) *Numeri digiti* = Fingerzahlen heissen die Einer 1, 2, ..., 9; *numeri articuli* = Gliedzahlen heissen die Zehner 10, 20, ..., 90; *numeri compositi* sind aus Einern und Zehnern zusammengesetzte Zahlen. — Vorstehende Eintheilung der Zahlen ist römischen Ursprungs.

7) Die Anzahl der Rechenspecies war damals zwischen neun (Numeriren, Addiren, Subt., Dupliren, Mediren, Mult., Div., Progrediren, Radiciren) und vier (Add., Subt., Mult., Div.) schwankend.

8) Es sei 3759 zu halbiren. Rechts wird begonnen. Das Schema würde folgendermassen aussehen:

$$\begin{array}{r} 1824 \\ 3759 \\ 555 \\ \hdashline 1879 \end{array} \text{ Rest } 1.$$

9) Beispiel: 8×9, wird berechnet: $8(10-1) = 80 - 8 = 72$. In algebraischen Zeichen: $ab = 10a - a(10-b)$. — Vorstehende complementäre Multiplication ist ein Rest römischer Rechnungsart (Cantor, Vorlesungen I, 495 und 754). Das 15. und 16. Jahrh. kannte drei verschiedene derartige Verfahren zur Berechnung des kleinen Einmaleins, welche wir sämmtlich in unserer „Methodik der praktischen Arithmetik“, 1888, S. 75 vorgeführt haben.

10) Beispiel:

$$\begin{array}{ll} 467 & \text{(Multiplicand),} \\ 32 & \text{(Multiplicator).} \end{array}$$

Man rechnet 4×3, dann 4×2. Hierauf rückt man den Multiplicator 32 eine Stelle nach rechts: $\begin{array}{l} 467 \\ \;32 \end{array}$, und rechnet: 6×3 und 6×2; rückt abermals 32 eine Stelle nach rechts und rechnet 7×3 und 7×2. Die Producte stellt man darüber; die einzelnen Phasen sehen so aus:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ 128 \\ \cancel{4}67 \\ 32\; \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ 7\;\; \\ 4\cancel{6}\;\; \\ 12\cancel{8}2 \\ \cancel{4}\cancel{6}7 \\ 32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\;\; \\ \cancel{7}4\; \\ 4\cancel{6}\cancel{3}\; \\ 12\cancel{8}24 \\ \cancel{4}\cancel{6}\cancel{7} \\ 32. \end{array}$$

11) Beispiel: 3002×540. Schema: $\begin{array}{r} 1620\;\; \\ \cancel{3}002 \\ 540.\;\; \end{array}$

12) Beispiel: 3672×502. Schema: $\begin{array}{r} 1506\;\; \\ \cancel{3}672 \\ 502.\;\; \end{array}$

13) Beispiel: $5474 : 28$; angeordnet: $\begin{array}{l} 5474 \\ 28 \end{array}$.

14) Es folgt ein nach der gegebenen Beschreibung ausgerechnetes Divisionsexempel in drei Phasen, je eine für eine Quotientenziffer.

	I.	II.	III.
		1	1
Rest	1	12	121
	22	223	223
Dividend	10488	10488	10488
Quotient	4	45	456
Divisor	23	23	23.

Die Multiplication des Divisors wird ziffernweis von links nach rechts fortschreitend ausgeführt und das aus jeder Ziffer entspringende Product sogleich subtrahirt. Man rechnet also $4 \times 2 = 8$, $10 - 8 = 2$; $4 \times 3 = 12$, $24 - 12 = 12$. Die Restziffern stehen über dem Dividenden; das Ausstreichen der verbrauchten Ziffern war in jener Zeit üblich.

15) Die Ausziehung der Quadratwurzel geschieht nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$.

16) Wir geben ein Schema zu der Beschreibung:

Ziffern der Ausrechnung	372 41 281	
Radicand	388129	$\sqrt{388129} = 623.$
Dupla	122 124	
Subdupla oder Wurzelstellen	6 2 3	

17) Wir begleiten die Beschreibung des Rechnungsverlaufes mit einem Schema:

Ziffern der Ausrechnung	88 694212	ab
Radicand	14706125	$\overbrace{245}$ $\alpha\ \beta$
6 und 72 sind Triplata;	6 72	
2, 4, 5 sind Subtriplata oder Wurzelstellen.	2 4 5	

$$3a = 6$$
$$(a+b)3a = 24 \times 6 = 144$$
$$(3a^2 + 3ab)b = 144 \times 4 = 576$$
$$670 - 567 = 94 \text{ steht oben,}$$
$$b^2 = 64$$
$$946 - 64 = 882 \text{ steht oben,}$$
$$3\alpha = 72$$
$$\alpha + \beta = 245$$
$$(\alpha + \beta)3\alpha = 245 \times 72$$
$$17640$$
$$(3\alpha^2 + 2\alpha\beta)\beta = 17640 \times 5 = 88200$$
$$88212 - 88200 = 12 \text{ steht oben,}$$
$$\beta^2 = 125$$
$$125 - 125 = 0.$$

Schlussbemerkung. Römischen Ursprungs sind in dem Algorismus nur die Eintheilung der Zahlen (Note 6) und die complementäre Multiplication (Note 9); alle übrigen Partien sind indisch. Auffallend ist das Fehlen der Neunerprobe, welche man um jene Zeit fast in allen Schriften findet, in denen die indische Rechnungsweise gelehrt wird.

Recension.

Dr. A. Harnack, **Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunction in der Ebene.** Leipzig, B. G. Teubner. 1887. (IV u. 158 S. gr. 8°.)

Mit der Erkenntniss, dass der auf das Dirichlet'sche Princip gegründete Existenzbeweis eines Integrals der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

im Innern eines beliebigen ebenen Gebiets, bei vorgeschriebenen Randwerthen, unzureichend sei, haben auch die Versuche begonnen, neue und strenge Existenzbeweise aufzustellen. An den hierbei gemachten Fortschritten im Beweise dieses für die Theorie des logarithmischen Potentials, der conformen Abbildung von Flächen aufeinander und für viele functionentheoretische Definitionen grundlegenden Satzes sind vor Allem H. A. Schwarz und Carl Neumann betheiligt und an diese anschliessend der Verf. des vorliegenden Buches. Es war demselben (Ber. d. k. sächs. Gesellsch. d. W. 1886) geglückt, die Einschränkungen, welche sich die früheren Untersuchungen in Bezug auf die Randcurve noch aufgelegt hatten — Curve nach aussen überall convex, in der ersten Methode des Herrn Schwarz, die vom geradlinigen Polygon ausging, und in der Methode des sogenannten „arithmetischen Mittels" des Herrn Neumann; Rand aus analytischen Curvenstücken zusammengesetzt in einer zweiten Methode des Herrn Schwarz —, im Wesentlichen zu heben. Er geht zu diesem Zwecke in der Hauptsache auf die erste Methode von Schwarz, nur bei beliebigem geradlinigem Polygon, zurück und gelangt durch Zufügung einiger Convergenzsätze zunächst zur speciellen Potentialfunction, die als „Green'sche" bezeichnet wird; von ihr aus aber durch eine schärfere Untersuchung ihrer Eigenschaften und durch eine kleine Modification der gewöhnlichen Green'schen Integralformel zur allgemeinen Potentialfunction. Um nun den so gewonnenen Standpunkt der ebenen Potentialtheorie deutlich werden zu lassen, war eine einheitliche, systematische Zusammenfassung und Darstellung dieser verschiedenen Arbeiten nothwendig, und so ist in dem vorliegenden Werkchen ein ganzes Lehrbuch über die Grundlagen einer allgemeinen Theorie der eindeutigen Potentialfunctionen in der Ebene — des reellen Theils einer Function einer complexen Variablen — entstanden, das einen wirklichen Fortschritt vorstellt und die schwierige Theorie nahezulegen geeignet ist. Die Beschränkung auf eindeutige Functionen ist dabei nur eine scheinbare, da der Uebergang von diesen zu mehrdeutigen Functionen (Poincaré) keine Schwierigkeiten mehr hat.

Ich gebe eine Uebersicht der Anordnung des Buches. Die beiden ersten Capitel enthalten die allgemeinen Definitionen und Sätze über die Potentialfunction (also auch über die durch ihr Verhalten im Unendlichen charakterisirte specielle solche Function, welche logarithmisches Potential heisst). „Harmonische Function" wird jede Function u genannt, die im Innern eines Gebiets τ nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten stetig ist und der obigen partiellen Differentialgleichung genügt, also der reelle Theil einer innerhalb τ regulären Function einer complexen Variablen. Die zu einem im Innern von τ gelegenen Punkte O als Pol gehörige „Green'sche Function g_0" ist diejenige innerhalb τ harmonische Function, welche am Rande σ von τ die Werthe $l\left(\frac{1}{r}\right)$ hat, wo r den Abstand des Randpunktes vom Punkte O bedeutet. Der Uebergang von dieser Function g_0 zu der conformen Abbildung der einfach zusammenhängenden Fläche τ auf das Innere eines Kreises ist nach Riemann bekanntlich sehr einfach (s. Cap. V des vorl. Buches). Die Hauptsätze beziehen sich auf das Integral

$$u' = \int\limits_{(\sigma)} U \frac{\cos(r,n)}{r}\, d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} U \frac{\partial}{\partial u_n} l\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma = \int\limits_{(\sigma)} U.(d\sigma)_0,$$

wo n die nach innen genommene Normale in einem Punkte $d\sigma$ des Randes σ von τ, $(d\sigma)_0$ die scheinbare Grösse des von O aus gesehenen Elements $d\sigma$, das von O den Abstand r hat, U eine längs σ stetige endliche Function ist; insbesondere auf die Werthbestimmung (nach Neumann) für einen dem Rande sich nähernden Punkt O. u' heisst dabei das Potential einer Doppelbelegung der Curve σ mit dem Moment U. Ferner werden die Green'schen Integralsätze entwickelt, aus denen Schlüsse aus dem bekannten Werthe der Function u an einer Stelle auf die endlichen Grenzen gezogen werden, innerhalb welcher u im ganzen Gebiete τ liegen muss; sodann wichtige Convergenzsätze für unendliche Reihen von Potentialfunctionen; und endlich werden die Fragen der Eindeutigkeit unter Voraussetzung der Existenz behandelt.

Mit den Existenzbeweisen selbst beschäftigen sich die Capitel III und IV. Es wird zuerst in III die Neumann'sche Methode des „arithmetischen Mittels", welche die Function u direct aus ihren Randwerthen durch eine unendliche Reihe von einfachen Operationen mittels des obigen Integrals u' construirt und auch wegen der dabei auftretenden, nur von der Gestalt des Gebiets τ abhängigen Constanten interessant ist, entwickelt und auch auf Discontinuitäten von U längs des Randes σ ausgedehnt. Diese Methode wird dann in IV nur für geradlinige Polygone benutzt und nach Neumann und Schwarz auf solche Polygone mit einspringenden Ecken ausgedehnt (auch noch nach einer zweiten, dem Verf. zugehörigen Methode). Jetzt können die wesentlichsten Schritte geschehen: der Uebergang der zu einem solchen Polygon gehörigen Green'schen Function zu derjenigen g, welche sich auf eine beliebig berandete Fläche τ bezieht; sodann die Ableitung der Formel

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\sigma)} U \frac{\partial\, lg\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \lim_{(\sigma'=\sigma)} \int U \frac{\partial g_i}{\partial n} d\sigma',$$

welche unter Benutzung jener Function g die harmonische Function u_i im Innern von τ aus ihren gegebenen Randwerthen U bestimmen lehrt; eine Formel, die in die gewöhnliche Green'sche übergeht, wenn man die sich σ nähernde Curve σ' direct mit σ zusammenfallen lässt, was für den Fall einer aus analytischen Curvenstücken bestehenden Begrenzung σ erlaubt ist.

Das Hauptproblem der Theorie wäre hiermit gelöst, wenn der Verf. nicht auch noch Beschränkungen zuliesse. Er nimmt nämlich an, dass entweder die U am Rande stetig verlaufen und dass zugleich das Randelement $d\sigma$ integrirbar sei, der Rand, einzelne Stellen ausgenommen, überall eine bestimmte sich stetig ändernde Tangente habe und dass die Function $\cos\alpha$, welche die Richtung dieser Tangente angiebt, keinen Werth unendlich oft annehmen soll, es sei denn, dass eine Geradenstrecke dem Rande angehört; oder dass bei Unstetigkeiten von U der Rand aus analytischen Curvenstücken bestehe. Damit ist auch angedeutet, in welcher Richtung weitere Untersuchungen erforderlich sind.

Der Rest des Buches enthält, zum Theil über Bekanntes hinausgehende, Untersuchungen über Functionen mit vorgeschriebenen Unstetigkeiten, über das Verhalten der conformen Abbildung am Rande, und endlich die bekannten directen Lösungen einiger allgemeiner Abbildungsprobleme.

Ich betone noch, dass sich überall in dem Buche scharfe, lückenausfüllende Betrachtungen finden. Und endlich erwähne ich eine weitere Seite des Werkes, den durchgehenden Hinweis auf die Analogien und Modificationen, welche für eine entsprechende Theorie des Raumpotentials eintreten. Diese Erweiterung verlangt noch eine Reihe neuer Untersuchungen, zu denen der Verf. eine kräftige Anregung geben will.

Erlangen, Mai 1888. M. NOETHER.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1888.

Periodische Schriften.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von G. ENESTRÖM. Jahrg. 1888 (4 Nrn.). Nr. 1. Berlin, Mayer & Müller. compl. 4 Mk.

Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, fortges. v. G. WIEDEMANN. Neue Folge 34. Bd., 5. Heft (Extraheft). Leipzig, Barth. 5 Mk. 40 Pf.

Reine Mathematik.

Schwarz, H., Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen. Halle, Schmidt. 1 Mk. 60 Pf.

Sickenberger, A., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel. München, Ackermann. 40 Pf.

Markoff, A., Table des valeurs de l'intégrale $\int\limits_x^\infty e^{-t^2}\,dt$. Petersburg und Leipzig, Voss. 2 Mk.

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. 5. umgearb. Aufl. 2 Bände. Leipzig, Teubner. 16 Mk. 80 Pf.

Angewandte Mathematik.

Schwahn, P., Ueber Aenderungen der Lage, der Figur und der Rotationsaxe der Erde, sowie über damit zusammenhängende geophysische Probleme. Berlin, Mayer & Müller. 2 Mk. 50 Pf.

Fröhlich, J., Allgemeine Theorie des Elektrodynamometers. Ein Beitrag z. Integr. u. Anwend. d. Differentialgleichungen d. elektrodyn. Induction. Berlin, Friedländer & S. 10 Mk.

Physik und Meteorologie.

Tait, P., Die Eigenschaften der Materie. Uebers. v. O. Siebert. Wien, Pichler's W. & S. 7 Mk.

Lindemann, F., Ueber Molekularphysik. Vers. einer dynam. Behandl. d. Kräfte. Königsberg, Koch. 1 Mk. 60 Pf.

Weinstein, B., Handbuch der physikalischen Maassbestimmungen. 2. Bd.: Einheiten f. Volumina, Massen, Dichtigkeiten etc. Berlin, Springer. 14 Mk.

Stokes, G., Das Licht. 14 Vorles., übers. v. O. Dziobek. Leipzig, Barth. 5 Mk.

Norrenberg, J., Ueber die Totalreflexion an doppelt brechenden Krystallen. Bonn, Behrendt. 1 Mk. 20 Pf.

Ambronn, L., Beitrag zur Bestimmung der Refractionsconstanten. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Mk.

Drude, P., Ueber die Gesetze der Reflexion und Brechung an der Grenze absorbirender Krystalle. (Dissert.) Ebendas. 1 Mk.

Zenker, W., Die Vertheilung der Wärme auf der Erdoberfläche. Berlin, Springer. 3 Mk.

Meyer, G., Ueber die thermische Veränderlichkeit des Daniell'schen Elements und des Accumulators. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1887.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Zur Einführung der Liniencoordinaten in die analytische Geometrie der Ebene. C. Koehler. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 152.
2. Les coordonnées parallèles de points. M. d'Ocagne. N. ann. math. Ser. 3, VI, 493.
3. Les coordonnées cycliques. M. d'Ocagne. Mathesis VII, 148.
4. Das Viereck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. V, 345.
5. Sur la droite de Simson. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, VI, 257.
6. Remarques sur la géométrie du triangle. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, VI, 215.
7. Applications de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Farisano, Mandart. Mathesis VII, 188. — J. Neuberg ibid. 155.
8. Remarques de géométrie infinitésimale. E. Cesaro. Mathesis VII, 25.
9. Nouvelle expression du rayon de courbure d'une courbe plane. E. Wasteels. Mathesis VII, 63.
10. Divers énoncés d'une propriété unique. Laisant. Mathesis VII, 64.
11. Propriété de la cycloïde. J. Neuberg. Mathesis VII, 17. — J. Mister ibid. 18.
12. Berechnung des Inhalts eines Vielecks aus den Coordinaten der Eckpunkte. W. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 339.
13. Sur les courbes $x^2y + a^2x = \lambda$. R. de Crès. N. ann. math. Ser. 3, VI, 369.
14. Propriété de la strophoïde. V. Jamet. Mathesis VII, 49. — Servais ibid. 72.
15. Sur une courbe du quatrième degré. Mosnat. Mathesis VII, 193.
16. Propriétés et aire d'une quartique. Derousseau. Mathesis VII, 250.

Vergl. Geschichte der Mathematik 88, 94. Kegelschnitte. Rectification.

Analytische Geometrie des Raumes.

17. Ueber den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche durch zwei Punkte gehen und eine Gerade treffen. F. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. V, 442.
18. Sur un lieu dans l'espace. G. Maupin. N. ann. math. Ser. 3, VI, 419.
19. Sur les hélicoïdes. G. Pirondini. N. ann. math. Ser. 3, VI, 87.
20. Die sphärische Schleifenlinie. Fr. Schiffner. Grun. Archiv 2. R. V, 610.

Vergl. Cubatur. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Ultraelliptische Transcendenten.

Astronomie.

21. Théorie de la réfraction astronomique et de l'aberration. O. Bonnet. N. ann. math. Ser. 3, VI, 385, 554.

Vergl. Geschichte der Mathematik 78, 82, 83, 89, 90, 91, 92

B.

Bestimmte Integrale.

22. Sur certaines opérations fontionnelles, représentées par des intégrales définies. S. Pincherle. Acta math. X, 153.

Vergl. Ellipt. Transcendenten. Gammafunctionen. Quadratur. Rectification.

C.

Combinatorik.

23. Einige Eigenschaften der Binomialcoefficienten mit Anwendungen auf Combinationslehre. C. W. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 218.
24. Zur Theorie der Elimination. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 46.
25. Eine Erweiterung des Factoriellensatzes. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 250.
26. Sur la division des polynomes. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 83.

Cubatur.

27. Volume engendré par la courbe d'Agnesi $y^2x+a^2(x-a)=0$ tournant autour de son asymptote. J. Mister. Mathesis VII, 5.

D.

Determinanten.

28. Der Kronecker'sche Subdeterminantensatz. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 119.
29. Die r-stufige Determinante n^{ten} Grades. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 185.

Vergl. Optik 187.

Differentialgleichungen.

30. Ueber die Integration linearer, nicht homogener Differentialgleichungen. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 22. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 33.]
31. Recherches sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. J. M. de Tilly. Mathesis VII, Supplément.
32. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. H. Poincaré. Acta math. X, 310.
33. Sur un cas spécial de l'équation différentielle de Lamé. E. A. Stenberg. Acta math. X, 339.
34. Sur une équation différentielle. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 204.
35. Ueber lineare simultane Differentialgleichungen, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden können. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 176. [Vergl. Bd. XXX, Nr. 79.]
36. Intégrer l'équation $\left(\frac{y}{x}+\frac{z^2}{y^2}+1\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(\frac{x}{y}+\frac{z^2}{x^2}+1\right)\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}\right)$. H. Brocard. Mathesis VII, 135.

Differentialquotient.

37. Substitution neuer Variabeln in höheren Differentialquotienten. Bochow. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 346.

Vergl. Functionen 54. Unbestimmte Formen.

E.

Elimination.

38. Sur l'élimination par la méthode d'Euler. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 67.

Vergl. Combinatorik 24.

Ellipse.

39. Sur deux cordes supplémentaires de l'ellipse également inclinées sur la normale de leur point de rencontre. Brocard etc. Mathesis VII, 236.
40. Ellipse glissant le long d'une autre égale à la première en restant parallèle à elle même pendant ce déplacement. Mosnat. Mathesis VII, 91.

Vergl. Maxima und Minima 69.

Ellipsoid.

41. Théorèmes sur l'ellipsoïde. Genty. N. ann. math. Ser. 3, VI, 401.
42. Trouver le lieu des normales à un ellipsoide parallèles à un plan donné. Mosnat, Falisse. Mathesis VII, 231.

Elliptische Transcendenten.

43. Zur Reduction der elliptischen Integrale in die Normalform. E. Vorsteher. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 145.
44. Darstellung der ersten Gattung der elliptischen Integrale durch Curvenbogen zweiten Grades. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. V, 315.

45. Ueber Multiplicator-Gleichungen höherer Stufe im Gebiete der elliptischen Functionen. P. Biedermann. Grun. Archiv 2. R. V, 1.
Vergl. Oberflächen 179.

F.

Formen.

46. Sur la forme adjointe. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 79.
47. Sur quelques formes quadratiques. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 85.
48. Zur Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante. J. Vivanti. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 287. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 75.]
49. Zur geometrischen Interpretation binärer Formen, speciell solcher von der vierten Ordnung, im ternären Gebiete. F. Hofmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 363.
50. Zerlegung einer Form m^{ter} Ordnung und n^{ten} Grades in ihre linearen Factoren. L. Schendel. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 83.
51. Ueber Formen mit zwei Reihen Veränderlicher. M. Pasch. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 255.

Functionen.

52. Ueber Algorithmen und Calculn. E. Schröder. Grun. Archiv 2. R. V, 225.
53. Sur les déloppements en séries des fonctions rationnelles. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 485.
54. Fonction continue sans dérivée de Weierstrass. P. Mansion. Mathesis VII, 222.
55. Exemple de fonctions à espaces lacunaires. G. Teixeira. N. ann. math. Ser. 3, VI, 43.
56. Sur une distribution de zéros. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, VI, 36.
Vergl. Bestimmte Integrale. Differentialgleichungen. Elliptische Transcendenten. Formen. Gleichungen. Integration (unbestimmte). Kettenbrüche. Logarithmen. Maxima und Minima. Quadratur. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Gammafunctionen.

57. Bemerkungen über die Gammafunctionen mit negativen Argumenten. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 246.

Geometrie (höhere).

58. Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Complexes. F. Hofmann. Grun. Archiv 2. R. V, 353.
59. Sur la réversibilité de la transformation linéaire. Cl. Servais. Mathesis VII, 90. [Vergl. Bd. XXIV, Nr. 3.]
60. Sur les transformations birationnelles quadratiques. P. Mansion. Mathesis VII, 110. — Cl. Servais ibid. 129, 187.
61. Berichtigung einiger Sätze aus der Lehre der polaren Elemente. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 127. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 98.]
62. Sur les courbes unicursales. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 205.
63. Beweis einiger Lehrsätze von Jacob Steiner. H. E. M. O. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 373.
64. Lieux des points des tangentes et des normales d'une courbe quelconque ayant d'un point donné la même distance que le point de la courbe, dont elles partent. Meurice. Mathesis VII, 273. — J. Neuberg ibid. 274. — Mantel ibid. 275.
65. Le centre des moyennes distances des points de contact de toutes les tangentes à une courbe algébrique parallèles entre elles est indépendant de la direction des Tangentes. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 82.
66. Génération linéaire de quelques courbes à éléments multiples. F. Deruyts. Mathesis VII, 241.
67. Sur quelques propriétés métriques des courbes. G. Humbert. N. ann. math. Ser. 3, VI, 526.
68. Théorèmes de Géométrie. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 269.
69. Application des propriétés de trois figures semblables. R. H. van Dorsten. Mathesis VII, 161. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 86.]
70. Die Curven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen. E. Czuber. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 257.

71. Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles. Weill. N. ann. math. Ser. 3, VI, 272.
72. Sur une courbe du quatrième degré ayant 3 points doubles. H. Brocard. Mathesis VII, 167. — J. Neuberg ibid. 168.
73. Ueber Schnitt und Schein eines windschiefen Vierecks. C. Beyel. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 301.
74. Die Raumcurven vierter Ordnung erster und zweiter Species in ihrem Zusammenhang mit den Steiner'schen Schliessungsproblemen bei den ebenen Curven dritter Ordnung. V. Eberhard. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 65, 129.

Vergl. Geschichte der Mathematik 87. Gleichungen 105. Kegelschnitte. Kreis.

Geschichte der Mathematik.

75. Aperçu sur les recherches récentes de l'histoire des mathématiques. G. Eneström. Biblioth. math. 1887, 3.
76. Otto anni d'insegnamento di Storia delle matematiche nella R. Università di Padova. A. Favaro. Biblioth. math. 1887, 49.
77. Die Platonische Zahl. C. Demme. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 81, 121.
78. Bemerkung zu einer Stelle im Almagest. A. Wittstein. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 201.
79. Études sur Diophante. P. Tannery. Biblioth. math. 1887, 37, 81, 103.
80. Notiz zur Geschichte der Klimatologie. S. Günther. Biblioth. math. 1887, 65.
81. Die Söhne des Musa ben Schakir. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1887, 44, 71.
82. Geminus in arabischer, hebräischer und zweifacher lateinischer Uebersetzung. M. Steinschneider. Biblioth. math. 1887, 97.
83. Der byzantinische Mathematiker Leon. J. L. Heiberg. Biblioth. math. 1887, 33.
84. Die Quaestio „De proportione dyametri quadrati ad costam ejusdem" des Albertus de Saxonia. H. Suter. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 41.
85. L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet. P. Tannery. Biblioth. math. 1887, 17.
86. On the name of the so-called „theorem of the gnomon". J. G. Allman. Biblioth. math. 1887, 22.
87. Sur le problème du noeud de cravate. Ch. Henry. Mathesis VII, 92.
88. War die Zykloide bereits im XVI. Jahrhundert bekannt? S. Günther. Bibl. math. 1887, 8.
89. Ueber eine neue Ausgabe von Galilei's sämmtlichen Werken. A. Favaro. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 173.
90. Nota relativa ad una edizione del Nuncius sidereus del Galilei. P. Riccardi. Biblioth. math. 1887, 15.
91. Die Prager Ausgabe des Nuncius sidereus. E. Wohlwill. Biblioth. math. 1887, 100.
92. Ueber die Entdeckung der Variation und der jährlichen Gleichung des Mondes. C. Anschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 1. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 112.]
93. Quelques lettres inédites de René Descartes et de Constantyn Huygens. D. Bierens de Haan. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 161.
94. Sur un théorème attribué à La Hire. C. Le Paige. Biblioth. math. 1887, 109.
95. Ueber das Zeichen ∞. R. Baltzer. Biblioth. math. 1887, 64.
96. The first determination of the length of a curve. S. A. Christensen. Bibl. math. 1887, 76.
97. Nouvelle notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718. G. Eneström. Biblioth. math. 1887, 23.
98. Verzeichniss von Druckfehlern in den Gauss'schen Abhandlungen über die hypergeometrische Reihe. H. Simon. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, hist.-lit. Abth. 99.
99. Notice biographique sur Chrétien Henry Nagel. P. Mansion. Mathesis VII, 114.
100. Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux. E. Rouché. N. ann. math. Ser. 3, VI, 105.
101. Paroles d'adieu aux abonnés des Nouvelles annales de mathématiques. Gerono. N. ann. math. Ser. 3, VI, 209.

Gleichungen.

102. Sur le calcul d'une fonction symétrique. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, VI, 416.
103. Sur le théorème de Rolle. J. Collin. N. ann. math. Ser. 3, VI, 266.
104. Sur le théorème de Rolle. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 75.
105. Sur une application du théorème de Rolle. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 190.
106. Sur une application de la méthode de Sturm. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 421.
107. Einige Anwendungen der Methode der wiederholten Substitutionen. W. Laska. Grun. Archiv 2. R. V, 199.
108. Trouver les substitutions rationnelles qui reproduisent une équation cubique donnée. A. Aubry. N. ann. math. Ser. 3, VI, 175.
109. Sur l'abaissement des équations réciproques. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 251.
110. Équations dont la résultante n'a que des racines réelles. A. Buchheim. Mathesis VII, 63.
111. Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 9.
112. Équations qui ne peuvent avoir de racine entière. Fauquembergue. Mathesis VII, 96.
113. Limite supérieure des racines positives d'une équation algébrique. E. Wasteels. Mathesis VII, 180.
114. Exacte Trennung der reellen Wurzeln numerischer algebraischen und transcendenten Gleichungen. A. Siebel. Grun. Archiv 2. R. V, 279.
115. Eine Lösung der gemischten quadratischen Gleichung. W. Laska. Grun. Archiv 2. R. V, 220.
116. Résolution d'un système d'équations par calcul symbolique. E. Cesaro. Mathesis VII, 177.
117. Trouver les rapports des trois inconnues de deux équations. A. Emmerich. Mathesis VII, 261.

Vergl. Elimination. Geschichte der Mathematik 79.

H.

Hydrodynamik.

118. Ueber die Contractio venae bei spaltförmigen und kreisförmigen Oeffnungen. F. Kötter. Grun. Archiv 2. R. V, 392.

Hyperbel.

119. Ueber Construction von Hyperbeln. H. Seipp. Grun. Archiv 2. R. V, 172.
120. Les points de Brocard et le point de Steiner sont sur une hyperbole circonscrite au triangle fondamental. E. Lemoine. N. ann. math. Ser. 3, VI, 582.
121. Sur l'hyperbole de Kiepert. M'Cay. Mathesis VII, 208. — Laisant ibid. 245.
122. Une hyperbole variable a, avec une ellipse fixe, un système de diamètres conjugués communs en grandeur et en position. Trouver le lieu des foyers de l'hyperbole. Mantel. Mathesis VII, 232.
123. Asymptotes des hyperboles passant par les sommets et le centre de gravité d'un triangle. Blondeel etc. Mathesis VII, 203.
124. Propriété des hyperboles dont les asymptotes sont parallèles aux axes d'une ellipse donnée. J. Neuberg. Mathesis VII, 48.
125. Hyperbole équilatère engendrée au moyen d'un cercle variable passant par 2 points fixes et coupant une droite donnée. Brocard. Mathesis VII, 164. — Renkin etc. ibid. 165. — Meurice ibid. 166.
126. Les milieux des côtés d'un triangle, le centre du cercle circonscrit à ce triangle, un sommet et l'intersection du côté opposé avec la tangente en ce point au cercle circonscrit se trouvent sur une même hyperbole équilatère. Mosnat. Mathesis VII, 98. — Deprez, Gillet, Boedt, Verniory ibid. 99.
127. Hyperbole équilatère passant par les sommets d'un triangle et par les centres radicaux de deux systèmes de trois circonférences chacune. Van de Berg. Mathesis VII, 118. — Lienard ibid. 190.
128. Un sommet et un point d'une hyperbole équilatère étant donnés divers autres points décrivent des cubiques. Gob, Deprez. Mathesis VII, 141.
129. Sécante commune de deux hyperboles équilatères de même centre. Deprez. Mathesis VII, 63.

I.

Integration (unbestimmte).

130. Sur les conditions d'intégrabilité d'une expression différentielle. H. Laurent. N. ann. math. Ser. 3, VI, 19, 274, 305.
131. Sur l'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$. Balitrand. N. ann. math. Ser. 3, VI, 45. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 156.]
132. Ueber die Integrale $\int \frac{\sin z}{z^a}\, dz$ und $\int \frac{\cos z}{z^a}\, dz$. E. Linhardt. Grun. Archiv 2. R. V, 91.

K.

Kegelschnitte.

133. Einiges über Gebilde zweiten Grades und deren reciproke Inversen. B. Sporer. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 56.
134. Sur la détermination des foyers d'une conique. E. Goursat. N. ann. math. Ser. 3, VI, 465.
135. Sur la théorie des foyers. Mathesis VII, 91.
136. Sur les normales d'angle α. P. H. Schoute. Mathesis VII, 38.
137. Ueber zwei Punktepaare auf der Hauptaxe eines Kegelschnittes, deren jedes durch die Brennpunkte harmonisch getrennt ist. Th. Meyer. Grun. Archiv 2. R. V, 211.
138. Aire du quadrilatère dont les sommets sont un foyer, deux points d'une conique et le point de rencontre des tangentes à ces deux points. Deprez. Mathesis VII, 256.
139. Centre du cercle inscrit du triangle dont les sommets sont les deux foyers et un point d'une conique. N. Goffart. N. ann. math. Ser. 3, VI, 395.
140. Conique décrite à l'aide d'un triangle ayant un angle double d'un second. Laurens etc. Mathesis VII, 237.
141. Sur deux sécantes rencontrant une conique en quatre points d'une même circonférence. Verniory. Mathesis VII, 97.
142. Ueber einige Eigenschaften des Systems der Kegelschnitte, die drei feste Gerade berühren. C. Döhlemann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 120.
143. Sur une série de coniques concentriques homothétiques. Verniory & Klompers. Mathesis VII, 52.
144. Sur les coniques circonscrites à un parallélogramme donné et tangentes à une droite donnée. A. Droz. N. ann. math. Ser. 3, VI, 580.
145. Coniques touchant une droite donnée dans un point donné et ayant une autre droite donnée pour directrice. Barisien. N. ann. math. Ser. 3, VI, 372.
146. Lieu des sommets des coniques semblables à une conique donnée et soumises à certaines conditions. H. Brocard. Mathesis VII, 139.
147. Chercher le lieu des centres des coniques passant par trois points donnés A, B, C dont l'un A est un sommet de la courbe. Deprez, Verniory. Mathesis VII, 69. — Mosnat ibid. 70.

Vergl. Ellipse. Formen 49. Hyperbel. Kreis. Parabel.

Kettenbrüche.

148 Ueber Kettenbrüche. W. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 193.
149. Sur quelques fractions continues. E. Cesaro. N. ann. math. Ser. 3, VI, 29.
150. Sur les reduites de deux fractions continues. J. Collin, Mandart. Mathesis VII, 163.

Vergl. Gleichungen 106.

Kreis.

151. Sur le cercle triplicateur. Tucker. Mathesis VII, 12.
152. Propriétés de trois figures semblables. J. Casey. Mathesis VII, 14, 75.
153. Sur la géométrie du cercle de Brocard. A. Emmerich. Mathesis VII, 246, 272.
154. Sur le point d'Ocagne. Genese. N. ann. math. Ser. 3, VI, 297. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 186.]
155. Application d'un théorème de Stewart au problème de mener par deux points donnés une circonférence tangente à une circonférence donnée. B. Niewenglowski. N. ann. math. Ser. 3, VI, 173.
156. Sur trois points des côtés d'un triangle inscrit dans un cercle qui se trouvent en ligne droite avec le centre. Boedt etc. Mathesis VII, 234.
157. Théorème sur des cercles inscrits à des triangles. Deprez. Mathesis VII, 54.

158. Sur différentes circonférences se rapportant à un triangle. S. Bouwmeester etc. Mathesis VII, 238.
159. Ueber die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise. C. Reinhardt. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 183.
160. Théorème sur deux circonférences dont la seconde passe par le centre de la première. Deprez. Mathesis VII, 75.
161. Sur deux circonférences passant par un point donné et par le sommet d'un angle donné. Verniory, Gob, Klompers, Deprez, Laurens. Mathesis VII, 123.
162. Sécantes de deux circonférences passant par un point commun à toutes les deux. Gob. Mathesis VII, 53.
163. Génération d'un limaçon de Pascal au moyen de deux circonférences fixes et une circonférence variable. Mandart. Mathesis VII, 235.

Vergl. Rectification 215. Reihen 222.

L.

Logarithmen.

164. Ueber die Basis der natürlichen Logarithmen. O. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 191.
165. Sur la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 60.
166. Eingrenzung der Zahl e auf geometrischem Wege. Weinmeister. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 256.

M.

Maxima und Minima.

167. Sur le maximum d'un produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante. E. Goursat. N. ann. math. Ser. 3, VI, 437.
168. Minimum d'une certaine longueur dans un triangle. Deprez. Mathesis VII, 202. — Jeřábek & Farisano ibid. 203.
169. Maximum d'un angle dans l'ellipse. Mandart, Deprez, Emmerich. Mathesis VII, 260.

Mechanik.

170. Einige Sätze über Massenmittelpunkte. H. Seipp. Grun. Archiv 2. R. V, 178.
171. Propriétés géométriques des polygones funiculaires. E. Rouché. N. ann. math. Ser. 3, VI, 439.
172. Sur le principe de l'énergie. M. Lévy. N. ann. math. Ser. 3, VI, 505.
173. Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme. K. Bohlin. Acta math. X, 109.
174. Sur le mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution. G. Kobb. Acta math. X, 89.
175. Ueber die sphärisch-elliptische Bewegung. B. Decker. Grun. Archiv 2. R. V, 430.
176. Ueber eine Stelle in Poisson's Mechanik. Pfannstiel Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 244. — W. Hess ebenda 382.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4, 5, 6. Hydrodynamik. Optik. Potential. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

177. Das n-dehnige $(n+1)$-Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheitsaxen. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. V, 418.
178. Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. G. Koenigs. Acta math. X, 313.

O.

Oberflächen.

179. Zur Theorie der krummen Oberflächen. R. Lipschitz. Acta math. X, 131.
180. Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres régulier. L. Lecornu. Acta math. X, 201
181. Ueber die Pseudosphäre. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. V, 217.

182. Sur la courbure des sections normales d'une surface. Genty. N. ann. math. Ser. 3, VI, 24.
183. Sur la courbure des lignes géodésiques d'une surface de révolution. H. Resal. N. ann. math. Ser. 3, VI, 57.
Vergl. Thetafunctionen. Variationsrechnung.

Oberflächen zweiter Ordnung.

184. Sur les foyers des sections planes d'une quadrique. Drouet. N. ann. math. Ser. 3, VI, 321.
185. Sur une surface du second ordre passant par 12 points situés sur les arêtes d'un tétraèdre donné. E. Mosnat. Mathesis VII, 120.
186. Engendrement d'un paraboloïde. J. Neuberg. Mathesis VII, 194.
Vergl. Ellipsoid. Optik 189.

Optik.

187. Bestimmung der Cardinalpunkte eines dioptrisch-katoptrischen Systems centrirter sphärischer Flächen mittels Kettenbruchdeterminanten dargestellt. L. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 170.
188. Bestimmung des Ortes und der Helligkeit des gebrochenen Bildes eines Punktes, wenn die brechende Fläche eine Ebene ist. W. Saltzmann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 369.
189. Allgemeine Theorie der Isophoten-Tangenten und Construction derselben für Flächen zweiten Grades. J. Bazala. Grun. Archiv 2. R. V, 113.
190. Sur un mode de génération de la spirale hyperbolique. H. Schoentjes. Mathesis VII, 248.

P.

Parabel.

191. Théorèmes sur la parabole. C. Bergmans. Mathesis VII, 186. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 214.]
192. Sur deux cercles osculateurs d'une parabole. Jeřábek, Derousseau, Deprez. Mathesis VII, 252.
193. Problème se rapportant à toutes les paraboles passant par deux points donnés et telles que les tangentes en ces points se coupent sur une droite donnée. Pisani. Mathesis VII, 70.
194. Lieu des foyers des paraboles qui touchent deux droites données et dont l'axe passe par un point donné. Deprez, Farisano, Gob, Pisani, Verniory. Mathesis VII, 20.
195. Sur deux paraboles variables. H. Brocard, J. Neuberg. Mathesis VII, 182.
196. Propriétés d'un groupe de trois paraboles. H. Brocard. Mathesis VII, Suppl.

Planimetrie.

197. Partage d'une droite en moyenne et extrème raison. Weidenholzer. Mathesis VII, 62. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 220.]
198. Théorème sur les transversales. J. Neuberg. Mathesis VII, 245.
199. Sur les points complémentaires. Em. Vigarié. Mathesis VII, 6, 57, 84, 105.
200. Points d'intersection de la médiane d'un triangle avec les perpendiculaires élevées aux milieux des côtés adjacents. Verniory. Mathesis VII, 162.
201. Ein geometrisches Problem. P. H. Schoute. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 59. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 174.]
202. Propriétés du triangle. Cl. Thiry. Mathesis VII, 116.
203. Quelques propriétés du triangle. M. d'Ocagne. Mathesis VII, 265.
204. Transmutation d'un triangle. Laisant, J. Neuberg. Mathesis VII, 180.
205. Sur quelques points remarquables du triangle. Mineur. Mathesis VII, 143. — Beyens, Deprez ibid. 144.
206. Centre isologique du triangle. J. Neuberg. Mathesis VII. 117.
207. Propriétés du triangle circonscrit. J. Neuberg. Mathesis VII, 277.
208. Propriétés du contreparallélogramme. Mathesis VII, 227.
209. Construire un parallélogramme $ABCD$, connaissant les distances d'un point intérieur M aux sommets et la somme des angles AMB, CMB. A. Emmerich. Mathesis VII, 278.
Vergl. Geschichte der Mathematik 86. Kreis. Maxima und Minima 168. Zahlentheorie 269.

Potential.

210. Sur un théorème de la théorie de l'attraction. E. Sarrau. N. ann. math. Ser. 3, VI, 469.
211. Zur Theorie des Flächenpotentials. J. Weingarten. Acta math. X, 303.

212. Umkehrung eines Satzes über die Anziehung einer Kugel. R. Hoppe. Grun. Archiv 2. R. V, 351.

Q.

Quadratur.

213. Sur le calcul approximatif des aires planes. P. Mansion. Mathesis VII, 77. [Vergl. Bd. XXVII, Nr. 238.]
214. Détermination du reste dans la formule de quadrature de Gauss. P. Mansion. Mathesis VII, Supplément.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 12.

R.

Rectification.

215. Näherungsausdruck für π. E. Lakenmacher. Grun. Archiv 2. R. V, 352.
216. Sur la rectification de quelques courbes remarquables. G. de Longchamps. Mathesis VII, 127, 170.

Vergl. Geschichte der Mathematik 88, 96.

Reihen.

217. Sur les séries. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 243.
218. Un théorème de la théorie des séries. M. Lerch. Acta math. X, 87.
219. Sur la multiplication de deux séries. P. J. Stieltjes. N. ann. math. Ser. 3, VI, 210.
220. Ueber den Rest der Reihe für $arcsin x$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 368.
221. Bemerkung zu einer Reihe. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. V, 219. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 69.]
222. Eine Reihenentwickelung für π. E. Oekinghaus. Grun. Archiv 2. R. V, 218. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 69.]
223. Table des valeurs des sommes $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$. P. J. Stieltjes. Acta math. X, 299.
224. Sur les polynomes qui expriment la somme des puissances p des n premiers nombres entiers. P. Appell. N. ann. math. Ser. 3, VI, 312.
225. Sur les valeurs approchées des polynomes de Bernoulli. P. Appell. N. ann. math. Ser. 3, VI, 547.

Vergl. Functionen 53. Geschichte der Mathematik 97, 98. Zahlentheorie 254, 255.

S.

Schwerpunkt.

226. Centre de gravité de n points chargés respectivement des poids 1, 2, .. n. Mosnat. Mathesis VII, 122.

Sphärik.

227. Triangle sphérique de périmètre constant. Mathesis VII, 169.
228. Propriété du triangle sphérique dont la somme des angles est égale à quatre droites. Pisani, Gob, Deprez. Mathesis VII, 19. — J. Neuberg ibid. 20.
229. Sur le cercle circonscrit et le cercle inscrit d'un triangle sphérique équilatéral. Boedt. Mathesis VII, 255.
230. Sur le quadrilatère sphérique complet. Van Dorsten. Mathesis VII, 276.
231. Rayon sphérique d'un cercle qui touche trois cercles données. Beyens. Mathesis VII, 121.

Stereometrie.

232. La sphère de S. Roberts. J. Neuberg. Mathesis VII, 134.

Substitutionen.

233. Beweis eines Satzes aus der Theorie der Substitutionen. R. Lipschitz. Acta math. X, 137.

Vergl. Gleichungen 107, 108.

T.

Thetafunctionen.

234. Die Minimalflächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien. H. Dobriner. Acta math. X, 145. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 272.]

Trigonometrie.

235. Quelques équations trigonométriques entre des fonctions d'angles dont deux diffèrent de 90 degrés. Pisani & Mineur. Mathesis VII, 22.

236. Si $a_1 \cos x_1 + a_2 \cos x_2 + \cdots + a_n . \cos x_n = a_1 \cos(x_1+\alpha) + a_2 \cos(x_2+\alpha) + \cdots + a_n \times \cos(x_n+\alpha) = 0$ on aura aussi $a_1 \cos(x_1+\Theta) + a_2 \cos(x_2+\Theta) + \cdots + a_n . \cos(x_n+\Theta) = 0$, Θ étant quelconque. Laisant. Mathesis VII, 272.

237. Équation ayant lieu entre les angles d'un triangle et l'angle formé par des droites menées du centre du cercle circonscrit aux centres du cercle inscrit et d'un cercle exinscrit. Mosnat. Mathesis VII, 100. — J. Neuberg ibid. 101.

238. Solution d'une équation dont l'inconnue est donnée par des fonctions trigonométriques se rattachant aux quatre angles d'un quadrilatère. Tucker. Mathesis VII, 99.

239. Sur l'équation de degré m qui donne $tang\frac{a}{m}$ lorsqu'on connait $tang a$. Ch. Biehler. N. ann. math. Ser. 3, VI, 5.

240. Construction du cube d'un nombre. R. Tucker. Mathesis VII, 245.

241. Étant donné un angle α, construire l'angle β d'après l'équation $\cos\beta . tg\frac{\beta}{2} = \cos\alpha . tg\frac{\alpha}{2}$. Mosnat. Mathesis VII, 195. — Meurice ibid. 196.

242. Résoudre un triangle connaissant un angle, la somme de ses deux côtés et la somme des deux droites, qui menées par son sommet partagent le côté opposé en trois parties égales. Deprez, Russo. Mathesis VII, 145.

243. Sur le calcul de certaines longueurs en fonction des éléments d'un triangle. Mosnat, Boedt, Verniory, Deprez. Mathesis VII, 102.

244. Ein merkwürdiges Dreieck. H. Stade. Grun. Archiv 2. R. V, 223.

245. Équivalence de deux triangles. S. Bouwmeester etc. Mathesis VII, 260.

Vergl. Sphärik.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

246. Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten. O. Staude. Acta math. X, 183.

247. Sur les intégrales algébriques des différentielles algébriques. G. Humbert. Acta math. X, 281.

Unbestimmte Formen.

248. Zur Lehre von den unter unbestimmter Form erscheinenden Ausdrücken. L. Saalschütz. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 378.

V.

Variationsrechnung.

249. Ueber die Curve, deren Rotation die kleinste Oberfläche erzeugt. L. Saalschütz. Grun. Archiv 2. R. V, 131.

W.

Wärmelehre.

250. Zur dynamischen Gastheorie. B. W. Stankewitsch. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 187.

251. Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern. A. Harnack. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 91.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

252. Zur mathematischen Statistik. H. Zimmermann. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 62. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 285.]

253. Zur mathematischen Statistik. W. Küttner. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 234.

Wurzelausziehung.

Vergl. Geschichte der Mathematik 84, 85, 93.

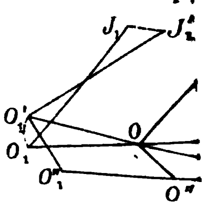
Z.

Zahlentheorie.

254. Ueber Summen von grössten Ganzen. J. Hacks. Acta math. X, 1. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 292.]
255. Sur les valeurs de quelques séries qui dépendent de la fonction $E(x)$. M. A. Stern. Acta math. X, 53. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 291.]
256. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes durch Umkehrung. J. Hermer. Grun. Archiv 2. R. V, 190.
257. Ueber gewisse trinomische complexe Zahlen. K. Schwering. Acta math. X, 57.
258. Theorie der Restreihen zweiter Ordnung. K. Weihrauch. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 1.
259. Zur Theorie der Potenzreste. J. Kraus. Zeitschr. Math. Phys. XXXII, 360.
260. Somme des restes élevés à la puissance q provenant de la division de a^n par p. Hocken, Mosnat. Mathesis VII, 124.
261. Si p désigne un nombre premier, déterminer le plus petit nombre n pour lequel le produit des n premiers nombres soit divisible par p^λ. J. Neuberg. Mathesis VII, 68.
262. Sur le neuvième nombre parfait. Ed. Lucas. Mathesis VII, 45.
263. Sur les nombres parfaits. Cl. Servais. Mathesis VII, 228. — E. Cesaro ibid. 245.
264. Untersuchung der Zahl $2^{37}-1$. P. Seelhoff. Grun. Archiv 2. R. V, 221.
265. Sur la divisibilité des nombres. E. Catalan. Mathesis VII, 44.
266. Trouver deux ou trois nombres premiers dont le produit se compose de 7, 11, 13 ou 17 fois le chiffre 1. H. Brocard. Mathesis VII, 78.
267. Théorème d'arithmétique. H. Christensen Mathesis VII, 178.
268. Théorème d'arithmétique. Oltramare. Mathesis VII, 272.
269. Ueber rationale Dreiecke und ihren Zusammenhang mit der Pell'schen Gleichung. R. Müller. Grun. Archiv 2. R. V, 111.
270. Somme de deux carrés. Fauquembergue. Mathesis VII, 120.
271. Changement d'une certaine expression en somme de deux carrés. Deprez. Mathesis VII, 144.
272. Identités algébriques. Boïje af Gennäs. Mathesis VII, 179.
273. Résoudre en nombres entiers l'équation $x^2+y^2=(x-y)^3$. Russo. Mathesis VII, 146.
274. Les nombres 1 et 8 sont les seuls cubes consécutifs donnant pour somme un carré. Fauquembergue. Mathesis VII, 200.
275. Une solution de l'équation $x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(z+x)$ étant connue, en trouver une autre. Rochetti, Deprez. Mathesis VII, 197.
276. Le seul nombre entier, premier avec 5, dont le cube diminué de 13, soit le quadruple d'un triangulaire, est 17. Fauquembergue. Mathesis VII, 257.

Vergl. Formen. Geschichte der Mathematik 77. Trigonometrie 240.

F



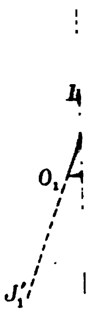


Fig.

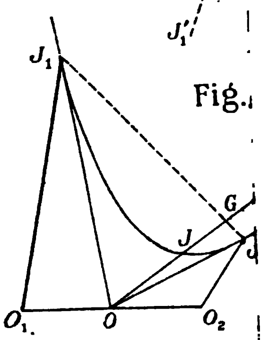
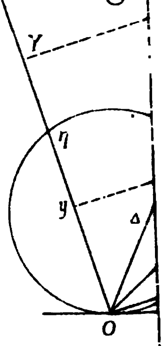


Fig. 8



Historisch-literarische Abtheilung.

Kleine Anecdota zur byzantinischen Mathematik.

Von

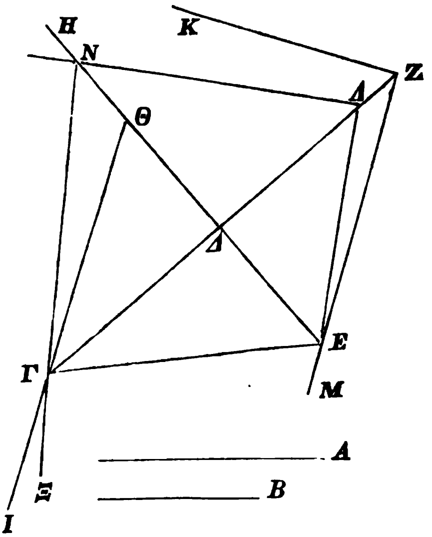
Dr. J. L. Heiberg

in Kopenhagen.

Bei der Durchsicht der auf griechische Mathematik bezüglichen Handschriften verschiedener, namentlich italienischen, Bibliotheken habe ich mir gelegentlich einige unedirte Kleinigkeiten, die mir von Interesse schienen, abgeschrieben. Was davon mit Euklid in Verbindung stand, ist im Appendix III des V. Bandes der Elemente veröffentlicht. Den Rest theile ich hier mit in der Hoffnung, einen kleinen Beitrag zur Erforschung der so sehr vernachlässigten byzantinischen Mathematik zu geben.

I.

Ἡ τούτου τοῦ προβλήματος μέθοδος Ἀραβική ἐστιν. Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν. ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Α, Β· δεῖ δὴ τῶν Α, Β δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν.



συνεστάτω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΓΔΕ ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Δ γωνίαν καὶ τὴν μὲν ΓΔ εὐθεῖαν ἴσην τῇ Α, τὴν δὲ ΔΕ τῇ Β, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΓΔ, ΕΔ ἐπ' ἄπειρον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἤχθω ἐπὶ τὴν ΔΖ ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχεν, οὐδετέρας ἐλάττονα τὴν ΔΖ εὐθεῖαν τῶν ΓΔ, ΔΕ ἀπολαμβάνουσα, διὰ δὲ τοῦ Γ ἤχθω τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΘΓΙ περατουμένη μὲν ὑπὸ τῆς ΕΗ κατὰ τὸ Θ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ι, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἤχθω τῇ ΖΕ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΚ ἄπειρος κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ

1. ἡ — ἐστιν] om. m. ἐστι v. 6. εὐθεῖαν] om m. 11. ἔτυχε m. 12. οὐδετέρας —. 13. ἀπολαμβάνουσα] om. m.

ΖΔΗ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΚ ἐλάττων ὀρθῆς, αἱ ΖΚ ἄρα ΔΗ συμπίπτουσί ποτε ἀλλήλαις. πρῶτον μὲν οὖν ἡ ΕΖ καταφερέσθω τε διὰ τοῦ Ε σημείου καὶ περιαγέσθω ἅμα περὶ τὸ αὐτὸ οὕτως, ὥστε καὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐχόμενον ἀεὶ τῆς ΖΔ καταφέρεσθαι ὡς ἐπὶ τὸ Δ, συγκαταφερέσθω δὲ τῇ αὐτῇ ΕΖ μένουσα ἀεὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ καὶ ἡ ΖΚ, ἡ δὲ ΘΓΙ ἀναφερέσθω τε διὰ τοῦ Γ σημείου καὶ περιαγέσθω ἅμα περὶ τὸ αὐτὸ οὕτως, ὥστε καὶ τὸ Θ σημεῖον ἐχόμενον ἀεὶ τῆς ΔΗ ἀναφέρεσθαι μὲν ὡς ἐπὶ τὸ Η, μένειν δὲ τὴν αὐτὴν ΘΓΙ εὐθεῖαν καὶ τῇ ΕΖ ἀεὶ παράλληλον, καὶ ταῦτα γιγνέσθω, ἕως τὸ Θ σημεῖον τῇ κοινῇ τομῇ προσπέσῃ τῶν ΔΗ, ΖΚ εὐθειῶν, καὶ τὰς ΕΖ, ΖΚ, ΘΓΙ εὐθείας θέσιν λαβεῖν ὡς τὴν ΜΛ, ΛΝ, ΝΓΞ.

ἐπεὶ οὖν ἡ ΛΝ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΛΜ, ἡ δὲ ΝΓΞ τῇ ΛΜ παράλληλος, καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΓ ἄρα γωνία ὀρθή ἐστιν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Δ ἅπασαι γωνίαι ὀρθαί. τριγώνου δὴ ὀρθογωνίου τοῦ ΓΝΛ ἀπὸ τῆς Ν κορυφῆς ἐπὶ τὴν ΓΛ βάσιν κάθετός ἐστιν ἠγμένη ἡ ΝΔ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΝ, ἡ ΔΝ πρὸς τὴν ΔΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ὡς ἡ ΝΔ πρὸς τὴν ΔΛ, ἡ ΔΛ πρὸς τὴν ΔΕ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΓΔ τῇ Α ἴση, ἡ δὲ ΔΕ τῇ Β. καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν ΝΔ, ἥ τε ΝΔ πρὸς τὴν ΔΛ καὶ ἡ ΔΛ πρὸς τὴν Β.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β δύο μέσαι ἀνάλογον εὕρηνται αἱ ΝΔ, ΔΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Dieses Stück ist erhalten 1. in cod. Venet. Marcian. 301 (fol. 465) saec. XV, nach welchem der obige Text gegeben ist; 2. in cod. Venet. Marcian. 302, zum Theil von **Bessarion** geschrieben (Morelli Bibliotheca mss. S. 178), oben mit m bezeichnet, worin es fol. 157[v] steht; 3. in cod. Vindob. suppl. 9 (= gr. 63 Kollar) fol. 188, oben mit v bezeichnet. Die Figur ist in Marc. 301 und v mit der unsrigen übereinstimmend, in m etwas weniger genau und vollständig. Nach der Ueberschrift stammt die Construction aus einer arabischen Quelle, und das Stück ist wahrscheinlich vom Schreiber des Marc. 301 selbst nach dieser redigirt (weshalb die sonderbare Wortstellung *αἱ ΖΚ ἄρα ΔΗ* oben Z. 1 statt *αἱ ἄρα ΖΚ, ΔΗ* und die anakoluthe Fügung *τὰς … εὐθείας … λαβεῖν* oben Z. 10 nach *ἕως — συμπέσῃ* zu belassen sind); jedenfalls sind m v von Marc. 301 abgeleitet. Mit einigen Scholien zu **Euklid** zusammen (aus Paris. gr. 2466 in meiner Ausgabe I nr. 68, VI nr. 46), worin die arabische Uebersetzung der Elemente citirt wird, bildet das Stück die wenigen Beispiele eines arabischen Einflusses auf die byzantinische Mathematik ausserhalb des Zahlensystems und des elementaren Rechnens. Wahrscheinlich werden mehrere

6. *περιαγαγέσθω* v. 7. *καί*] om. m. *ΔΗ*] *ΘΗ* m. 8. *ΘΓΙ*] *ΘΓ* v. 10. *ΔΗ*] *ΘΗ* m. *ΘΓΙ*] corr. ex *ΘΙΓ* m. 2 v. 15. *Ν*] om. m. *ἔστιν ἄρα*] *καί ἐστιν* m. 17. *καί ἐστιν*] *ἔστι δέ* m.

solche zum Vorschein kommen, wenn die mathematischen Schriften der Byzantiner einmal untersucht werden.

Was die Construction selbst betrifft, so ist sie genau dieselbe, die von Eutocius in Archim. III p. 66 flgg. dem Platon beigelegt wird, indem das Gestell $ZH\Theta$ bei Eutocius (s. die Figur in Archim. III p. 68) hier durch $\angle KZE = NAM$, das verschiebbare Lineal $K\Delta$ von $\Theta\Gamma I = N\Gamma\Xi$ vertreten wird. Auf der Figur bei Eutocius S. 69 entsprechen die Buchstaben $AB\Gamma\Delta E$ den Buchstaben $\Gamma\Delta E\Lambda N$ auf der unsrigen. Ohne Zweifel haben die Araber den Bericht des Eutocius benutzt, wie sie ja überhaupt in der Mathematik mit vollen Händen aus den ihnen in grosser Vollständigkeit zugänglichen griechischen Quellen schöpften. Der Byzantiner, der unsern Text schrieb, ist also, ohne es zu ahnen, über den Bach gegangen, um Wasser zu holen.

II.

Εὑρεῖν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου τὴν ἐγγὺς πλευράν.

εἰλήφθωσαν οἱ παρ' ἑκάτερα τοῦ δοθέντος ἔγγιστα ἀριθμοὶ τετράγωνοι ὅ τε ἐλάττων αὐτοῦ καὶ ὁ μείζων, καὶ εἰλήφθω ὁ ἀριθμός, ᾧ διαφέρουσιν οὗτοι οἱ τετράγωνοι ἀλλήλων, εἰλήφθωσαν δὲ καὶ αἱ μονάδες, ὅσαις ὑπερέχει ὁ δοθεὶς μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς τοῦ ἐλάττονος τῶν τετραγώνων, εἰλήφθω δὲ καὶ ἡ τοῦ ἐλάττονος τούτου τετραγώνου πλευρά, καὶ ὅσαις μονάσιν ὁ δοθεὶς μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς τοῦ ἐλάττονος τῶν τετραγώνων ὑπερέχει, τοσαῦτα μέρη παρώνυμα τοῦ ἀριθμοῦ, ᾧ διαφέρουσιν ἀμφότεροι οἱ τετράγωνοι ἀλλήλων, ληφθέντα προστεθείσθω τῇ τοῦ ἐλάττονος τετραγώνου πλευρᾷ· καὶ τὰ οὕτω γεγονότα ἀκριβῶς μέν ἐστι πλήθους τινὸς πλευρὰ οὐ πολὺ ἀποδέοντος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου, λαμβάνεται δὲ καὶ ἀντὶ πλευρᾶς τοῦ δοθέντος τούτου ἀριθμοῦ.

ἑξηκοστοῖς δὲ λαμβανόμενα τὰ παρώνυμα ταῦτα μέρη εὐμεταχειριστότερα γίγνεται, τῶν μὲν μονάδων, αἷς ὑπερέχει ὁ δοθεὶς μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς τοῦ ἐλάττονος τῶν τετραγώνων εἰς ἑξηκοστὰ ἀναλυομένων καὶ ἔπειτα παρὰ τὸν ἀριθμόν, ᾧ ἀμφότεροι οἱ τετράγωνοι ἀλλήλων διαφέρουσι τοῦ τοιούτου πλήθους τῶν ἑξηκοστῶν μεριζομένου καὶ τοῦ παρὰ τὸν τοιοῦτον μερισμὸν γεγονότος ἑξηκοστῶν πλήθους ἀντὶ τῶν τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων παρωνύμων μερῶν τῇ τοῦ ἐλάττονος τετραγώνου πλευρᾷ προστιθεμένων. ἐπεὶ δὲ ἡ οὕτω λαμβανομένη πλευρὰ ἐλάττονός ἐστιν ἀεὶ πλήθους πλευρὰ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, ὀλίγῳ πλείω τῶν ἐκ τοῦ μερισμοῦ γιγνομένων τὰ ἑξηκοστὰ λαμβανόμενα ἐγγυτέρω τῆς τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀκριβοῦς πλευρᾶς προσχωρήσει.

Die hier vorgetragene Methode, die ziemlich ungleichmässige Annäherungen giebt, kommt auf die Formel $\sqrt{a^2+b} > a + \frac{b}{2a+1}$ hinaus, die

13. ἑξηκοστοῖς] ξξ v, ξξ^οις Marc. 301 und entsprechend im Folgenden. 15. ἐλάσσονος v. 16. ᾧ] ων v. 17. τῶν] om. v (mit πλήθους endet fol. 188 v).

sonst wesentlich nur bei den Arabern nachgewiesen ist (Günther, Die quadratischen Irrationalitäten der Alten, S. 44), und auch hier waren wohl, wie bei Nr. I, arabische Schriften oder doch arabische Tradition die Quelle unseres Byzantiners. Das Stück steht nämlich, wie Nr. I, in cod. Marcian. 301, der auch hier als Urquelle anzusehen ist (fol. 466ʳ), und in v (fol. 188ᵛ—189), während in m nach Nr. I fol. 158—160 leer gelassen sind. Der Zusatz von der Verbindung dieser Methode mit den Sexagesimalbrüchen mag von dem byzantinischen Verfasser herrühren, dem es, wie die byzantinischen Scholien zum X. Buch der Elemente zeigen, geläufig war, irrationale Quadratwurzeln in diesen Brüchen auszudrücken. Uebrigens zeugt der Schluss von keinem grossen Vertrauen auf die durch die Methode erlangten Annäherungen.

III.

Τῶν μὴ κυρίως τετραγώνων ἀριθμῶν ἡ πλευρὰ εὑρίσκεται οὕτως· λαμβάνεται ἡ πλευρὰ τοῦ ἐλάττονος μὲν αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πρώτως δὲ κυρίως τετραγώνου, καὶ διπλασιάζεται· εἶτα ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ ὑποκειμένου τετραγωνίζεσθαι ὅλος ὁ ἀληθῶς τετράγωνος, καὶ τὸ λαμβανόμενον λαμβάνεται μέρος παρώνυμον ἀπὸ τοῦ γενομένου ἀριθμοῦ τῷ διπλασιασμῷ τῆς πλευρᾶς τοῦ κυρίως τετραγώνου, ὃ δὴ μέρος προστεθὲν τῇ τοῦ τετραγώνου πλευρᾷ τετραγωνικὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος ποιεῖ.

Aus cod. Laurent. 28, 7 fol. 143ᵛ (saec. XIV).

Eine ziemlich schwerfällige Darstellung der von Maximus Planudes erörterten Formel $\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a}$ (s. Günther a. O. S. 44). Sonderbar ist Z. 3 u. 4 *τὸ ὑποκείμενον τετραγωνίζεσθαι* in der Bedeutung: „die Zahl, deren Quadratwurzel gefunden werden soll", denn *τετραγωνίζειν* heisst sonst „quadriren"; *τὸ λαμβανόμενον* Z. 4 ist „das Gefundene, der Rest", d. h. b, und die folgenden Worte besagen, dass dieser Rest Zähler eines Bruches sein soll, dessen Nenner die durch die Verdoppelung von a gefundene Zahl sein soll (*παρώνυμος ἀπό* benannt nach).

IV.

Εἰς τοὺς ἀπὸ μονάδος μέχρι δεκάδος ἀριθμοὺς θεώρημα Πυθαγορικόν.

κατὰ τοὺς Πυθαγορείους ἡ μονὰς καὶ τὸ ἓν νοῦς καὶ οὐσία ἐλέγετο, ἓν δὲ ὁ νοῦς διὰ τὸ μόνιμον καὶ πάντῃ ὅμοιον καὶ ἀρχικόν· ἡ δυὰς ἀρχὴ πλήθους καὶ πρῶτος θῆλυς καὶ δόξα διὰ τὸ ἐπ' ἄμφω εἶναι μεταβλητὴ καὶ κίνησιν καὶ ἐπὶ θέσιν.** ἡ τριὰς πρῶτον πλῆθος καὶ πρῶτος ἄρρην· ἡ τετρὰς δικαιοσύνη διὰ τὸ ἰσάκις ἴσον καὶ πρῶτον ἐν τοῖς ἀρτίοις στερεόν, κατὰ ταὐτὰ δὲ καὶ ὁ θ' ὡς ἐκ τοῦ τρία ἐφ' ἑαυτόν, ὃς*

* *ὁ νοῦς* nicht sicher; die Buchstaben der Hds. sind hier unklar.

** So die Hds.; zu lesen wohl *ἐπίθεσιν* (Zuwachs).

ἐστι πρῶτος στερεὸς ἀπὸ περιττοῦ· ὁ πέντε γάμος ὡς ἐκ πρώτου θήλεος τοῦ δύο καὶ πρώτου ἄρρενος τοῦ τρία· ὁ ἓξ τέλειος ὡς πρῶτος καὶ μόνος ἔνδον τῆς δεκάδος τοῖς οἰκείοις ἐξισούμενος μέρεσιν· ὁ ἑπτὰ παρθένος ὡς ἔνδον τῆς δεκάδος μήτε γεννώμενος ὑπό τινος μήτε γεννῶν τινα, καὶ καιρὸς ὁ αὐτὸς διὰ τὸ τὰ φυσικὰ καθ' ἑβδομάδας ἴσχειν τοὺς τελείους καιροὺς τῆς γενέσεώς τε καὶ τελειώσεως· καὶ ἑπταμηνιαῖα γὰρ ἐπ' ἀνθρώπου τίκτεται καὶ ὀδοντοφυεῖ τοσούτων ἐτῶν καὶ ἡβᾷ κατὰ τὴν δευτέραν ἑβδομάδα καὶ γενειᾷ κατὰ τὴν τρίτην, καὶ ὁ ἥλιος αἴτιος εἶναι δοκῶν τῶν καρπῶν ἀπὸ τῆς ἐνάστρου σφαίρας τῶν ἀπλανῶν μετὰ τὰς πέντε τῶν πλανητῶν τὴν ἑβδόμην τάξιν ἐπέχει, ἡ δὲ σελήνη τὴν ὀγδόην, ἡ γῆ δὲ τὴν θ—ην, δεκάτη δέ ἐστιν αὐτοῖς ἡ ἀντίχθων.*

Aus cod. Mutinensis II *A*, 10, der Georg Valla angehört hat; hinten steht: „*Liber hic scriptus est manu doctissimi dm̄ Matthei Camarioti Constantinopolitani, quem mihi dono dedit anno dm̄ M°CCCC°LXXXIIII praeceptor ille optimus. γεωργίου τοῦ βάλλα ἐστὶ τὸ βιβλίον.*"

Das Fragment (die Zahlen 8, 9, 10 werden ja nicht besprochen) ist nicht identisch mit dem von Valla übersetzten Anatolios-Excerpt (s. Neue Jahrb., Suppl. XII, S. 399 flgg.),** wenn auch einige Anklänge unverkennbar sind. Sehr auffallend sind die Accusative *κίνησιν καὶ ἐπίθεσιν* S. 164 Z. 6, als ob nicht *ἐλέγετο*, sondern *ὠνόμαζον* vorherginge. Sie sind vielleicht aus Anatolios unverändert herübergenommen, bei dem es heisst (Theologumena arithm. ed. Ast p. 8): *ὠνόμαζον δὲ αὐτὴν* (nämlich *τὴν δυάδα*) *κίνησιν ... αὔξησιν, σύνθεσιν* u. s. w.

V.

Der ganz junge cod. Vatic. Gr. 1550 (chart., 8vo) enthält auf 16 Blättern ein griechisches Einmaleins, worüber einige Mittheilungen bei der Seltenheit solcher Arbeiten auf griechischem Boden vielleicht am Platze sein werden.

Anfang: *ἀρχὴ σὺν θεῷ τοῦ σοφωτάτου ψηφαρίου.*

Die Stücke sind in Columnen geordnet und durch Linien von einander getrennt. Zuerst: *στάσις πρώτη. ἡ σύνθεσις τῶν ἀριθμῶν*

α α	β
α β	γ
α γ	δ
α δ	ε

* So die Hds.; zu lesen *τούς*.

** Ich benutze die Gelegenheit, um zu der hier citirten Abhandlung einen Zusatz anzubringen. S. 379 habe ich angegeben, dass Valla XI cap. 8 Schluss und cap. 9 „Eigenes" über Kreisquadratur vorbringe. Erst später habe ich gesehen, dass er hier nur die Abhandlung von Campanus quadratura circuli ausschreibt; die genannten Theile von Valla XI, 8—9 stimmen genau mit dieser Schrift (ed. Gauricus Venet. 1503 fol. 5—6).

α ε ς
α ς ζ
α ζ η
α η ϑ
α ϑ ι.

Dann auf dieselbe Weise

ββ δ bis βϑ ια u. s. w. bis ηη ις ϑϑ ιη
γγ ς „ γϑ ιβ ηϑ ιζ.

Es folgen die Zehner:

ιι κ κκ μ u. s. w. bis ϙϙ ρπ,
ικ λ
ιλ μ
ιμ ν
ιν ξ
ιξ ο
ιο π
ιπ ϙ
ιϙ ρ.

Dann die Hunderte bis ϡϡ ,αω und die Tausende bis ,ϑ,ϑ α̈,η, α̈α̈β (d. i. 20000).

Darauf

στάσις δευτέρα ἡ ἀφαίρεσις.

	α ι ϑ ⋮ α β α	β ια ϑ ⋮ β γ α	u. s. w. bis	ϑ ιη ϑ ⋮ ϑ ι α
Zehner:	ι ρ ϙ ⋮ ι κ ι	κ ρι ϙ ⋮ κ λ ι	u. s. w. bis	ϙ ρπ ϙ ⋮ ϙ ρ ι
Hunderte:	ρ ,α ϡ ⋮ ρ σ ρ	σ ,αρ ϡ ⋮ σ τ ρ	u. s. w. bis	ϡ ,αω ϡ ⋮ ϡ ,α ρ
Tausende:	,α α̈ ,ϑ ⋮ ,α ,β ,α	β, α̈,α ,ϑ ⋮ β, ,γ ,α	u. s. w. bis	,ϑ α̈,η ,ϑ ⋮ ,ϑ α̈ ,α

στάσις τρίτη ὁ πολλαπλασιασμός.

α* α α	β κ μ	β σ υ	β ͵β ͵δ
β α β	.	.	.
β β δ	.	.	.
β γ ς	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
β ι κ	β ρ σ	β ͵α ͵β	β α̈ β̈

und auf dieselbe Weise für die anderen Einer bis

ι α ι … ι ͵ι ϊ.

στάσις δ' αἱ εἰκοσάδες.

κ α κ	κ κ υ	κ σ ͵δ	κ ͵β δ̈
κ β μ	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
κ ι σ	κ ρ ͵β	κ ͵α β̈	κ α̈ κ̈

und ähnlich für die anderen Zehner bis

ϙ α ϙ … ϙ α̈ ϙ̈.

στάσις πέμπτη αἱ ἑκατοντάδες.

ρ α ρ	ρ κ ͵β	ρ σ β̈	ρ ͵β κ̈
ρ β σ	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
ρ ι ͵α	ρ ρ α̈	ρ ͵α ϊ	ρ α̈ ρ̈

und ähnlich für die übrigen Hunderte bis

ϡ α ϡ   ϡ ͵β ρ̈π
.   .
.   …   .
.   .
ϡ ι ͵θ   ϡ α̈ ϡ̈.

στάσις ἕκτη αἱ χιλιάδες.

͵α α ͵α	͵α κ β̈		͵α ͵β σ̈
͵α β ͵β	.		.
.	.	…	.
.	.		.
.	.		.
͵α ι α̈	͵α ρ ϊ		͵α α̈ ͵α̈ (10 Millionen)

u. s. w. bis

͵ϑ α ͵ϑ	…	͵ϑ β ͵αω
⋮		⋮
͵ϑ ι ϑ̈		͵ϑ α̈ ͵ϑ

στάσις ἑβδόμη αἱ ἑνδεκάδες.

ια α ια	ια ια ρκα	ια κ σκ	ια σ ͵βσ	ια ͵β β̈͵β
ια β κβ	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮				
ια ι ρι	ια ιϑ σϑ	ια ρ ͵αρ	ια ͵α α̈͵α	ια α̈ ϊα

ιβ α ιβ	ιβ ια ρλβ	ιβ λ τξ
⋮	⋮	⋮
ιβ ι ρκ	ιβ κ σμ	ιβ ρ ͵ασ

u. s. w. wie bei ια, und ähnlich wie bei ιβ für ιγ, ιδ u. s. w. bis

ιϑ α ιϑ
⋮
ιϑ α̈ ιϑ̈.

στάσις ὀγδόη τὰ ἡμίση.

τῶν α L″	τῶν ια εL″	τῶν κα ιL″
τῶν β α	⋮	⋮
τῶν γ αL″		
⋮		
τῶν ι ε	τῶν κ ι	τῶν λ ιε

u. s. w. bis

τῶν ϙα μεL″	τῶν σ ρ	τῶν ͵β ͵α
⋮	⋮	⋮
τῶν ρ ν	τῶν ͵α φ	τῶν α̈ ͵ε

στάσις ἐνάτη τὰ τρίτα.

τῶν α γ′	τῶν ια γϖ′	…	τῶν ϙα λ γ′	τῶν σ ξϛϖ′
⋮	⋮		⋮	⋮
τῶν ι γ γ′	τῶν κ ϛϖ′		τῶν ρ λγ γ′	τῶν ͵α τλγ γ′

darauf noch

τῶν β, χξς ϖ'
.
.
.
τῶν ᾱ ,γτλγ γ.

σ τ ά σ ι ς δ ε κ ά τ η τ ὰ δ ί μ ο ι ρ α (δίτριτα übergeschrieben).

τῆς α ϖ'		τῶν β, ,ατλγ γ'
τῶν β α γ'		.
.	zwölf Stücke bis	.
.		.
.		.
τῶν ι ςϖ'		τῶν ᾱ ,ςχξσ ϖ'

und in derselben Weise

στάσις ἑνδεκάτη τὰ τέταρτα;
στάσις δωδεκάτη τὰ πέμπτα;
στάσις ιγ^η · τὰ ἕκτα.

Dann

σ τ ά σ ι ς ι δ^η ἡ τ ῶ ν ἑ β δ ό μ ω ν.

		τῶν λ δ δ' κη''
τῶν α ζ'	τῶν ια α L'' ιδ''	.
τῶν β δ' κη''	τῶν ιβ α ϖ κα''	.
τῶν γ δ' ζ' κη''	.	τῶν ρ ιδ δ' κη'
τῶν δ L'' ιδ''	.	τῶν σ κη L'' ιδ'
τῶν ε ϖ κα''	.	.
τῶν ς L'' ζ' ιδ''	.	.
τῶν ζ α	.	τῶν ,α ρμβ ϖ ζ' κα''
τῶν η α ζ'	.	τῶν β σπε ϖ κα''
τῶν θ α δ' κη''	.	.
τῶν ι α δ' ζ' κη''	τῶν κ β L'' ζ' ιδ''	.
		τῶν ᾱ ,αυκη L'' ιδ'

und in derselben Weise mit je fünf Stücken

στάσις ιε̅^η ἡ τῶν ὀγδόων;
στάσις ις περὶ τῶν ἐνάτων;
στάσις ιζ περὶ τῶν δεκάτων;
στάσις ιη περὶ τῶν ἑνδεκάτων;
στάσις ιθ περὶ τῶν δωδεκάτων;
στάσις εἰκοστὴ περὶ τῶν ιγ^{ων};
στάσις κ̅α̅ περὶ τῶν ιδ^{ων};
στάσις κ̅β̅ περὶ τῶν ιε^{ων};
στάσις κ̅γ̅ περὶ τῶν ις^{ων};
στάσις κ̅δ̅ περὶ τῶν ἑπτακαιδεκάτων;

στάσις $\overline{\kappa\varepsilon}$ περὶ τῶν ὀκτωκαιδεκάτων;
στάσις $\overline{\kappa\varsigma}$ περὶ $\widehat{\iota''\vartheta}$;
στάσις $\overline{\kappa\zeta}$ περὶ τῶν $\widehat{\kappa''}$;
στάσις $\overline{\kappa\eta}$ περὶ $\widehat{\kappa''\alpha}$;
στάσις $\overline{\kappa\vartheta}$ περὶ $\widehat{\kappa''\beta}$, z. B. τῶν ψ λα L'' δ′ κβ″ μδ″;
στάσις $\overline{\lambda}$ περὶ τῶν $\widehat{\kappa''\gamma}$, z. B. τῶν ͵α μγ γ′ η″ ξϑ″ ρπδ″;
στάσις $\overline{\lambda\alpha}$ περὶ $\widehat{\kappa''\delta}$, z. B. τῶν ο β ω̶ δ″;
στάσις $\overline{\lambda\beta}$ περὶ $\widehat{\kappa''\varepsilon}$, z. B. τῶν ιϑ ω̶′ ιγ″ οε″ τκε″

.
.
.

τῶν ο β L'' δ″ κε″ ρ″

.
.
.

zuletzt τῶν α′ υ.

Für die Bruchbezeichnung ist zu bemerken, dass bald ein, bald zwei Strichelchen (oben rechts) angewendet werden, und dass von den beiden besonderen Zeichen L ($\frac{1}{2}$) immer zwei hat, ω̶ ($\frac{2}{3}$) dagegen gewöhnlich kein, nie zwei, ohne Zweifel weil der Schwanz, der dem Zeichen ω (d. i. $\beta = 2$) anhängt, selbst als Bruchzeichen gilt; denn auch bei den übrigen Bruchbezeichnungen kommt derselbe Schnörkel öfters vor, und dann haben sie immer nur noch ein Strichelchen oben, z. B. $\gamma' = \frac{1}{3}$, $\delta' = \frac{1}{4}$, $\zeta' = \frac{1}{7}$. Wir dürfen also annehmen, dass das eigentliche Bruchzeichen ″ ist, wovon aber der erste Strich mit dem Zahlzeichen verbunden werden kann. Die ganze Zahlbezeichnung ist übrigens die alte, sowie auch die Rechnung mit Stammbrüchen, wozu auch $\frac{2}{3}$ gerechnet wird, und wenn auch die Hds., worin uns dieses ψηφάριον überliefert ist, spätbyzantinisch ist, steht doch nichts der Annahme im Wege, dass der Schreiber nur alten Ueberlieferungen gefolgt ist. Im Grunde können wir uns ganz gut ein ähnliches Einmaleins in den Händen der Griechen schon der Glanzperiode der griechischen Mathematik denken; namentlich für die Bruchrechnung müssen wir bei den Logistikern ein solches Hilfsmittel annehmen.

Kopenhagen, 19. Mai 1888.

Ich kann jetzt hinzufügen, dass das unter Nr. I herausgegebene Stück auch in cod. Scorialensis Φ-III-5 mit ganz junger Hand auf dem hinteren Deckblatt (fol. 323r) beigeschrieben ist (inc. δύο δοθεισῶν etc. wie m).

September 1888.

Recensionen.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie, von Dr. Christian Wiener, Geh. Hofrath und Professor an der grossherzogl. polytechn. Schule zu Karlsruhe. In 2 Bänden. 2. Band. 649 S. gr. 8°. Leipzig, B. G. Teubner. 1887. (Vergl. die Besprechung des 1. Bandes in dieser Zeitschrift Bd. XXXI, hist.-lit. Abth. S. 57.)

Zur Gewinnung einer ersten Uebersicht des reichhaltigen Stoffes möge ein Auszug des Inhaltsverzeichnisses der Besprechung vorangehen.

1. Abschnitt. Die krummen Flächen im allgemeinen; der Cylinder, der Kegel, die Umdrehungsfläche und ihre Berührungsebenen; die abwickelbare Fläche im allgemeinen (erster Theil). Die krummen Flächen im allgemeinen, ihre Berührungsebenen und Normalen. Der Cylinder und Kegel und ihre Berührungsebenen. Der Kegel zweiten Grades. Die Umdrehungsfläche und ihre Berührungsebene. Die abwickelbaren Flächen (erster Theil).

2. Abschnitt. Der Schnitt des Cylinders und Kegels mit einer Ebene und einer Geraden und die Abwickelung der Fläche.

3. Abschnitt. Die Flächen zweiten Grades. Allgemeine Eigenschaften und Eintheilung der F^2. Conjugirte Flächen zweiten Grades und die Imaginärprojection im Raume. Die Berührungsebenen, ebene Schnitte und Berührungskegel der Flächen zweiten Grades, insbesondere der Nichtregelflächen. Die windschiefen Flächen zweiten Grades.

4. Abschnitt. Die Umdrehungsflächen. Der Schnitt einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene. Der einer Umdrehungsfläche umschriebene Kegel und Cylinder. Die durch eine gegebene Gerade an eine Umdrehungsfläche gelegte Berührungsebene.

5. Abschnitt. Die Beleuchtung krummer Flächen im allgemeinen und die des Cylinders, des Kegels und der Umdrehungsflächen im besondern. Allgemeines. Die Beleuchtung der Kugel, des Cylinders und des Kegels. Die Beleuchtung der Umdrehungsfläche.

6. Abschnitt. Der Durchschnitt krummer Flächen mit krummen Flächen und krummen Linien. Allgemeines (über die Anwendung von Hilfsebenen und Hilfsflächen). Der Durchschnitt von Cylindern und Kegeln untereinander: a) Die allgemeinen Aufgaben, b) die Raumcurven dritter Ordnung. Der Durchschnitt einer Umdrehungsfläche mit einem Kegel oder einem Cylinder: a) Der Kegel und die concentrische Kugel, b) die sphärischen Kegelschnitte, c) die stereographische Projection, d) die allgemeine Aufgabe. Der Durchschnitt zweier Umdrehungsflächen. Der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades. Die Imaginärprojection der Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades. Bestimmung einer Fläche zweiten Grades durch neun Punkte. Büschel und Schaaren von Flächen zweiten Grades.

7. Abschnitt. Die Beleuchtung der Flächen zweiten Grades.

8. Abschnitt. Die Rolllinien und die Schraubenlinie.

9. Abschnitt. Die abwickelbaren Flächen (zweiter Theil), die gemeinschaftlichen Berührungsebenen mehrerer Flächen, die topographische, die Umhüllungsfläche; Beleuchtung solcher Flächen. Die abwickelbare Schraubenfläche. Die Fläche des Schattens und Halbschattens. Die Fläche von gleichförmiger Neigung.

10. Abschnitt. Die windschiefen Flächen. Allgemeines (Entstehungsweise aus Leitcurven, Leitdeveloppabeln etc., Bestimmung der Charaktere). Das Konoid, seine Schattengrenze und Lichtgleichen. Die Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm. Die gerade Normalenfläche einer Fläche zweiten Grades. Die Regelfläche dritten Grades und die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art. Das Cylindroid. Die Wölbfläche des schrägen Durchgangs. Die windschiefe Schraubenfläche.

11. Abschnitt. Die Krümmung der Flächen. Die Krümmung der Normal- und schiefen Schnitte. Die Tangenten der Schnittcurve zweier sich berührenden Flächen in deren Berührungspunkte, einem Doppelpunkte der Curve. Die Evolute einer ebenen Schnittcurve einer Fläche und ihrer Projectionen. Die conjugirten Tangenten einer Fläche und die Tangenten ihrer Eigenschattengrenze. Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades: a) Die Krümmungslinien als Schnittlinien confocaler Flächen, b) Die Projectionen der Krümmungslinien auf die Hauptebenen als Curven einer Kegelschnittschaar.

12. Abschnitt. Axonometrische und schiefe Projection, Perspective und Reliefperspective krummer Flächen.

Nach dieser Uebersicht mögen wir uns im Wesentlichen darauf beschränken, in den einzelnen Abschnitten Dasjenige hervorzuheben, was entweder neu, oder eine neue Behandlungsweise erfahren hat. Hierzu wird sich uns reichlich Veranlassung bieten.

Die Theorie der abwickelbaren Flächen wird durch Angabe einer nicht geradlinigen abwickelbaren Fläche wesentlich erweitert. Ein gewöhnliches Vielflach mit geschlossenen Seitenflächen ist ohne Zerschneiden längs einer Reihe von Kanten nicht abwickelbar; hierzu ist vielmehr erforderlich, dass die Summe der Winkel einer Ecke 360° betrage, d. h. die Ecken eines solchen Vielflachs sind keinesfalls convex und daher mindestens vierflächig.

Die angegebene Fläche bildet ein sich durch das Unendliche ziehendes Vielflach mit geschlossenen Vierecken als Seitenflächen, deren je vier in einer Ecke zusammenstossen. Die Fläche wird als Zickzackfläche bezeichnet und lässt sich durch dreimaliges Hin- und Herbiegen eines Blattes Papier, in jedesmal gleichbreite Streifen, herstellen. Die erzielte Musterung besteht aus Sechsecken mit ihren Diagonalen, im Falle regulärer Sechsecke sind die Kantenwinkel einer Ecke 120°, 120°, 60°, 60°, die Seitenflächen sämmtlich Rhomben. Aus der Bemerkung, dass sich die Fläche durch Bewegung einer periodischen Curve, eines Zickzacks, an einem zweiten Zickzack erzeugen lässt, und weiter, dass eine solche Curve durch eine Fourier'sche Reihe bestimmbar ist, fliesst die Darstellung der Fläche selbst durch eine solche Reihe. Besonders merkwürdig sind Flächen, deren Elemente durch unendlich kleine Polygone vertreten werden. Als Ausgang ihrer Construction dient die Weierstrass'sche Function

$$Z = \sum_{0}^{\infty} {}_n\, b^n \cos a^n \pi x,$$

wo a eine ungerade ganze Zahl, $1 > b > 0$ ist. Die Function ist stetig, ohne für einen Werth des Argumentes einen bestimmten Differentialquotienten zu haben.* Sie besitzt in jedem endlichen Intervall unendlich viele Maxima und Minima, in welchen Punkten allein die Biegung der Curve vor sich geht, welche durch diese Function repräsentirt werden kann. Die Curve ist also als Zickzack anzusehen, welcher in jedem endlichen Intervall unendlich viele Hin- und Hergänge aufweist. Zwei solche Curven, in der oben angegebenen Weise verwerthet, führen dann, wie dort, auf die gewollte Fläche, die natürlich nur vorgestellt, nicht etwa durch ein Modell versinnlicht werden kann.

Das Vielflach mit nicht geschlossenen Seitenflächen und also theilweise unendlich langen Kanten ist stets abwickelbar, seine Betrachtung führt im Grenzfalle unendlich schmaler Seitenflächen auf die bekannten geradlinigen Developpabeln.

Die Flächen zweiter Ordnung werden definirt als solche, welche mit einer reellen Geraden zwei reelle oder imaginäre Punkte gemein haben, womit dann auch gesagt ist, dass eine Ebene eine solche Fläche in einem reellen oder imaginären Kegelschnitt schneidet. Da imaginäre Gebilde im Raume der Behandlung jedoch nicht direct zugänglich sind, so wird zum Ausgangspunkte der Untersuchung die speciellere Fassung gewählt: Eine reelle Fläche zweiter Ordnung ist eine solche, auf der jede ebene Curve ein Kegelschnitt ist. Mit Rücksicht auf die in Bd. I entwickelte Polarentheorie der Kegelschnitte ergiebt sich dann eine Reihe von Polareigenschaften dieser

* Vergl. übrigens die Untersuchung dieser Function von Seiten des Verf. in Borchardt's Journ., Bd. 90 S. 221 flg.

Flächen. Hierdurch sind die Daten zur folgenden Erzeugung einer reellen Fläche zweiter Ordnung gewonnen, welche einen Kegelschnitt p der Ebene P enthält, P zum Pole der Ebene P hat und von einer durch P gehenden Geraden in zwei reellen oder imaginären Punkten getroffen wird, die bez. durch die reellen oder ideellen,* durch P und P harmonisch getrennten Punkte F, F' dargestellt werden: Man lege durch g eine Ebene, welche p in den reellen Punkten A und B schneidet, construire einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte A und B geht, in diesen die Tangenten PA und PB hat und ausserdem durch F und (damit auch) durch F_1 geht, und durch diese Elemente also bestimmt ist. Die Gesammtheit der so construirbaren Kegelschnitte erfüllt die gegebene Fläche. — Zu beweisen bleibt dann noch, dass jede Fläche zweiten Grades ist, welche sich aus den beliebig angenommenen Elementen p, P, F erzeugen lässt. Der Beweis erledigt sich durch den Nachweis der Collinearität zwischen der erzeugten Fläche und einer Kugel oder einem Rotationshyperboloid. Letztere Fläche ist, wie wir hier hervorheben müssen, bereits im zweiten Abschnitt neben den Rotationsflächen durch Rotation einer Geraden erzeugt worden. Durch den soeben bezeichneten Unterschied ist dann die Eintheilung der Flächen in geradlinige und nicht geradlinige begründet.

Von fundamentaler Wichtigkeit wird der Satz, dass die ideelle Darstellung der imaginären Schnittcurve der Fläche mit einer Ebene in Bezug auf einen ihrer Punkte P und der Schnittlinie seiner Polarebene mit der gegebenen als Imaginärprojection der (stets reellen) Schnittcurve der Polarebene von P mit der Fläche angesehen werden kann, also ein imaginärer Kegelschnitt ist. Es ist nämlich dadurch der Satz begründet: Sind alle reellen Schnittcurven einer Fläche Kegelschnitte, so sind es auch die imaginären. Insbesondere: Die ideelle Darstellung m eines imaginären Kegelschnittes in Bezug auf seinen Mittelpunkt U und die unendlich ferne Gerade ist eine Ellipse, welche U ebenfalls zum Mittelpunkt hat. Diese Ellipse wird Mittelpunktsellipse genannt; wird dieselbe zu einem Kreise, so soll auch der Kegelschnitt ein imaginärer Kreis heissen. Daraus folgt dann leicht, dass auch jeder imaginäre Schnitt einer Kugel ein Kreis ist. Man sieht wohl, wie sich die gewöhnliche Darstellung der Flächen durch ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte von der obigen allgemeinen Entstehungsweise abzweigen lässt.

Zwei reelle Kegelschnitte befinden sich bekanntlich auf zweifache Weise in perspectivischer Lage, wenn sie, in verschiedenen Ebenen liegend, zwei Punkte gemein haben; aber die Centra dieser Perspectivität können imaginär sein. Die dadurch auftretende Schwierigkeit wird durch eine Erweiterung des Begriffes der Imaginärprojection überwunden und damit zugleich

* Vergl. wegen der Einführung dieser Elemente die Besprechung des ersten Bandes S. 59.

die Projection zweier imaginärer Kegelschnitte ineinander — immer unter der Voraussetzung, dass ein solches Curvenpaar zwei gemeinschaftliche Punkte habe — ermöglicht. Das nächste Ziel dieser Untersuchungen ist dann der Satz, dass irgend zwei Kegelschnitte einer Fläche zweiter Ordnung sich durch Imaginärprojection ineinander projiciren lassen und damit auch zwei Punkte miteinander gemein haben. Und umgekehrt: zwei Kegelschnitte, welche zwei Punkte gemein haben, liegen stets auf einer Fläche zweiter Ordnung, welche durch einen beliebigen weiteren Punkt des Raumes bestimmt ist. Es folgt die Darlegung der Durchmessereigenschaften der Flächen selbst, sowie der ihrer ebenen Schnitte und zwar auf Grund des Vorigen mit Unterscheidung der reellen und imaginären Durchmesser; dann die Construction der Axen und die Eintheilung der Flächen nach der Realität der Axen.

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich allein auf reelle Flächen, nur gelegentlich der Annahme dreier imaginärer Axen wurde auf die Möglichkeit einer imaginären Fläche hingewiesen. Zu solchen gelangt der Verfasser analog der im ersten Bande für imaginäre Kegelschnitte befolgten Methode durch Einführung des Begriffs der conjugirten Fläche: Zu einer Fläche zweiten Grades F nennen wir diejenige Fläche H in Bezug auf einen Punkt P und dessen Polarebene P zu F conjugirt, welche der geometrische Ort der ideellen Schnittpunkte der F mit den aus P gezogenen Strahlen in Bezug auf P und P ist. Daran knüpft sich sofort der wichtige Satz: Die Ebene P schneidet die F und die H in demselben reellen oder imaginären Kegelschnitte p. Ist p reell, so ist die conjugirte Fläche H eine reelle Fläche zweiten Grades, welche P und P zu Pol und Polarebene hat und die F entlang p berührt. Die conjugirte Fläche der H in Bezug auf P ist wieder F. P und P heissen der Mittelpunkt und die Ebene der Conjunction. Ebenso wichtig wie leicht ersichtlich sind dann die Sätze: Von zwei conjugirten reellen Flächen ist stets die eine geradlinig, die andere nicht geradlinig; — und: Die zu einer Fläche zweiten Grades F in Bezug auf einen Punkt P conjugirte Fläche ist imaginär, wenn F nicht geradlinig und P ein innerer Punkt derselben ist; in jedem andern Falle ist sie reell. Mit Hilfe des gewonnenen Apparates werden dann alle früheren Constructionen von reellen auf imaginäre Flächen übertragen.

Der Umstand, dass im Raume ausser Punkt und Ebene noch die Gerade vorhanden ist, welche sich selbst dual gegenübersteht, lässt die Frage nach der Existenz der conjugirten einer Fläche in Bezug auf eine Gerade rege werden. Wirklich kann man definiren:* Eine Fläche H ist conjugirt zu einer andern F in Bezug auf eine Gerade g, wenn sie der Ort des Kegelschnitts ist, der in jeder durch g gelegten Ebene zu deren Schnittcurve mit F conjugirt in Bezug auf g ist, und dann beweisen, dass H vom zweiten Grade ist. Auf die Besprechung weiterer interessanter Beziehungen

* Nach einer Mittheilung von Prof. Retali in Como an den Verfasser.

zwischen zweien, auf diese Weise einander conjugirten Flächen müssen wir verzichten.

Bei der Bestimmung von Berührungsebenen, ebenen Schnittcurven etc. werden entweder die scheinbaren Umrisse, welche meistens durch ihre Hauptaxen gegeben sind und als sorgfältig gezeichnet vorausgesetzt werden, direct zur Construction benutzt, oder es wird ihre Collineation bez. Affinität mit dem Kreise benutzt. Man ist vielleicht im Allgemeinen zu sehr abgeneigt, punktweise construirte Curven als Elemente späterer Constructionen zuzulassen, manchmal ist der Vortheil der Ersetzung durch andere (z. B. Kreisprojectionen durch die Niederlegungen) ziemlich illusorisch und jedenfalls zeitraubend, und man muss dem Verfasser beipflichten, wenn er die directe Verwendung der Projectionen als das kürzere Verfahren wählt.* Ist die schneidende Ebene durch drei Punkte der Fläche gegeben, so werden die Projectionen der Schnittcurve Kegelschnitte durch drei Punkte, welche einen andern, den Umkreis zweimal berühren. Derartige Aufgaben, auch unterschieden nach der Realität der gegebenen Elemente, werden in der Folge auf mannigfache Weise behandelt. Mit der Bestimmung des scheinbaren Umrisses von Flächen zweiter Ordnung, welche durch drei conjugirte Durchmesser gegeben sind, wird die Reihe dieser Aufgaben geschlossen. Den Beispielen werden stets Nichtregelflächen zweiter Ordnung zu Grunde gelegt. Beim Auftreten reeller Erzeugenden bleiben zwar alle Constructionen giltig, aber es treten dann besondere Vereinfachungen ein. Die nun folgende Behandlung dieser Flächen wird durch Erörterung einiger, allen Regelflächen gemeinsamen Eigenschaften angebahnt, dann werden diejenigen zweiter Ordnung durch projective Grundgebilde erster Stufe im Raume erzeugt. Unter den Specialfällen findet sich auch das orthogonale Hyperboloid. In constructiver Hinsicht ist bemerkenswerth die Bestimmung der Krümmungskreise, welche die Strictionslinie eines Hyperboloids in den Scheiteln der Fläche besitzt. Diese Bestimmung geschieht durch Substitution eines hyperbolischen Paraboloids, welches an solcher Stelle vier consecutive Erzeugende mit der Fläche gemein hat. Die Strictionslinien beider Flächen haben dann in jenem Punkte denselben Krümmungskreis und da die fragliche Curve für das Paraboloid eine Parabel, d. h. eine ebene Curve ist, kommt die Construction auf die Bestimmung des Krümmungskreises der Schnittcurve dieser Ebene mit dem Hyperboloid hinaus.

Unter den im vierten Abschnitte behandelten Umdrehungsflächen wird dem Kreisringe eine besonders eingehende Behandlung zu Theil. Die Schnitte parallel zur Axe veranlassen eine nähere Untersuchung der Cassini'schen Linien. Bei der Bestimmung des Tangentenkegels finden wir zum zweiten Male eine Benutzung der Krümmungskreise in den Scheiteln der Berührungscurve; es gelingt vortrefflich, ein grosses Stück dieser Curve

* Man vergl. hierauf bezüglich auch die Fig. 109.

durch jene Kreise in der Zeichnung zu ersetzen und den Uebergang später mit Hilfe des Curvenlineals zu vermitteln.

Im ersten Bande hat der Verf. die Absicht ausgesprochen, seine Untersuchungen über die Helligkeit der Körper, namentlich des matten Gypses, im vorliegenden Bande zum Abschlusse zu bringen. Die Arbeit erwies sich jedoch als zu umfangreich für ein allgemeines Lehrbuch und sie soll daher jetzt als besondere Schrift veröffentlicht werden. Im ersten der drei Theile, auf welche dieselbe berechnet ist, werden auf Grundlagen von Versuchen die Helligkeiten angegeben, welche eine gegossene Gypsplatte bei jeder Richtung des ein- und ausfallenden Lichtstrahles besitzt. Im zweiten werden auf dem nämlichen Wege die Constanten einer Formel bestimmt, welche die Helligkeiten des klaren Himmels an jeder seiner Stellen und bei jeder Stellung der Sonne angiebt. Der dritte Theil bezieht sich auf die Nachahmung der Helligkeiten durch Tuschlagen.

Im vorliegenden Buche wird das Lambert'sche *cos*-Gesetz bei der Construction der Lichtgleichen zu Grunde gelegt, was auch durchweg bei der üblichen Annahme des Lichtstrahles (nach der Richtung der Würfeldiagonalen) zu guten Resultaten führt, da die Wirkung der Spiegelung in den Glanzpunkten dann fast unmerklich wird. Vor der Hand werden Kugel, Kegel, Cylinder und Rotationsflächen behandelt, unter den letzteren der Kreisring mit besonderer Ausführlichkeit. Wie schon früher, werden auch hier zur Verzeichnung der Lichtgleichen die Krümmungskreise in ausgezeichneten Punkten häufig zur Verzeichnung der Curven benutzt und es möge betont werden, dass dieses zweckmässige Verfahren noch häufig zur Anwendung gelangt.

Die ersten Theile des folgenden neunten Abschnittes mögen durch die vorangestellte Angabe ihres Inhalts charakterisirt erscheinen, wenn wir noch hinzufügen, dass bei der Projection der Durchschnittscurve vierter Ordnung zweier Kegel zweiter Ordnung in Theile eines Kegelschnittes die fehlenden Theile durch die Imaginärprojection der Curve gegeben werden. (Vergl. wegen dieser Projection weiter unten.) Bei der Construction der Durchschnittscurve zweier allgemeiner Flächen zweiter Ordnung werden die Kreisschnitt-Ebenen der einen Fläche, sofern solche reell vorhanden sind, benutzt. Diese Ebenen schneiden die andere Fläche in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten. Das wiederholte Verzeichnen wird jedoch zweckmässig durch Verwendung eines in der Horizontalebene liegenden Kegelschnittes vermieden, indem diese Ebene von der Stellung der Kreisschnitte angenommen wird, was ja durch Transformation stets zu erreichen ist. Beim hyperbolischen Paraboloid dient in gleicher Weise das Ebenenbüschel durch eine seiner unendlich fernen Erzeugenden zur Lösung des Problems.

Die Raumcurve dritter Ordnung war bereits früher als Partialschnitt zweier Kegel mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden gewonnen worden. An Stelle der Kegel treten jetzt zwei allgemeine Regelflächen zweiter Ordnung, und aus dieser Construction folgt dann die Erzeugung der Curve durch drei projective Ebenenbüschel.

Eingehend wird ferner das gemeinschaftliche Polartetraeder zweier Flächen zweiter Ordnung behandelt, dessen Ecken als Spitzen der Kegel gefunden werden, welche der Durchdringungscurve vierter Ordnung erster Art doppelt umschrieben sind. Mit der Realität dieser Spitzen hängt bekanntlich der Verlauf der Durchdringungscurve eng zusammen: Sind alle vier reell, so besitzt die Curve zwei paare Zweige; sind nur zwei reell, so tritt nur ein solcher Zweig auf, im Uebergangsfalle besitzen die Flächen eine gemeinschaftliche Tangentialebene in einem Curvenpunkte, der damit zum Doppelpunkt wird,* in dem zwei Kegelspitzen vereinigt sind. Sind die Scheitel paarweise imaginär, so besteht die Curve aus zwei unpaaren Zweigen.

Zur Imaginärprojection dieser Durchdringungscurve führt die folgende Definition: Sind von zwei Flächen zweiten Grades F, F_1 die Imaginärprojectionen in Bezug auf einen Eckpunkt S ihres gemeinschaftlichen Polartetraeders und dessen Gegenebene Σ die Flächen H, H_1, so soll auch von der Schnittcurve k von F und F_1 die Schnittcurve l von H und H_1 die Imaginärprojection oder die conjugirte Curve in Bezug auf S und Σ heissen. Weil F und F_1 auch die Imaginärprojectionen von H und H_1 sind, ist auch k diejenige von l. Die gewöhnliche und die Imaginärprojection bilden, wie bereits für einen Specialfall angegeben, die integrirenden Bestandtheile des Kegelschnitts, in welchen sich von der gewählten Tetraederecke aus die Curve projicirt; ist insbesondere die Curve vollständig imaginär, so ist ihre Imaginärprojection ein vollständiger Kegelschnitt. Die ausserordentliche Tragweite dieser Methode dürfte aus dem Vorstehenden hinreichend ersichtlich sein; nützlich erscheint es aus mancherlei Gründen, hier noch einmal die Priorität des Verfassers hinsichtlich der Imaginärprojection zu constatiren.

Zur Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten werden zunächst projectivische Punktinvolutionen in der Ebene, sowie die durch sie bestimmten Kegelschnittbüschel herangezogen und mit ihrer Hilfe wird die Aufgabe gelöst, durch acht Punkte zwei beliebige Flächen zweiter Ordnung zu legen. Die Punkte Q der gesuchten Fläche liegen dann auf Strahlen durch den neunten, P; P und Q sind zugeordnete Punkte in der durch die zwei Schnittpunktepaare mit den Hilfsflächen bestimmten Involution. Die mitgetheilte Lösung stimmt im Wesentlichen mit der von Chasles auf sein Correspondenzprincip gegründeten überein.

Die Aufnahme der im folgenden Abschnitt gegebenen Theorie der Rollcurven erscheint wohl hauptsächlich durch die Beziehung dieser Curven zu den Projectionen der Schraubenlinie geboten. Man kann bekanntlich durch

* Vielleicht entschliesst sich der Sohn des Verfassers, Herr Dr. H. Wiener, seinen Modellen der R^4 noch diesen Uebergangsfall hinzuzufügen und noch besser, auch den weiteren der Curve mit Spitze.

schiefe Projection der gemeinen Schraubenlinie auf eine Normalebene zur Axe ihres Rotationscylinders alle drei Typen der Cykloide erzeugen. Die allgemeine Schraubenlinie wird als geodätische Linie eines beliebigen geschlossenen oder offenen Cylinders definirt.

Sehr lehrreich ist im folgenden Abschnitt das Capitel über topographische Flächen mit der beigegebenen interessanten Figur, welche ein Terrain mit Berggipfel, Sattelpunkt, Rinnelinie oder Thalweg und Wasserscheide darstellt; alles bestimmt durch Niveaucurven und Angabe der Falllinien, welche bei den Curvensystemen in orthogonaler Projection auf die Horizontalebene zwei Schaaren von gegenseitigen orthogonalen Trajectorien sind. Aber die Schaaren sind nicht vertauschbar, wenn sie die cotirten Projectionen einer Bodenfläche bedeuten sollen. Während sich die Niveaucurven um den Gipfel in geschlossenen Ovalen bewegen, gehen die Falllinien sämmtlich durch diesen Punkt, im Gipfel selbst unbestimmt werdend. Beim Ueberschreiten desselben nach einer bestimmten Richtung erhält jedoch die zugehörige Falllinie einen Wendepunkt. Auf weiter dargelegte interessante Eigenschaften der verschiedenen Curven, namentlich die ihnen durch meteorologische Einflüsse verliehene Prägung kann hier nur aufmerksam gemacht werden.

Die Eigenschaften der Hüllflächen werden an dem Beispiele der Serpentine auseinandergesetzt.

Bis jetzt wurde die Untersuchung der algebraischen Flächen rein geometrisch geführt. Bei der Theorie der windschiefen Flächen werden Sätze über die Durchschnittscurve zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung und andere nothwendige Dinge aus der analytischen Geometrie herübergenommen, mit deren Hilfe dann wichtige Zahlen für Regelflächen, wie ihre Ordnung aus den Ordnungen ihrer als gegeben gedachten drei Leitcurven, ermittelt werden. Unter den Beispielen verdient besonders die Behandlung der Regelflächen dritten Grades, erzeugt auf den verschiedenen projectivischen Wegen, hervorgehoben zu werden. Der Schnitt einer solchen Fläche mit einer, ihre Doppelgerade als Erzeugende enthaltenden Fläche zweiter Ordnung führt auf die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art, die hier zum ersten Male constructiv behandelt wird. Auch die Unterschiede der beiden Arten dieser Curven gelangen zur gründlichen Darlegung.

Bei der Bestimmung der Schattengrenze der windschiefen Schraubenfläche wird das allgemeine Verfahren durch Anwendung der kinematisch-geometrischen Methode Burmester's vereinfacht. Das ganze Capitel zeichnet sich durch ungemeine Reichhaltigkeit aus.

Durch die Hereinziehung der Krümmungstheorie in den Rahmen des Buches unterscheidet sich dasselbe vortheilhaft von vielen anderen. Aus den entwickelten Lehren wird Nutzen gezogen für die Schattenconstruction, gelegentlich der Bestimmung der Tangente der Eigenschattengrenze. Auch die Grenzpunkte dieser Curve, d. h. diejenigen, in denen die Tangente mit dem

Lichtstrahl zusammenfällt, der dann die eine Asymptote der Dupin'schen Indicatrix ist, werden mit Hilfe einer fehlerzeigenden Curve bestimmt. Zur Bestimmung der Tangente überhaupt dient der Dupin'sche Satz: Ist einer Fläche *F* eine abwickelbare Fläche umschrieben, so sind in einem Punkte *P* der Berührungscurve *k* deren Tangente *t* und die Erzeugende *e* der abwickelbaren Fläche zwei conjugirte Tangenten der *F* und zugleich zwei conjugirte Durchmesser der Indicatrix der *F* in *P*. — Es wird darauf hingewiesen, dass im Falle eines parabolischen Punktes der Fläche die Tangente der Schattengrenze stets die Richtung der vereinigten Haupttangenten der Fläche hat. Eine besondere Untersuchung wird erforderlich — wie wir uns hinzuzufügen erlauben —, wenn der Lichtstrahl selbst diese Richtung besitzt. Dann erhält die Schattengrenze einen Doppelpunkt und die beiden dreipunktig berührenden Tangenten des Doppelpunktes trennen den Lichtstrahl und die Tangente der parabolischen Curve harmonisch, — und umgekehrt, hat die Schattengrenze einen Doppelpunkt (der natürlich auch isolirt sein kann), so ist dieser stets ein Punkt der parabolischen Curve.

Den Schluss bildet eine sehr elegante Behandlung der Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung; ihre Projectionen von einem Pol einer Hauptebene auf diese sind Kegelschnitte einer Schaar, deren Basisgerade die Projectionen der Tangentenebenen in vier Nabelpunkten sind. Man darf hier von der „Projection einer Ebene" reden, da die in Betracht kommenden durch das Centrum der Projection gehen. Die imaginären der 16 Nabelpunkte können hierbei in derselben Weise benutzt werden, wie die reellen.

Der letzte Abschnitt bezieht sich auf die Abbildung krummer Flächen in axonometrischer, schiefer und Centralprojection, vielfach unter Angabe der Beleuchtung und der Spiegelung. Auf Grundlage der Wallaston-schen Untersuchungen werden die merkwürdigen Umstände, welche bei Feststellung der Richtung des menschlichen Blickes zu berücksichtigen sind, analysirt; insbesondere wird das Factum erklärt, dass der Blick eines Portraits für jede Stellung des Beschauers auf diesen gerichtet ist, wenn er es für eine einzige ist.

Reliefperspectivisch werden zum Schlusse die Flächen zweiter Ordnung behandelt.

In dem vorliegenden Werke hat der Herr Verfasser dem mathematisch-technischen Publicum die während einer langjährigen Thätigkeit gesammelten Schätze bescheert und sich Anspruch auf hohen Dank erworben. Nur eine vielfache Erprobung im Hör- und Constructionssaale kann auch den Methoden eine solche Gereiftheit verleihen, wie sie jede Zeile des Buches bekundet.

Hannover. C. Rodenberg.

Dr. L. Burmester, **Lehrbuch der Kinematik.** Erster Band: Die ebene Bewegung. XX und 941 S., nebst einem Atlas von 57 lithographirten Tafeln. Leipzig 1888, Verlag von Arthur Felix.

Das vorliegende, höchst bedeutende Werk ist das erste vollständige, auf der Höhe wissenschaftlicher Forschung stehende Lehrbuch der Kinematik und erfordert deshalb eine ausführliche Besprechung.

Mit Ampère, dem Schöpfer dieses Begriffes, versteht der Verfasser unter Kinematik die geometrische Bewegungslehre sammt ihrer Anwendung auf die Maschinen. Während jedoch in den bisherigen Lehrbüchern, von Willis bis Reuleaux, bald die theoretische, bald die praktische Seite einseitig betont wurde, besteht das vom Verfasser angestrebte und, wie mir scheint, auch erreichte Ziel in der harmonischen Vereinigung von Theorie und Praxis. Bei klarer, leicht verständlicher Darstellung sind die Entwickelungen so elementar als möglich gehalten: es werden im Wesentlichen nur die Hilfsmittel der reinen Geometrie (einschliesslich der Elemente der projectiven Geometrie) nebst dem Begriff des unendlich Kleinen benützt.

Gehen wir nun auf den Inhalt genauer ein. Nachdem eine geschichtliche Einleitung und ein ausführlicher Quellen- und Literaturnachweis, der durch zahlreiche spätere Anmerkungen noch vervollständigt wird, vorausgegangen sind, handelt der erste Abschnitt (S. 11—184) von den grundlegenden Beziehungen der Bewegung. Es werden zuerst in der üblichen Weise die Begriffe Geschwindigkeit, Geschwindigkeits- und Wegdiagramm erklärt und sodann die geometrische Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten gelehrt, wobei auch der geometrischen Addition von Strecken Erwähnung geschieht. Hierauf wird die Bewegung eines starren ebenen Systems untersucht. Die Betrachtung zweier Systemlagen führt zum Begriff des Poles mit den bekannten Anwendungen auf das Ziehen von Normalen an die Bahncurven und Hüllbahncurven (d. h. die Curven, die von den verschiedenen Lagen der Curven des bewegten Systems umhüllt werden). Für die Geschwindigkeiten einer starren Geraden und eines ebenen Systems werden grundlegende Sätze aufgestellt. Bei dem Satze: „Die senkrechten Projectionen von den Geschwindigkeiten der Punkte einer bewegten starren Geraden auf diese Gerade sind in jedem Augenblicke von gleicher Grösse" hätte ich die Angabe des ersten Entdeckers (Résal?) gewünscht. Es folgt die Erklärung der Begriffe Krümmungskreis, Krümmungshalbmesser u. s. w., Evolute. Leider wiederholt hier der Verfasser die allerdings hergebrachte und, wie es scheint, schwer auszurottende irrige Behauptung, eine Curvenstelle mit unendlich fernem Krümmungsmittelpunkt sei eine Wendestelle, und wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Curve sich befinde, so liege ein Rückkehrpunkt vor, während doch in Wahrheit ein Wendepunkt auch den Krümmungshalbmesser Null und ein Rückkehrpunkt den Krümmungshalbmesser Unendlich (ein Rückkehrpunkt zweiter Art sogar endlichen, von Null verschiedenen Krümmungshalbmesser) besitzen kann, überhaupt das Auftreten der Krümmung Null oder Unendlich bei jeder der vier Hauptformen von Curvenstellen möglich ist.

Es wird zur Betrachtung dreier unendlich nahen Lagen eines ebenen Systems übergegangen. Jede Bewegung eines solchen Systems in seiner Ebene kann auf das Gleiten zweier Curven f und l des bewegten Systems auf zwei Curven φ und λ des festen Systems zurückgeführt werden. Seien nun beziehentlich F, L, Φ, Λ die Krümmungsmittelpunkte jener Curven für die betreffenden Gleitstellen, so zeigt der Verfasser: Die Bewegung des ebenen Systems aus einer Lage in zwei unendlich nahe folgende Lagen kann auch hervorgebracht werden durch die Bewegung der als Systempunkte betrachteten Punkte F, L auf den um die festen Punkte Φ, Λ beschriebenen Kreisen, oder mit anderen Worten, durch die Bewegung der als Systemstrecke betrachteten Koppel FL des durch die vier Krümmungsmittelpunkte F, L, Φ, Λ gebildeten Gelenkvierecks. Diese Vorstellung erweist sich später als nützlich. Es folgt die Ableitung des fundamentalen Satzes, dass jede Bewegung eines starren ebenen Systems in einer festen Ebene auf das Rollen einer dem bewegten System angehörigen Curve (Polcurve) auf einer festen Curve (der Polbahn) zurückgeführt werden kann. Vertauscht man diese Curven, so erhält man die Umkehrung der ursprünglichen Bewegung. Die fundamentale Bedeutung des Begriffs der Umkehrung einer Bewegung hatte bereits Chasles erkannt. Wie mir scheint, kann man es nur billigen, dass der Verfasser die bisher üblichen Bezeichnungen Polcurve und Polbahn beibehalten hat, trotzdem Reuleaux für beide die Benennung Polcurve gebraucht wissen wollte. Allerdings besteht zwischen beiden Curven kein principieller Unterschied, indem bei der Umkehrung der gegebenen Bewegung die eine an Stelle der andern tritt. Diesem Umstande ist aber dadurch genügend Rechnung getragen worden, dass der Verfasser beide Curven gemeinschaftlich Rollcurven nennt, während andererseits eine Unterscheidung unerlässlich ist. Nachdem noch bewiesen worden ist, dass die Rollcurven die beiden einzigen Curven sind, welche bei der gegenseitigen Bewegung zweier starren ebenen Systeme beständig aufeinander rollen, werden einige wichtige specielle Bewegungen vorläufig untersucht, z. B. die elliptische Bewegung und ihre Umkehrung, die cardioidische Bewegung. Unter den Ergebnissen der nun folgenden Untersuchungen über die gegenseitige Bewegung dreier ebenen Systeme hebe ich den Satz hervor: Während eines Zeitelementes kann die Bewegung zweier ebenen Systeme S_2 und S_3 in einem dritten S_1 durch ein Gelenkviereck bewirkt werden, welches gebildet wird durch die Pole P_{12}, P_{13} und durch zwei bez. den Systemen S_2 und S_3 angehörige beliebige Punkte, deren Verbindungslinie durch den Pol P_{23} geht. Es werden jetzt Constructionen für die Geschwindigkeit des Schnittpunktes zweier bewegten Curven abgeleitet, worunter diejenige mittels der Pole besonders bemerkenswerth ist, und Anwendungen auf Tangenten- und Normalenconstructionen gemacht. Bezüglich der in Fig. 50

dargestellten Constructionen sei die Bemerkung gestattet, dass dieselbe in einem sehr allgemeinen Verfahren von Wiener (s. dessen Darstellende Geometrie, Bd. I S. 170) enthalten ist.

Als unmittelbare Folge früherer Sätze ergiebt sich die bekannte wichtige Bobillier'sche Construction der gemeinschaftlichen Tangente der Rollcurven aus den Krümmungsmittelpunkten zweier Systemcurven und den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten ihrer Hüllbahnen. Hierauf werden einige elegante Constructionen für die Geschwindigkeiten bei einer bewegten Geraden, sowie für den Berührungspunkt derselben mit ihrer Hüllbahn entwickelt. Nebenbei ergiebt sich eine neue sehr einfache Construction für den Krümmungsmittelpunkt der Verfolgungscurve. An einer grossen Zahl von Beispielen wird nun, als Anwendung des Vorhergehenden, die Construction der Tangenten und Normalen vermittelst Geschwindigkeiten gezeigt. Wir finden elegante Tangentenconstructionen u. A. für das Cartesische und Cassini'sche Oval (oder eigentlich für zwei sehr allgemeine Gattungen von Curven, deren einfachste Vertreter die genannten sind), für die magnetischen Curven, die Focalcurven, für die vom Verfasser sogenannte Kranioide (sie kommt bei Schattenconstructionen an Schraubenflächen vor) und die als besonderer Fall derselben erscheinende Capricornoide.

Untersuchungen über die Momentanbewegung eines Gelenkvielecks und eines veränderlichen Dreiecks, sowie über in gewisser Weise veränderliche Punktgruppen auf einer Geraden schliessen sich an und es werden daraus zum Theil bekannte Constructionen für die Krümmungsmittelpunkte verschiedener Curven, z. B. der Kegelschnitte und der cyklischen Curven abgeleitet. Der Schluss des ersten Abschnittes ist der Untersuchung der Beziehungen zwischen den Krümmungsmittelpunkten der Systemcurven und der von ihnen erzeugten Hüllbahnen gewidmet. Die zur momentanen Berührungsstelle einer Systemcurve und ihrer Hüllbahn gehörigen Krümmungsmittelpunkte beider werden entsprechend genannt. Es wird zuerst der von den früheren Autoren unterlassene Beweis erbracht, dass durch zwei entsprechende Krümmungsmittelpunkte und die Polbahntangente ein Aequivalent für drei unendlich nahe Systemlagen gebildet, also auch das ganze System entsprechender Krümmungsmittelpunkte bestimmt wird. Es folgen die sogenannten Bobillier'schen Constructionen in neuer Ableitung. Die zwischen dem festen und bewegten System durch die Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte hergestellte quadratische Verwandtschaft wird eingehend untersucht. Es ergeben sich sodann die bekannten Begriffe Wendekreis und Rückkehrkreis, für welche der Verfasser die Bezeichnung De la Hire'sche Kreise einführt. Gelegentlich einiger auf diese Kreise bezüglichen Constructionen wird auch die fälschlicherweise gewöhnlich nach Savary benannte, aber von Euler herrührende Formel abgeleitet, welche bisher bei einschlägigen Untersuchungen gewöhnlich als Ausgangspunkt diente. Einige Anwendungen auf die Construction der Krümmungsmittelpunkte für Fusspunktscurven, Kegelschnitte und katakaustische Curven bilden den Schluss. Was übrigens die in Art. 50 auf neue Art hergeleitete Grübler'sche Construction für die Krümmungsmittelpunkte der Rollcurven aus zwei Paaren entsprechender Krümmungsmittelpunkte betrifft, so hat sich der Verfasser durch Grübler verleiten lassen, ihr allgemeine Giltigkeit zuzuschreiben. Thatsächlich aber ist die betreffende Aufgabe im Allgemeinen nicht lösbar, da die Krümmungsmittelpunkte der Rollcurven erst durch vier unendlich nahe Systemlagen bestimmt sind, während zwei Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte nur drei unendlich nahe Lagen vertreten können.

Der zweite Abschnitt (S. 134—173) enthält eine sehr eingehende Untersuchung der cyklischen Curven. Dieselben werden als die Bahnen der Punkte eines Systems definirt, das in einem zweiten beweglichen System sich gleichmässig um einen Punkt dreht, während das zweite System selbst um einen Punkt des ruhenden gedreht wird. Die Rollcurven erweisen sich bei dieser Bewegung als Kreise, womit man die gewöhnliche Definition der cyklischen Curven erhält. Aus der ersten Definition folgt mit Leichtigkeit der Satz: Jede cyklische Curve kann mittels Rollen durch zwei verschiedene Kreispaare erzeugt werden. Wir erfahren, dass diese doppelte Erzeugungsweise allgemein zuerst von Bellermann (1867) erkannt wurde. Neuerem Gebrauche gemäss nennt der Verfasser die bei endlichen Rollkreisen erzeugten Curven Trochoiden. Dieselben werden im Anschluss an Wiener in verschlungene, gestreckte und gespitzte Epi- und Hypotrochoiden eingetheilt. (Durch die Entdeckung der doppelten Erzeugungsweise war die frühere Eintheilung hinfällig geworden.) Die gespitzten Trochoiden sind mit den Epi- resp. Hypocykloiden identisch. Als besondere Fälle erscheinen die eigentlichen Cykloiden und die Kreisevolventen (im allgemeineren Sinne), zu welchen auch die archimedische Spirale gehört. Wir finden weiter Constructionen für die Krümmungsmittelpunkte und die Wendepunkte der cyklischen Curven nebst einer ausführlichen Anleitung zu ihrer zeichnerischen Darstellung. Nebenbei werden die Pascal'schen Curven als specielle Epitrochoiden nachgewiesen. Als Evolute einer gespitzten Trochoide wird eine dazu gehörige ähnliche Trochoide gefunden, womit die schon Newton bekannte Rectification dieser Curven geleistet ist. Den Schluss des zweiten Abschnittes bildet eine sehr interessante und ergebnissreiche Untersuchung über die Erzeugung der Trochoiden durch ein affin-veränderliches System, wobei folgender Satz die Grundlage bildet: Drehen sich zwei Punkte eines affinveränderlichen Systems um einen festen Punkt desselben derart, dass ihre Drehungen proportional sind, so beschreiben alle Punkte dieses Systems Trochoiden.

Der dritte und vierte Abschnitt (S. 173—229 und 229—256) sind den Anwendungen der vorher entwickelten Hilfsmittel auf die Verzahnung der Stirnräder resp. auf die Gestaltung der sog. Kapselräderwerke, die als Ventilatoren, Pumpen, Motoren und Wassermesser dienen, gewidmet. Allgemeineres Interesse beansprucht die Einleitung zum dritten Abschnitt, welche sich u. A. mit der Construction der Bahnen und Hüllbahnen bei einer durch ihre graphisch gegebenen Rollcurven bestimmten Bewegung befasst.

Mehr theoretischer und vorbereitender Natur ist wieder der fünfte Abschnitt (S. 256—283), welcher von der Stützung und zwangläufigen Bewegung der Gebilde in der Ebene handelt. Nachdem die geometrischen Bedingungen festgestellt worden sind, unter welchen die Bewegung eines widerstandsfähigen ebenen Gebildes entweder verhindert oder zu einer zwangläufigen gemacht wird, werden die Begriffe kinematisches Elementenpaar und Gliederpaar, Mechanismus (von Reuleaux „kinematische Kette" genannt) und Getriebe erklärt. Auch wird die Benützung „fügsamer" (d. h. biegsamer und bildsamer) Körper zur Uebertragung der Bewegungen erörtert.

Es folgt im sechsten und siebenten Abschnitte (S. 283—417 und 417—560) eine sehr ausführliche und allseitige Untersuchung zahlreicher einfacher und zusammengesetzter Mechanismen mit steter Berücksichtigung ihrer Anwendungen in der Praxis. Mit dem Kurbelgetriebe (welches durch Feststellung eines Gliedes aus einem Gelenkviereck entsteht) und seinen Abarten beginnend, behandelt der Verfasser ausserdem im sechsten Abschnitte die einfachen Mechanismen mit Curvenführung, die unrunden Räder, die einfachen Mechanismen mit Bandtrieb (Riemenscheiben, Konen u. s. w.) und ferner im siebenten Abschnitte nach einigen allgemeinen Betrachtungen den Watt'schen, den Stephenson'schen, den „Dreispann"-Mechanismus und specielle Arten derselben, dann Räderwerke und räderlenkige Mechanismen, sowie zusammengesetzte Mechanismen mit Bandtrieb.

Von grossem Interesse für den Geometer ist der achte Abschnitt (S. 560—599) über geführte und übergeschlossene Mechanismen. Wir lernen nächst dem gewöhnlichen Pantographen oder Storchschnabel in verschiedenen Formen die Sylvester'sche Verallgemeinerung desselben kennen und hierauf den aus einem gelenkigen Antiparallelogramm bestehenden Hart'schen Inversor, welcher dazu dienen kann, zu einer Figur eine inverse, d. h. ihr nach der Methode der reciproken Radien verwandte zu zeichnen. Es können daraus u. A. Gelenkmechanismen zur Erzeugung von Kegelschnitten, Fusspunktscurven der Parabel, Cissoiden und Strophoiden abgeleitet werden. Eine Verallgemeinerung des Hart'schen ist der quadruplane Inversor von Sylvester und Kempe. Es folgt noch der Peaucellier'sche Inversor, welcher zwar früher bekannt war, jedoch weniger einfach ist, als der von Hart. Es schliesst sich die Betrachtung der von Sylvester und Anderen angegebenen Mechanismen an, die aus einer Verallgemeinerung des Peaucellier'schen hervorgegangen sind und durch welche verschiedene gesetzmässige Bewegungsübertragungen bewerkstelligt werden können. Bei den mehrfach geführten Bewegungsmechanismen hätte ich die Erwähnung des Hauck'schen Perspektographen gewünscht. Die übergeschlossenen Mechanismen werden nach Ansicht des Verfassers in Zukunft ein ergiebiges Feld der kinematisch-geometrischen Forschung bilden.

Der neunte Abschnitt (S. 599—664) behandelt die Mechanismen für angenäherte Geradführung. Die Möglichkeit, genaue Geradführungen durch Gelenkmechanismen herzustellen, wurde bezweifelt, bis die Geradführungen von Peaucellier, Hart und Kempe erschienen. Die Praxis begnügt sich jedoch mit den einfachen angenäherten Geradführungen, bei welchen ein Stück der Bahn des geführten Punktes sich einer Geraden sehr anschmiegt. Behufs Gewinnung einer sichern geometrischen Grundlage für die Construction derartiger Mechanismen betrachtet der Verfasser nacheinander drei, vier und fünf verschiedene Lagen eines bewegten starren ebenen Systems und sucht die Systempunkte auf, deren zugehörige Lagen sich auf einer Geraden (allgemeiner auf einem Kreise) befinden. Die Ergebnisse dieser Untersuchung hatte übrigens der Verfasser schon in zwei früheren Arbeiten auf andere Weise entwickelt. Auf Grund derselben werden einfache Constructionen für eine möglichst angenäherte Geradführung mittels des Kurbelgetriebes und des Watt'schen Mechanismus abgeleitet.

Im zehnten Abschnitt (S. 664—741) werden die Mechanismen bewährter Schiebersteuerungen an Dampfmaschinen einer gründlichen kinematischen Untersuchung unterworfen.

Es folgt im elften Abschnitte (S. 741—859) die Lehre von den Beschleunigungen nebst Anwendungen auf die Mechanismen.

Nachdem der Verfasser den Begriff Beschleunigung in strengster Weise abgeleitet, auch die Beschleunigungen höherer Ordnung, die verschiedenen Beschleunigungsdiagramme und Hodographen erklärt hat, werden einige durch ihr Beschleunigungsgesetz definirte Bewegungen studirt, nämlich die Fall- und Wurfbewegung, Centralbewegung, Planetenbewegung und harmonische Bewegung (Projection einer gleichförmigen Bewegung im Kreise). In dem Satze von Coriolis (betreffend die Beschleunigung eines Punktes, der auf einer in einem festen System bewegten Curve sich bewegt) ersetzt der Verfasser den bisher gebräuchlichen Ausdruck „zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung“ durch den allerdings vorzuziehenden „Zusatzbeschleunigung“. Mittels des ebengenannten Satzes werden für eine Reihe zusammengesetzter Bewegungen die Beschleunigungen construirt. Sodann wird das Beschleunigungssystem der Punkte eines starren ebenen Systems eingehend untersucht. Den Ort der Punkte ohne Tangentialbeschleunigung nennt der Verfasser „Gleichenkreis“, weil jene Punkte in zwei aufeinanderfolgenden gleichen Zeitelementen gleiche Wegelemente durchlaufen. An vielen Beispielen wird die constructive Bestimmung der Beschleunigungen bei einfachen und zusammengesetzten Mechanismen gezeigt. Der folgende hierbei verwendete Satz verdient Erwähnung: Die Endpunkte der Beschleunigungen zweier Punkte eines bewegten starren ebenen Systems sind entsprechende Punkte zweier affinen Systeme, in denen jene Punkte, sowie die Endpunkte ihrer Geschwindigkeiten entsprechende Punkte sind und in denen der momentane Wendepol der Doppelpunkt ist.

Einen interessanten Ausblick in noch wenig erforschte Gebiete eröffnet der zwölfte Abschnitt (S. 859—929) über die Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme in der Ebene. Wie in früheren Arbeiten, bezeichnet der Verfasser die einzelnen Zustände des bewegten veränderlichen Systems sehr zweckmässig als dessen Phasen. Es wird zuerst der (schon 1874 vom Verfasser aufgestellte) fundamentale Satz abgeleitet: Die von einer Systemcurve erzeugte Hüllbahn (d. h. die Curve, welche die verschiedenen Phasen der Systemcurve einhüllt) hüllt auch die Bahnen der einzelnen Punkte jener Systemcurve ein. Sodann überträgt der Verfasser eine Reihe von Begriffen, die ursprünglich für starre Systeme aufgestellt worden sind, auf beliebig veränderliche Systeme. Er nennt z. B. jeden sich selbst entsprechenden Punkt zweier unendlich nahen Phasen einen Pol und dessen geometrische Orte im festen und bewegten Systeme Polbahn resp. Polcurve. Letztere verändert sich natürlich mit dem bewegten Systeme. Jene beiden Curven stehen in der Beziehung, dass ihre entsprechenden Elemente im Laufe der Bewegung zur Deckung kommen. Beim starren System ist dies der Vorgang des Rollens der Polcurve auf der Polbahn. Die Bezeichnung „Rollen“ auch auf jene allgemeinere Beziehung anzuwenden, wie es der Verfasser vorschlägt, erscheint mir gewagt.

Die so wichtige Umkehrung der Bewegungen wird ebenfalls für veränderliche Systeme definirt. Es folgt dann eine an geometrischen Ergebnissen äusserst reiche Untersuchung einiger specieller Bewegungen ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Systeme. Zum Schluss giebt der Verfasser eine anziehende Studie über das (schon früher von ihm behandelte) bifocal-veränderliche System. So wird ein System genannt, in welchem alle Systempunkte unveränderliche Entfernungen von zwei ausgezeichneten Punkten des Systems, den Focalpunkten, besitzen. Neu und überraschend ist die darstellend-geometrische Auffassung der bifocalen Verwandtschaft. Es wird nämlich gezeigt, dass, wenn S_1 und S_2 zwei bifocal verwandte Systeme sind, S_1 also der Grundriss und ein gewisses zu S_2 ähnliches System als der Aufriss eines bestimmten einschaligen Hyperboloids betrachtet werden kann. Auch die Beziehung zwischen irgend einer Phase eines bifocal-veränderlichen Systems und der zugehörigen Geschwindigkeitsphase wird in ähnlicher Weise räumlich aufgefasst, während dies für die Beschleunigungsphase nicht gelingt.

Die vorhergegangene ausführliche Inhaltsangabe wird die Reichhaltigkeit und Ausführlichkeit des besprochenen Werkes erkennen lassen. Besonders rühmend hervorzuheben ist noch die peinliche Gewissenhaftigkeit, welche in den geschichtlichen Anmerkungen zu Tage tritt und zur Berichtigung mancher allgemein verbreiteter Irrthümer geführt hat. Dankenswerth ist die Beigabe eines alphabetischen Namen- und Sachregisters, welches bequemes Nachschlagen ermöglicht. Die Figuren sind nach Anlage und Ausführung geradezu mustergiltig; die Ausstattung ist gut. Zweifellos ist das Werk bestimmt, einen Anstoss zu vermehrtem Schaffen auf dem so schönen Gebiete der Kinematik zu geben, reichere theoretische Kenntnisse in die Kreise der Techniker zu tragen und andererseits den Theoretikern eine bequeme Einsicht in das Wesen und die Bedürfnisse der Praxis zu gewähren. Hoffen wir, dass diesem ersten Bande der zweite, den Bewegungen im Raum gewidmete bald und in gleicher Vollendung folgen wird.

Darmstadt. Prof. Dr. R. Mehmke.

Des Hypsikles Schrift Anaphorikos, nach Ueberlieferung und Inhalt kritisch behandelt von Dr. Karl Manitius. Osterprogramm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden. 21 S. [1888. Progr. Nr. 504.]

Der Anaphorikos, d. h. das Buch von den Aufgängen des Alexandriners Hypsikles, ist 1657 in Paris im Urtext, sowie in lateinischer Uebersetzung gedruckt worden, seitdem nicht mehr. Jene Ausgabe gehört bereits seit längerer Zeit zu den typographischen Seltenheiten, womit freilich so ziemlich ihr einziger Vorzug ausgesprochen ist, da sie die deutlichsten Merkmale mangelnden Verständnisses von Seiten des Herausgebers aufzeigt. Man darf daher Herrn Manitius nur dankbar sein, dass er eine neue Ausgabe wieder in griechischer und lateinischer Sprache veranstaltete. Dass ein Lehrer derjenigen Anstalt, an welcher Fr. Hultsch als Director wirkt, die Ausgabe besorgte, konnte ja bei Jedem, der Herrn Manitius bisher nicht kannte, nur das günstigste Vorurtheil erwecken.

Der neue griechische Text beruht der Hauptsache nach auf einer Handschrift aus dem XIV. Jahrhundert, welche der Ambrosianischen Bibliothek in Mailand angehört. Zum Vergleiche wurden zwei andere Handschriften der gleichen Bibliothek, eine Venetianische und eine Wiener Handschrift, endlich die auf zwei Pariser Handschriften beruhende alte Druckausgabe beigezogen.

Der lateinische Text ist selbst von geschichtlicher Bedeutung. Er stammt aus einer Pariser Handschrift, welche gegenwärtig die Bezeichnung Cod. lat. Paris. 9335 führt, und rührt mit an Gewissheit grenzender Wahrscheinlichkeit von Gerhard von Cremona her, der ihn im XII. Jahrhundert jedenfalls nicht aus dem Urtexte, sondern aus einer arabischen Bearbeitung übersetzte, wenn man auch nicht weiss, welche Bearbeitung er benutzte, ob die des Ishak ben Horain, verbessert von Ṯâbit ibn Kurra, oder die des Kustâ ibn Lûkâ, verbessert von Alkindi, da diese arabischen Texte nicht gedruckt zum Vergleich vorhanden sind.

Herr **Manitius** hat aber sich nicht damit begnügt, die neue Ausgabe zu veranstalten, er hat auch Untersuchungen über den Inhalt der Schrift angestellt und ist dabei zu sehr überraschenden Ergebnissen gekommen. Der Anaphorikos beginnt mit drei Sätzen über arithmetische Reihen, welche in jedem Werke, das mit der Geschichte griechischer Mathematik zu thun hat, verglichen werden können. Diese Sätze, jedenfalls von **Hypsikles** ausgesprochen, vielleicht im Zusammenhange mit der bei **Diophant** erhaltenen Definition des **Hypsikles** von Vieleckszahlen, sind alsdann astronomisch unrichtig verwerthet, so dass Herr **Manitius** Bedenken trägt, hierfür auch **Hypsikles** die Schuld beizumessen. Diese Anwendung verübte, nach der Meinung des Herausgebers, vielmehr ein vor **Hipparch**, also vor 130 v. Chr. lebender **Astrologe**. In der That haben, wie aus dem dem **Ptolemaeos** zugeschriebenen Tetrabiblos hervorgeht, ältere Sterndeuter arithmetische Reihen bequemer Rechnung halber missbraucht. Herr **Manitius** ist geneigt, darin altägyptisches Erbe zu erkennen.

Wir selbst sind mit eingehenden Kenntnissen über die Geschichte der Astrologie zu wenig ausgerüstet, um hier mehr als nur berichtend aufzutreten. Es hat also nur die Bedeutung ganz persönlicher Meinung, wenn wir uns weniger an Aegyptisches als an Babylonisches erinnert fühlen. Wir denken dabei ebensowohl an den Ausspruch des **Theon von Smyrna** (ed. **Hiller**, p. 177 lin. 9—20), der gerade den Babyloniern die rechnenden Methoden als Erfindung zuweist, als an die aus Babylon vielfach bekannten, das ganze Gebiet der Voraussagungen betreffenden Thatsachen, als insbesondere an eine Anwendung arithmetischer und geometrischer Reihen zum Zwecke der Bestimmung der Grösse der jeweils leuchtenden Mondfläche. (Vorles. Gesch. d. Mathem. I, 72.)

Cantor.

Euclidis opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Euclidis elementa edidit J. L. Heiberg, Dr. phil. Vol. V continens Elementorum qui feruntur libros XIV et XV et Scholia in Elementa cum Prolegomenis criticis et Appendicibus. CXIII, 738 pag. Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri. MDCCCLXXXVIII.

Im XXXII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 57, haben wir das Erscheinen der Euklidischen Elemente in der durch Herrn **Heiberg** besorgten Ausgabe als vollendet angezeigt. Wenn wir heute berichten, es sei noch ein 5. Band des genannten Werkes der Oeffentlichkeit übergeben, so befinden wir uns nur in scheinbarem Widerspruche gegen unsere damalige Aussage. Der neue stattliche Band gehört zu den Elementen, bildet aber keinen Theil derselben. Seinen Inhalt bilden eine stattliche Vorrede, welche im 1. Bande der neuen Ausgabe für den 4. Band in Aussicht gestellt diesem, der bekanntlich früher als der 3. Band die Presse verliess, nicht beigegeben werden konnte, dann jene beiden Bücher, denen man lange fälschlich den Namen des XIV. und XV. Buches der Elemente beilegte, während das erstere Hypsikles von Alexandria, das zweite nach Herrn Heiberg's wohlbegründeter Meinung einem Schüler des Baumeisters Isidor von Milet angehört, endlich Scholien zu sämmtlichen Büchern der Elemente.

Ueber jene sogenannten XIV. und XV. Bücher dürfen wir rasch hinweggehen. Die Art ihrer Herausgabe ist die gleiche wie die der anderen Bücher. Griechischer Text und lateinische Uebersetzung sind jener auf den geraden, diese auf den ungeraden Seiten nebeneinander abgedruckt, mit der gewohnten Zugabe von Varianten und wenigen Anmerkungen.

Die Scholien, 668 Druckseiten füllend, wovon 150 Seiten zum I. Buche der Elemente gehören, werden genauem Studium voraussichtlich Ergebnisse gewähren. Sind doch die Scholien des Proklus nur zum I. Buche vorhanden und, soweit wir bei raschem Vergleiche uns überzeugen konnten, in dem hier Abgedruckten reichlich verwerthet; man darf daher hoffen, dass ähnlicherweise die Scholien zu den anderen Büchern, mögen sie auch erst mit den Handschriften, in welchen sie sich finden, gleichaltrig sein, ältere und damit geschichtlich brauchbarere Vorarbeiten benutzt haben werden. Leider ist es Gewohnheit, die Scholien ohne Uebersetzung zu drucken, und da auch jeder Index (Namensverzeichniss wie Wortverzeichniss) noch fehlt, so war es uns nicht möglich, jene griechischen Scholien jetzt schon auf ihren Inhalt zu prüfen, während wir doch die Ankündigung des Bandes nicht allzuspät erscheinen zu lassen wünschten.

Die Vorrede giebt auf 7 Druckbogen Auskunft über Altes und Neues, was auf Ausgaben der Elemente sich bezieht. Ein Herausgeber derselben war Theon von Alexandrien, in der zweiten Hälfte des IV. nachchristlichen Jahrhunderts. Ihm kam es, wie Herr Heiberg als Schluss einer ausführlichen Untersuchung (pag. LXXV) zusammenfasst, nicht darauf an, den Euklidischen Text rein und wortgetreu zu erhalten; er zog es vor, den Inhalt dem Schüler leicht und mundgerecht zu machen; er scheute darum weder einzelne Veränderungen des Wortlautes, noch einzelne Zusätze; eines solchen Zusatzes hat er sich sogar gerühmt. Ob er dabei ganz aus Eigenem schöpfte, ob er eine Darstellung der Anfangsgründe der Mathematik benutzte, welche Apollonius von Pergä verfasst zu haben scheint (pag. LXXXIX Note), dürfte nicht zu entscheiden sein; Theon's Schweigen darüber gestattet beide Schlussfolgerungen. Auch Andere trugen zur Veränderung des Euklidischen Textes ihr kleineres oder grösseres Scherflein bei. Man darf z. B. mit Herrn Heiberg (pag. LXXIX) getrost behaupten, dass überall, wo zwei Beweise eines Satzes auftreten, der eine vom Rande in den Text überging oder aus einer andern Ausgabe stammt. Jedenfalls gab es schon zu recht früher Zeit mehrere Ausgaben, welche solche Unterschiede aufwiesen, dass ein Abschreiber zwischen beiden wählte und die ältere Fassung vorzog (pag. XXIV). So entstand ein alter Text, erhalten in einem

Vaticancodex aus dem X. Jahrhundert, den durch günstigen Zufall Peyrard 1814—1818 seiner Angabe zu Grunde legte, und ein neuerer Theonischer Text, von welchem zahlreiche Abschriften auf unsere Zeit gekommen sind. Die Schwierigkeiten, mit welchen demzufolge ein neuer Herausgeber zu kämpfen hatte, lassen sich leichter ermessen, als sie zu überwinden waren. Ob Herr Heiberg philologischer Kritik gegenüber seine Aufgabe voll gelöst hat, diese Frage kann nur ein Philologe beantworten, nicht wir. Die Ansprüche des Mathematikers hat er durch seine Ausgabe, wie durch die Einleitung, von der wir jetzt geredet haben, durchaus befriedigt. Cantor.

Histoire des sciences mathématiques et physiques. Par M. Maximilien Marie, répétiteur de mécanique, examinateur d'admission à l'école polytechnique. Tome XII: D'Arago à Abel et aux géomètres contemporains. Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. 1888. 258 pages.

Die 90 ersten Seiten dieses Bandes enthalten einen Abriss derjenigen Fragen, mit welchen die eigentliche Maschinenlehre im Gegensatze zur theoretischen Mechanik es zu thun hat, und eine Darstellung der Grundzüge der Wellenlehre. Dann folgen 78 Zeilen, in welchen die Fortschritte folgender Wissenschaften von Arago bis auf Abel ausschliesslich dargestellt sind: Algebra, Analysis, Geometrie, Mechanik, Astronomie, Physik, Chemie, Geologie, Industrie, Physiologie. Daran schliessen sich auf S. 97—241 die Biographien von Gelehrten, beginnend mit François Arago, geboren 1786, endigend mit Antoine-Augustin Cournot, geboren 1801. Eine ziemlich flüchtige Durchsicht ergab das Fehlen folgender Namen, von denen einzelne allerdings schon in vorangehenden Bänden hätten vorkommen müssen, keiner aber einem später als 1801 geborenen oder noch lebenden Mathematiker angehört: Arbogast, Bobillier, Bolyai, Gergonne, Green, Hindenburg, Kramp, Lobatchewsky, Plücker, Staudt, Steiner, Terquem. Wir könnten die Sündenliste fast zu beliebiger Länge ausdehnen, wenn wir über die Mathematik hinausgriffen. An diesem Dutzend werden aber unsere Leser genug haben. Wir müssen allerdings, ob unsern Vorwurf dadurch einschränkend wissen wir nicht, bemerken, dass die Namen Gergonne und Plücker auf S. 134—139 wegen ihrer Beziehungen zu Poncelet gelegentlich genannt sind und dem Ersteren dabei Tadel zufällt; Plücker kommt mit blosser Erwähnung davon. Auch Terquem ist angeführt wegen richtiger Würdigung von Cauchy'schen Arbeiten (S. 166 bis 167), ihm selbst aber kein Wort gewidmet. Dieser XII. Band des Werkes von Herrn Marie ist der letzte, der überhaupt erscheint. Dafür können wir das am Schlusse abgedruckte Gesammtregister als Beweis betrachten. Einen eigentlichen Schluss des Werkes, ein letztes Wort über das

Beabsichtigte und das Geleistete hat Herr Marie, sei es mit, sei es ohne Absicht, nicht ausgesprochen. Wollte er vielleicht den Lesern den Abschied dadurch erleichtern?

CANTOR.

Professor Dr. Joh. Friedr. Wilh. Gronau, von 1830—1873 erster Mathematicus an der Schule zu St. Johann. Sein Leben und seine Verdienste um die Wissenschaft. Von EDUARD SCHUMANN, Oberlehrer. Beilage zum Programm des Realgymnasiums zu St. Johann. Danzig, Ostern 1888.

Auf zehn Druckseiten ist der an Ereignissen nicht reiche Lebensgang des bescheidenen Gelehrten gezeichnet, der am 11. November 1803 geboren, am 14. August 1887 im hohen Alter von $83\frac{3}{4}$ Jahren verstorben ist und mehr als die Hälfte seines langen Lebens an einer und derselben Anstalt eine für seine Schüler segensreiche Wirksamkeit entfaltete. Unter Gronau's Arbeiten stehen die Tafeln hyperbolischer Functionen obenan. Auch sein Versuch, complexen Lösungen von Aufgaben, in welchen die Gliederzahl einer Reihe gesucht wird, einen Sinn beizulegen, verdient es, dass man denselben in Erinnerung bringe.

CANTOR.

Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Esposizione e disegne di ANTONIO FAVARO. Firenze 1888. Tipografia di G. Barbèra. 57 pag.

Galileo Galilei war noch nicht lange in seiner Villa zu Arcetri in verhältnissmässig milder Haft, als im Jahre 1634 Unterhandlungen wegen einer Gesammtausgabe seiner Schriften begannen. Peter von Carcavy wünschte dieselbe zu besorgen. Die Unterhandlungen zerschlugen sich gleichwie andere, welche G. unmittelbar mit Elzevir führte. Der grosse Gelehrte starb und sein letzter Schüler Viviani erbte den vorhandenen literarischen Nachlass, den er auf jede Weise zu ergänzen suchte. Viviani selbst war es nicht beschieden, den Druck zu überwachen. Er musste sich begnügen, Carlo Manolessi Materialien zur Verfügung zu stellen, aus welchen die Bolognaer Ausgabe von 1655—1656 entstand. Es bedarf kaum der Bemerkung, dass in dieser Ausgabe die verbotenen Schriften, insbesondere die Dialoge über die Weltsysteme und der Brief an Christine von Lothringen, fehlten. Die gleiche Lücke zeigt die Florentiner Ausgabe von 1718, während in der Paduaner Ausgabe von 1744 es gelang, die Druckerlaubniss für die Veröffentlichung der Dialoge zu erhalten, und nun finden sich dieselben auch in der ersten, wie in der zweiten Mailänder Ausgabe von 1808—1811 und von 1832. Man muss nicht wähnen, diese Ausgaben seit 1744 seien dadurch wirkliche Gesammtausgaben gewesen, auch nicht in dem Umfange, in welchem sie es dem vorhandenen Material nach hätten sein können. Die reiche Sammlung Viviani's war auf dem Wege der Erbschaft 1703 an dessen Neffen Jacopo Panzanini gelangt, dann aber wurde sie wieder allmälig zerstreut. Nelli fand 1750 werthvolle ihr entstammende Briefschaften im Besitze eines Wursthändlers! Die Neusammlung begann. Allein keine der genannten Ausgaben machte von dem Geretteten Gebrauch, nur in 1818—1821 durch Venturi herausgegebenen Ergänzungsbänden kam Manches an die Oeffentlichkeit. Der Wunsch nach einer vollständigen Drucklegung wurde immer lauter und dringender und führte zu der zweiten Florentiner Ausgabe von Alberi in den Jahren 1842—1856. Herr Antonio Favaro hat, wie Jeder weiss, der irgend mit Galilei-Studien sich beschäftigt hat, die Ungründlichkeit und Ungenauigkeit, mit welcher Alberi häufig verfuhr, wiederholt nachgewiesen. Mögen ja die politische Zerspaltung Italiens zur Zeit, als die zweite Florentiner Ausgabe zu erscheinen begann, die politischen Wirren, die im Verlauf des Druckes eintraten, die Sünden Alberi's milder zu beurtheilen gestatten, sie schaffen sie nicht aus der Welt, und dem geeinigten Königreich Italien blieb die Ehrenschuld gegen den grössten italienischen Forscher zu zahlen, die Veranstaltung einer wahren Gesammtausgabe seiner Schriften. Unter dem 20. Februar 1887 unterschrieb König Humbert den Erlass an den Unterrichtsminister, dem zufolge eine Ausgabe der Werke Galilei's in 20 Quartbänden von je 500 Seiten auf Staatskosten gedruckt werden solle. Während zehn Jahren ist dafür ein Zuschuss von je 10000 Lire bestimmt. An die Spitze des Unternehmens ist der Mann gestellt, den die Stimme des gelehrten Europas zu diesem Posten vorgeschlagen hätte, wäre sie befragt worden: Herr Antonio Favaro, zu dessen Unterstützung die Herren Genocchi, Govi, Schiaparelli sich haben bereit finden lassen. Die in der Ueberschrift genannte Arbeit ist das Programm des Herausgebers. Möge es sich so durchführen lassen, wie unzweifelhaft die Absicht dazu besteht, so wird die Wissenschaft um eine Ausgabe bereichert werden, die ihresgleichen in keiner Sprache haben dürfte.

Cantor.

Zur Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide. II. Theil (Laplace und Legendre) von Dr. F. Grube, Oberlehrer. Beilage zum Programm der königl. Domschule zu Schleswig, Ostern 1888, und Fortsetzung der Programm-Abhandlung von Ostern 1883. Schleswig 1888. 28 S. [1888. Progr. Nr. 273.]

Als wir im XXVIII. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 200 bis 201, die in der Ueberschrift genannte Programm-Abhandlung von 1883 anzeigten, schlossen wir mit der Hoffnung, in einer Fortsetzung derselben die einschlagenden Arbeiten von Laplace, von Ivory, von Chasles, von Dirichlet und vielen Anderen behandelt zu sehen. Eine Fortsetzung hat uns das Programm von 1888 nun gebracht, aber von den genannten Mathematikern ist nur Laplace zum Worte gelangt. Wir werden also auch heute vom Verfasser uns nicht zu verabschieden haben, sondern ihm ein hoffnungsreiches Auf Wiedersehen! zurufen dürfen.

Das 1888er Programm beschäftigt sich mit den beiden Abhandlungen Legendre's Ueber das Anziehungsproblem des Ellipsoids und mit den der Zeitfolge nach zwischen dieselben fallenden Behandlungen der gleichen Fragen durch Laplace. Mit der Gewissenhaftigkeit und der Genauigkeit, welche man an Herrn Grube kennt, giebt er nicht nur Auszüge aus den einzelnen Abhandlungen, ausführlich genug, um den Gang der jedesmaligen Untersuchung erkennen zu können; er legt auch an die erhaltenen Ergebnisse den Maassstab der heute geforderten Strenge an und zeigt, wie bei dieser Prüfung manche Beweisführungen nicht stichhalten, sei es, weil sie, auf unendlichen Reihen beruhend, deren Convergenzbereich überschreiten, sei es gar, weil sie als Grundsatz aufstellen, dass die Anziehung auf einen äusseren Punkt, wo derselbe auch liege, einer und derselben Formel unterworfen sein müsse, dass es also genüge, die Formel für einen besonders bequemen Fall abzuleiten. Der ersteren Ungenauigkeit haben Legendre und Laplace sich schuldig gemacht, letzterer nicht ohne selbst Bedenken über die Zulässigkeit zu hegen. Der zweite Mangel haftet an Legendre's Mémoire sur les intégrales doubles und wurde zuerst von Todhunter in seiner Geschichte der Anziehungslehre als solcher erkannt. Herr Grube hat die Bemängelung noch dadurch verstärkt, dass er besonders darauf aufmerksam macht, dass es in der That Formen der anziehenden Masse gebe, für welche nicht derselbe Ausdruck der Attractionscomponente für alle ausserhalb der Masse liegenden Punkte giltig ist, Formen, für welche wesentlich Herr Grube selbst die Rechnung zuerst geführt hat. Aber auch wenn man von den hierdurch nothwendigen Ergänzungen der Beweise absehen wollte, war noch nicht das Endziel jeder mathematischen Untersuchung erreicht: die einfachste Ableitung des Ergebnisses. Legendre's Rechnungen sind ein Muster von analytischer Unerschrockenheit, nicht von analytischer Eleganz. Wenn Herr Grube sagt: „Von der Arbeit, die in diesen wenigen Zeilen steckt, kann sich nur Derjenige eine richtige Vorstellung machen, der sich nach den darin gegebenen Vorschriften selbst bis zu dem von Legendre gegebenen Resultat hindurchgearbeitet hat“, so glauben wir ihm lieber, als dass wir ihm nachahmten. Die Wissenschaft hatte eben damals ihr letztes Wort noch nicht gesprochen, und das Gleiche erhoffen wir, in Wiederholung einer oben geäusserten Erwartung, von Herrn Grube.

Cantor.

Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica di Gino Loria, prof. di Geometria superiore nell' Università di Genova. Torino 1887, Ermanno Loescher. 52 pag.

Durch einen zusammenfassenden Rückblick auf den von den Geometern der letzten 100 Jahre zurückgelegten Weg den Anfängern in der Wissenschaft die Orientirung zu erleichtern, die Geübten darauf aufmerksam zu machen, wo etwa neue Forschung anzusetzen habe, um dringenden Bedürfnissen Befriedigung zu verleihen: das ist die Aufgabe, welche Herr Gino Loria sich gestellt hat. Es war, wie Jeder fühlt, der nur einigermassen den Zustand der Geometrie am Ende des XVIII. Jahrhunderts kennt und die unsere heutigen Zeitschriften füllenden Abhandlungen in Vergleich zieht, eine überaus schwierige Aufgabe, nur für Den lösbar, der das ganze der Besprechung zu unterziehende Gebiet inhaltlich beherrscht, und wieviele auch unserer hervorragenderen Mathematiker können sich dieser Eigenschaft rühmen? Hat doch die Arbeitstheilung innerhalb der Mathematik so sehr zugenommen, dass Geometer und Analytiker nahezu als Vertreter zweier verschiedener Wissenschaften zu gelten haben. Herr Loria gehört unbedingt zur ersteren Classe, in welcher er eine hervorragende Stellung einnimmt. Er war also vollberechtigt, an jene Aufgabe sich zu wagen, und die Weise, in welcher er sie gelöst hat, zeigt, dass mit der Berechtigung die Befähigung Hand in Hand ging. Eine Geschichte der Geometrie soll kein Lehrbuch der Geometrie sein, aber sie soll den Leser mit der allmäligen Entwickelung der Raumlehre bekannt machen, ihm überall die Quellen kundgeben, aus welchen er sich thatsächliche Belehrung schöpfen kann. Beides leistet die uns vorliegende Schrift in weit vortrefflicherer Weise, als der bescheidene Verfasser es Wort haben will.

CANTOR.

Analytische Mechanik von J. L. LAGRANGE. Deutsch herausgegeben von Dr. H. SERVUS. Berlin 1887, Verlag von Julius Springer. XXXI, 640 S.

In den Jahren 1736 bis 1742 gab Euler seine Mechanik heraus. Ein halbes Jahrhundert später erschien (1788) Lagrange's Analytische Mechanik, von welcher 1811 bis 1815 eine zweite, fast zur Unkenntlichkeit veränderte und erweiterte Ausgabe die Presse verliess. Der Verfasser selbst war während des Druckes gestorben, aber geistig ihm nahestehende Freunde konnten, den Nachlass benutzend, die letzte Hälfte des II. Bandes muthmasslich in seinem Sinne ergänzen. Diese zweite Auflage hat Herr Servus neuerdings übersetzt. Dass in der That Lagrange's Mechanik, das zweite Werk überhaupt, welches diesen Namen eigentlich verdient hat, auch gegenwärtig noch nicht veraltet ist, und dass es somit der Aufnahme unter die bei Springer erscheinenden Uebersetzungen mathematischer Classiker reichlich würdig war, beweist schon die Thatsache, dass in Frankreich selbst Herr Jos. Bertrand 1853—1855 eine dritte Auflage besorgte und mit Anmerkungen versah. Weshalb Herr Servus nicht auch diese Anmerkungen in deutscher Sprache wiedergegeben hat, ob möglicherweise das zwischenvolkliche Verfasserrecht hier im Wege stand, ist uns nicht bekannt. Eine der Uebersetzung vorausgehende Biographie Lagrange's ist wesentlich aus solchen Schriften gezogen, welche 1813 kurz nach dem Tode des grossen Mathematikers erschienen. Ein reichhaltiges Material findet sich aber insbesondere in dem nachgelassenen Werke von Camillo Ugoni, Della letteratura italiana nella seconda metà del secolo XVIII. Vol. II pag. 245 bis 372. Mailand 1856. Auch der Briefwechsel zwischen Euler und Lagrange, über welchen wir Bd. XXIII dieser Zeitschrift (hist.-lit. Abth. S. 1—21) berichtet haben, enthält Wichtiges. Beispielsweise hätte unserem genannten Berichte (S. 9—10) entnommen werden können, dass ein erster Entwurf von Lagrange's Mechanik am 19. Mai 1756 begonnen, am 24. November 1759 bereits vollendet war, sowie (S. 12), dass Lagrange damals die Mechanik auf die Variationsrechnung, genauer gesagt, auf das Princip der kleinsten Action gründete. Es ist bekannt, dass in der 2. Auflage der analytischen Mechanik das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als Grundlage gewählt ist.

Cantor.

Abhandlungen aus der reinen Mathematik von N. Vandermonde, in deutscher Sprache herausgegeben von Carl Itzigsohn. Berlin 1888, bei Julius Springer. 104 S.

Wenn ein Gelehrter wie Herr Kronecker, dem die moderne Algebra so Vieles verdankt, die Abhandlung Vandermonde's aus dem Jahre 1770, mit deren Uebersetzung auf S. 1—64 das uns vorliegende Bändchen beginnt, als diejenige bezeichnet, von welcher an der neue Aufschwung der Algebra datirt werden darf, wenn er in dieser Abhandlung Tiefe der Auffassung und Klarheit der Darstellung gleich staunenswerth fand, so ist damit genügend erklärt, wie man dazu kam, auch diese Abhandlung den zu übersetzenden mathematischen Klassikern zuzurechnen. Neben ihr erscheint S. 85—104 Vandermonde's Abhandlung über Elimination von 1771. Als Vandermonde sie der französischen Akademie der Wissenschaften vorlegte, war freilich Cramer's Introduction à l'analyse des courbes algébriques und in diesem Bande die Auflösung von n Gleichungen I. Grades mit ebenso vielen Unbekannten schon seit 21 Jahren gedruckt, auch Bézout's Abhandlung von 1764 war vorhergegangen, aber eine eigenthümliche Bezeichnung der der Wissenschaft nunmehr angehörenden Determinanten gab es noch nicht. Diese schufen erst Vandermonde und Laplace in voneinander unabhängigen Abhandlungen. Darin liegt die grosse geschichtliche Bedeutung dieses nunmehr übersetzten Aufsatzes. Auch ein dritter Aufsatz von 1772: Ueber irrationale Grössen verschiedener Ordnung, fand Aufnahme S. 67—81. Es ist diejenige Arbeit, welche in den Facultätenuntersuchungen die Bahn eröffnete, und welche von Herrn Weierstrass in seiner für's Erste den Gegenstand abschliessenden Abhandlung (Crelle's Journal Bd. LI und Abhandlungen aus der Functionentheorie S. 185 flgg.) kritisch gewürdigt worden ist.

Cantor.

Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1).\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

von Carl Friedrich Gauss. Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt von Dr. Heinrich Simon. Berlin 1888, Verlag von Julius Springer. V, 86 S.

Als Referent im XXXI. Bande dieser Zeitschrift, hist.-lit. Abth. S. 173 bis 174, über das Erscheinen der Uebersetzung von Cauchy's Analyse algébrique berichtete, welcher eine Uebersetzung der Euler'schen Introductio u. s. w. vorausgegangen war, erlaubte er sich die Bemerkung: zwischen beide Werke falle der Entstehungszeit nach die Gauss'sche Abhandlung „Disquisitiones generales circa seriem etc.“, welche von nicht minder epochemachender Bedeutung gewesen und doch noch immer nicht so gekannt sei, als sie es verdiene. Wir meinten damit natürlich ihren Wortlaut, nicht ihren wissenschaftlichen Inhalt, der als Gemeingut, ebenso wie die Ergebnisse Euler'scher und Cauchy'scher Forschung, in neuere Werke übergegangen ist. Unsere damalige Bemerkung fiel auf fruchtbaren Boden. Dr. Heinrich Simon unterzog sich der Mühe, die Abhandlung selbst und naturgemäss auch deren im Gauss'schen Nachlasse gefundene, insbesondere die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe betreffende Fortsetzung zu verdeutschen und Herr Julius Springer übernahm es, auch diese Uebersetzung zu verlegen. Möge der buchhändlerische Erfolg bestätigen, dass der damals von uns ausgesprochene Wunsch von recht vielen Fachgenossen getheilt wird. Als besonderen Vorzug der Uebersetzung können wir hervorheben, dass Herr Simon bei seiner Arbeit eine nicht unbedeutende Anzahl sinnentstellender Druckfehler des Originals erkannt und verbessert hat. (Vergl. diese Zeitschrift Bd. XXXII, hist.-lit. Abth. S. 99—101.)

Cantor.

A Textbook of Algebra by W. Steadman Aldis, M. A., University College, Auckland, New Zealand. Oxford at the Clarendon Press. 1887. XIII, 588 pag.

Referent erinnert sich sehr gut, und wer unserer Leser innerhalb der ersten 40 Jahre des Jahrhunderts geboren ist, dürfte ähnliche Erinnerungen theilen, mit welcher aus Grausen und Vergnügen gemischten Spannung er die Reisebeschreibungen des Capitains Cook verschlang, der 1766—1776

Neuseeland erforschte. Eine Bevölkerung, bereit, den aufdringlichen Fremdling mit Haut und Haaren zu verspeisen! Wie das fesselte! Und heute geht von der gleichen Insel ein Lehrbuch für Buchstabenrechnung aus, geschrieben für dortige Studirende, welche, wenn sie ihr Buch mit manchem europäischen vergleichen, vielleicht Seume's Worte sprechen möchten: Seht, wir Wilde sind doch bessere Menschen! Zur Würdigung des von Herrn Aldis herausgegebenen Werkes darf man selbstredend nie ausser Augen lassen, dass es ein Schulbuch ist, wenn auch ein solches, das bis zu den Grenzen der in deutschen Mittelschulen höchstens abgehandelten Gegenstände führt. Elementare Reihenlehre, Anfänge der Zahlenthorie, der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind noch aufgenommen und stellen an den Lehrer, der diese Capitel mit seinen Schülern durchgehen will, die Anforderung, auch in höheren Gebieten sich zu Hause zu fühlen, so oft ist in zwischengeworfenen Bemerkungen Gelegenheit zu Ausblicken nach jenen höheren Gebieten eröffnet. Auch in den Capiteln, welche den Anfangsgründen gewidmet sind, verräth sich ein durchaus wissenschaftlicher Geist. Die Ausdrücke: Commutativität, Distributivität u. s. w., die bei den ersten Operationen erklärt werden; Determinanten und Discriminanten, welche in der Gleichungslehre durchweg Anwendung finden; geometrische Erörterungen, welche, im ganzen Werke an den verschiedensten Stellen auftretend, nie den Beweis eines arithmetischen Satzes zu führen, sondern ihn zu illustriren bestimmt sind; überhaupt ein Bestreben, dem Schüler klar zu machen, dass manche eingeführten Begriffe nicht an sich nothwendig, sondern zunächst rein willkürlich sind und dass nur folgerichtiges Weiterschliessen in einer verwandten Form bezweckt wird: das sind einige der Vorzüge, welche wir dem sehr empfehlenswerthen Lehrbuche nachrühmen möchten, und zu welchen eine geradezu vorzüglich ausgewählte Aufgabensammlung hinzukommt. Dass die Ausstattung Nichts zu wünschen übrig lässt, ist bei englischen Werken fast selbstverständlich.

Cantor.

Bibliographie

vom 1. August bis 15. September 1888.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Aus dem Jahre 1887. Berlin, G. Reimer. 20 Mk.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. Aus dem Jahre 1887. Ebendas. 13 Mk.

Abhandlungen des königl. preuss. meteorologischen Instituts. 1. Bd. Nr. 1. Berlin, Asher & Comp. 2 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturwissenschaftl. Classe, Abth. II. 97. Bd., 3. u. 4. Heft. Wien, Tempky. 9 Mk. 40 Pf.

Denkschriften der kaiserl. österr. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturwissenschaftl. Cl. 54. Bd. Ebendas. 36 Mk. 80 Pf.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begr. v. Ohrtmann, fortges. v. M. Henoch u. E. Lampe. 17. Jahrg. 1885, Heft 3. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1882, dargestellt von der physikal. Gesellschaft in Berlin. 2. u. 3. Abth. Ebendas. 31 Mk.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Bayern, 1888. Herausgeg. v. d. königl. meteorolog. Centralstation. München, Ackermann. 18 Mk.

——, Württemberg, 1887. Herausgeg. v. d. königl. meteorolog. Centralstation. Stuttgart, Metzler. 2 Mk.

Geschichte der Mathematik.

Unger, F., Die Methodik der praktischen Arithmetik vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart, nach den Originalquellen bearbeitet. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Reine Mathematik.

Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. 1. Abschn. Unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet. Leipzig, Teubner. 18 Mk.

Servus, H., Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra für Gymnasien und Realgymnasien. 1. u. 2. Heft. Ebendas. à 60 Pf.

Stadthagen, H., Ueber die Genauigkeit logarithmischer Berechnungen. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Knoblauch, J., Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Reeb, W., Leitfaden für den Unterricht in der ebenen Geometrie. Giessen, Roth. 1 Mk.

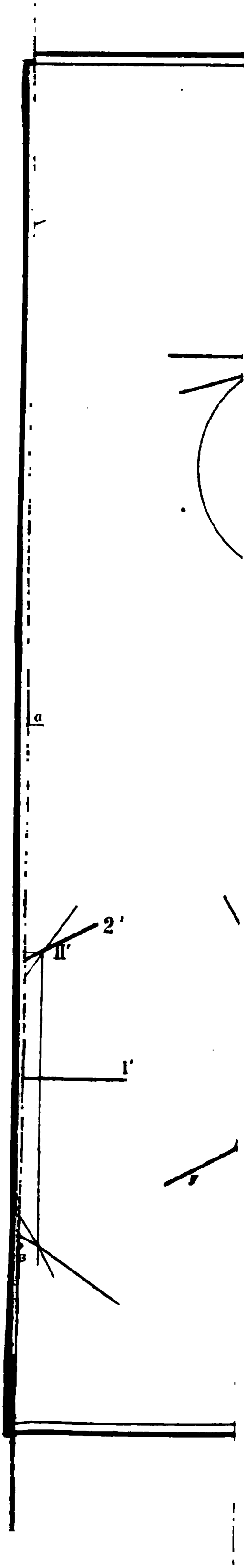
Angewandte Mathematik.

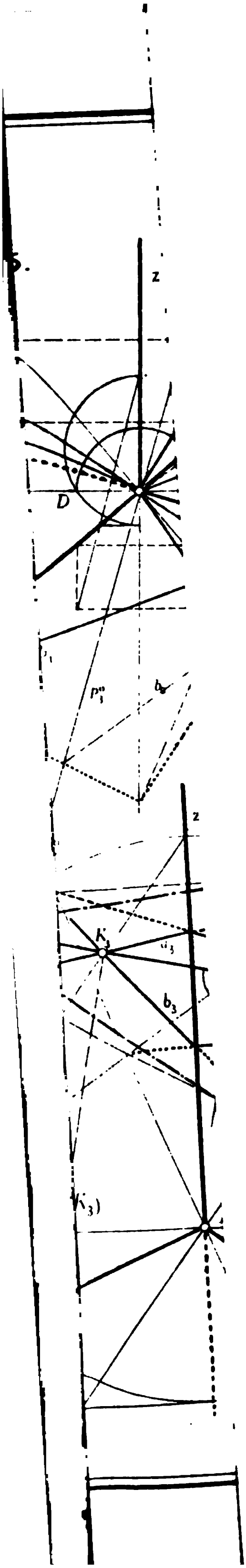
Encke, F., Gesammelte Abhandlungen. 2. Bd., Methode der kleinsten Quadrate. Berlin, Dümmler. 8 Mk.

Mahler, E., Chronologische Tabellen nebst Anleitung zu den Grundzügen der Chronologie. 1. Heft: Die ägypt., alexandrin., seleucid. u. griech. Zeitrechnung. Wien, Fanto. 3 Mk.

Physik und Meteorologie.

Buszczynski, B., Ueber die Beobachtungen der oberen Wolken und deren Zusammenhang mit Wetterprognosen; unter Rücksicht auf vierjährige Beobachtungen der Sternwarte zu Breslau. Halle, Schmidt. 60 Pf.


a
2'
II'
1'


z
D
z
K_3
b_3

Historisch-literarische Abtheilung.

Recensionen.

J. Hann, **Atlas der Meteorologie.** (Berghaus' Physikalischer Atlas, Abtheilung III.) 12 colorirte Karten in Kupferstich, mit 61 Darstellungen. Gotha, Justus Perthes. 1887.

Wer noch vor einigen Jahren lernend in die Meteorologie eindringen wollte oder als Lehrer sich vor die Aufgabe gestellt sah, diese Wissenschaft mit einem mehr oder minder ins Einzelne eindringenden Blicke übersehen zu sollen, der musste gestehen, dass ein ausgesprochener Mangel an Handbüchern und kartographischen Darstellungen bestand, welche dem Schüler wie dem Lehrer ihre Aufgabe hätten erleichtern können. Man hatte ja manches Gute, wenigstens an Handbüchern, ich erinnere nur an die Materialien, die sich in Dove, Kämtz, Schmidt vorfinden; allein der Standpunkt dieser älteren Lehrbücher und Sammelwerke liess sich doch oft nur sehr schwer mit den Resultaten der so rasch fortschreitenden Einzelforschung in Verbindung setzen. Von kartographischen Darstellungen, die nur einigermassen auf der Höhe der Zeit waren, hatte man ausser den in einem sehr kleinen Maassstabe ausgeführten Karten Mohn's eigentlich Nichts, wenn man nicht die Möglichkeit besass, die Einzelpublicationen zu verfolgen. In rascher Aufeinanderfolge brachten nun die letzten Jahre uns eine Reihe von meteorologischen Handbüchern, von denen auf das Gebiet der Klimatologie selbst wieder die zwei, in gewissem Sinne sich ergänzenden Werke „Hann, Handbuch der Klimatologie" und „Woeikof, Die Klimate der Erde" entfallen. In Bälde ist noch von der Hand des Altmeisters Buys-Ballot ein umfassendes Sammelwerk zu erwarten, welches von vielen Seiten freudige Aufnahme finden wird. Was aber bisher noch fehlte, war ein klimatologischer Atlas, freilich eine Riesenaufgabe, deren Lösung mit den höchsten Schwierigkeiten zu kämpfen hatte. Vor uns liegt nun Hann's Atlas der Meteorologie, welcher wohl alle Forderungen erfüllt, die man bei den rastlosen Fortschritten einer modernen Wissenschaft stellen kann.

In zwölf Blättern, welche 59 Karten und zwei Diagramme enthalten, werden uns die wichtigsten Ergebnisse der meteorologischen Forschung nach dem möglichst neuen Standpunkt vorgeführt. Dem Atlas geht ein begleitender Text voran, der auf alle Einzeldarstellungen unter Berücksichtigung der Bedeutung der verschiedenen Blätter eingeht. Hierin liegt ein enormer Vorzug dieser Publication. Denn diese erläuternden Worte geben nicht blos eine klare Einsicht in die Construction und Zuverlässigkeit der einzelnen Karten, sondern sie lassen auch ersehen, welche Ansicht der Autor über die einzelnen Theile seiner Schöpfung hat, bezw. über das fremde Material, auf welches er sich, abgesehen von den Sammelfrüchten seiner eigenen sorgfältigen Forschung, stützt.

Das Erste, womit uns Hann entgegentritt, sind die Isothermen, bezw. im Texte die Erläuterung der Construction derselben. Dieselben sind durchgehends auf das Meeresniveau reducirt, eine Operation, deren Nothwendigkeit Hann ebenso klar darlegt, wie ihre Bedeutung für die praktische Verwendung. Hierbei ist für alle klimatischen Gebiete und die verschiedenen Jahreszeiten durchaus das gleiche, einheitliche Maass für die Reduction, nämlich 0,5° für 100 m eingeführt. Der Autor musste sich natürlich darauf beschränken, Thalstationen zur Grundlage seiner Isothermen zu machen. Auf einem grossen Theile der Erdoberfläche sind die Beobachtungen noch so wenig zahlreich, dass man dort zu Interpolationen seine Zuflucht zu nehmen gezwungen ist. Hierbei sind hauptsächlich jene Erfahrungssätze massgebend, die wir betreffs der Unterschiede der Temperatur über Festland und Meer unter Berücksichtigung der geographischen Breite und des Einflusses der Jahreszeiten schon besitzen. Neben Forbes ist ja besonders Hann in der Untersuchung dieser Frage hervorragend thätig gewesen und sind die einschlägigen Principien in dem oben citirten Handbuche der Klimatologie in vorzüglicher Weise auseinandergesetzt, worauf wir hier ganz besonders verweisen möchten.

In einem Punkte, der ja wohl auch weitere Kreise berührt, welchen durch ihren Lehrberuf die Frage nach den Fortschritten der physikalischen Geographie nahe gelegt ist, spricht Hann eine Ansicht aus, bezüglich welcher ich ihm auf das Entschiedenste beistimmen möchte. Die Karten dieses Atlanten sind nämlich aus Specialkarten zusammengesetzt, in denen zuerst für einzelne Theile der Erdoberfläche die kartographischen Darstellungen der meteorologischen Elemente durchgeführt wurde. „Es muss“, wie Hann im Vorwort sagt, „als ein wissenschaftliches Desideratum ersten Ranges hingestellt werden, dass derartige Karten in einem Maassstabe entworfen und veröffentlicht werden, welcher gestattet, das vorhandene Material von brauchbaren Temperaturbeobachtungen darauf einzutragen.“ Selbstverständlich gilt das Gleiche wie für die Temperatur auch für die anderen meteorologischen Elemente. Ich möchte glauben, dass die Herausgabe einer grossen stummen Weltkarte nach Merkator's Projection in einzelnen handlichen Blättern, zu denen noch eine Polarkarte treten müsste, in Fachkreisen sicher mit Freuden begrüsst würde. Freilich müsste die Karte, zumal in der Eintheilung des Gradnetzes und in der Darstellung der wichtigsten Contouren, die nöthige Genauigkeit besitzen und über dem Standpunkte einer nur schematischen Schulwandkarte stehen. Doch dies nur hier nebenbei.

Die Darstellungen der Isothermen füllen die fünf ersten Blätter aus. Die Jahresisothermen, welche von den Jahresisanomalen, den Linien gleicher jährlicher Wärmeschwankung, und den Isothermen um den Nordpol auf kleinen Nebenkärtchen begleitet sind, werden in Blatt I geboten. Das nächste Blatt bringt die Januarisothermen mit den Cartons der Winterisothermen um den Nordpol, der Januarisanomalen, sowie ferner der Januarisothermen im aussertropischen Südamerika. Hierauf folgen im dritten Blatte die Juliisothermen auf der Hauptkarte, zu welchen nebenbei die Juliisanomalen, die Juliisothermen um den Nordpol und die Maiisothermen von Indien gegeben sind. Blatt IV ist speciell den Wärmeverhältnissen von Europa gewidmet und bringt dessen Januar-, Juli- und Jahresisothermen, sowie die Wanderung der Isothermen im Frühling nach Hildebrandsson. In ähnlicher Weise beschäftigt sich das fünfte Blatt mit Nordamerika, wobei wieder Januar-, Juli- und Jahresisothermen zur Darstellung gebracht sind. Für die östlicheren Staaten von Nordamerika sind die Januarisothermen in etwas grösserem Maassstabe noch wiederholt und auf dieser Karte auch die mittleren Jahresminima zum Vergleiche eingezeichnet. (In New-Orleans in der Breite von Kairo sinkt die Temperatur durchschnittlich wenigstens einmal im Jahre noch bis -5^{0}, in der Breite von Neapel noch unter -25^{0}!)

Hann's Isothermenkarten bringen uns ausser kleineren Abweichungen von früheren Karten auch noch eine Reihe von ganz neuen Darstellungen. Besonders wird der Wärmeüberschuss, welcher auf der südlichen Halbkugel dem Innern der Continente gegenüber den Meeresflächen eigen ist, schärfer als früher hervorgehoben. Aehnlichen Verhältnissen begegnen wir auch im westlichen Nordamerika. Umgekehrt erfahren auch die Isothermen in Sibirien manche Aenderung. Bei der Ausdehnung des dortigen Gebietes gegenüber der relativ geringen Zahl von Beobachtungspunkten müssen freilich die Isothermen noch häufig einen schematischen Charakter tragen, und werden dieselben in verhältnissmässig kurzer Zeit noch Umgestaltungen, beziehungsweise kleine Verschiebungen aufzuweisen haben. So zeigt uns Hann selbst, dass in der Zeit zwischen der ersten Drucklegung und der letzten redactionellen Ueberarbeitung der Karten infolge der inzwischen verarbeiteten Beobachtungen der Polarstation Sagastyr jene Kälteinsel, welche auf der Hauptkarte der Januarisothermen noch bei Werchojansk eingezeichnet ist, verschwinden muss, ein Resultat, das jedoch auf dem Nebenkärtchen der Winterisothermen um den Nordpol noch berücksichtigt werden konnte.

Bezüglich der Isothermen konnte sich Hann zwar in vielen Punkten an manche treffliche Vorarbeit anlehnen, doch ist ein grosser Theil sein eigener, völlig neuer Entwurf, zumal für Südafrika und Australien. Dieses hohe Verdienst besteht aber in noch ausgedehnterem Grade bezüglich seiner Darstellung der Luftdruckvertheilung. Für die Reduction des Luftdrucks auf Meeresniveau giebt Hann eine leichtverständliche Regel, welche ohne logarithmische Rechnung durchführbar ist und wohl auch in den unserer Fachwissenschaft ferner stehenden Kreisen bekannt zu werden verdient. Bei sämmtlichen Isobaren ist auch die Schwerecorrection berücksichtigt. Bezüglich der Bedeutung derselben, sowie des Grades der Sicherheit, den unsere heutige Kenntniss der mittleren Luftdruckvertheilung auf der Erde beanspruchen darf, möge auf die begleitenden Worte Hann's selbst verwiesen sein.* Auf drei Weltkarten finden wir die Isobaren für das Jahr und die extremen Monate Januar und Juli zur Darstellung gebracht. Auch hier sind manche bedeutende Aenderungen gegen frühere Arbeiten zu bemerken, welche theils auf der Erweiterung des Materials, theils auf der richtigen Verwerthung der Temperatur bei der Reduction auf das Meeresniveau beruhen. Letzterer Umstand veranlasste z. B. Hann, keine so ausserordentlich hohen Luftdruckwerthe der Januaranticyclone in Sibirien beizulegen, wie dies Wild und Stelling gethan haben. Aehnliche Ueberlegungen führten auch umgekehrt dazu, Tiefe und Ausdehnung der Barometerminima in den äquatorealen Regionen zu verringern. Neu ist unter Anderem ferner das Vorhandensein eines Luftdruckmaximums über dem nordeuropäischen und asiatischen Eismeere im Juli und das Hineingreifen eines barometrischen Maximums vom atlantischen Ocean in das Innere Nordamerikas, welches zu wichtigen klimatographischen Erläuterungen Anlass giebt. Die drei Hauptkarten sind wieder von kleinen Cartons begleitet. Wir finden an den entsprechenden Stellen zunächst in etwas grösserem Maassstabe die Jahres-, Januar- und Juliisobaren von Europa und die Isobaren von Januar und Juli für die Region um den Nordpol. Ferner die mittlere Tiefe der barometrischen Minima über Europa und den nächsten Theilen des Atlantik nach van Bebber, Vertheilung der mittleren täglichen Barometerschwankung auf der Erde nach Buchan und der mittleren monatlichen Barometerschwankung im Sommer und Winter, hauptsächlich nach Köppen.

Blatt IX und X zeigen so recht deutlich, wie Klimatologie und synoptische Meteorologie im engeren Sinne Hand in Hand gehen müssen. Auf dem ersten der beiden Blätter sind zwei extreme Wintermonate in Europa — December 1879 ausserordentlich kalt, December 1880 bedeutend zu warm — in der Weise zur Darstellung gebracht, dass sich immer Temperatur- und Luftdruckvertheilung gegenüberstehen. Wir finden im ersten Falle die Ausbildung eines continentalen Klimas über Centraleuropa, während im zweiten maritime oder wenigstens bedeutend gemässigte Witterungsverhältnisse bis weit in das Innere des Continents eindringen. Nebenher möchten wir unsere Leser darauf aufmerksam machen, wie die iberische Halbinsel selbst als ein kleiner Continent auftritt und wie sich dies dort wieder eben-

* Vergl. auch Hann, Beiträge zur Kenntniss der Vertheilung des Luftdrucks auf der Erdoberfläche. Meteorologische Zeitschrift 1886, S. 97.

sowohl in der Vertheilung der Temperatur, als des Luftdrucks geltend macht. Ganz besonders möge hier auf den begleitenden Text und die dortselbst citirte Literatur aufmerksam gemacht sein.

Noch mehr als das vorhergehende Blatt, dient das zehnte zur Illustration synoptischer Studien. Eine gewisse Schwierigkeit lag hier in dem Zwange, aus der grossen Zahl der synoptischen Karten besonders charakteristische hervorzuheben. Hann hat diese Wahl mit feinem Gefühl getroffen und besonders solche Einzelfälle von Wettertypen herausgegriffen, welche vorzugsweise geographisches Interesse haben, in dieser Hinsicht aber noch nicht verwendet sind. Einer der wichtigsten Cartons dieses Blattes bringt eine Reproduction der Köppen'schen Karte der Häufigkeit und der mittleren Zugstrassen der barometrischen Minima in dem Gebiete zwischen den Rocky Mountains und dem Ural. Diese Karte gehört entschieden mit zu den wichtigsten Publicationen, die in den letzten Jahren auf dem Gebiete der Meteorologie erschienen sind. Gewissermassen an das vorhergehende Blatt anschliessend, giebt der erste Carton in der linken oberen Ecke die Situation, durch welche die Junikälte 1884 in Europa bedingt wurde. Bezüglich der weiteren Erläuterung müssen wir hier auf den Text verweisen. Die typische Form eines nordatlantischen Minimums ist durch die Wetterkarte vom 11. Januar 1885 gegeben, in welcher auch die Bahn eingezeichnet ist, welche dieses Minimum in den Tagen vom 10. bis 15. Januar durchlief und welche von den typischen Zugstrassen, wie sie Köppen's Karte zeigt, durch ihre Zickzackform abweicht. Auch sehen wir aus dieser Karte sehr deutlich die spiralenförmigen Bahnen, auf welchen bei cyclonaler Strömung die Luft dem Centrum der Depression zustrebt. Scirocco und Staubfall im adriatischen Meere sind durch die Kärtchen vom 23. bis 26. Februar 1879 illustrirt. In dem begleitenden Text weist Hann auch noch auf die Situation vom 15. October 1885 hin, wo gleichfalls Scirocco und Staubfall eintraten. Die Situation war an jenem Tage noch doppelt merkwürdig, da gleichzeitig am Nordabhang der Alpen durch eine räumlich sehr beschränkte Theildepression einer der verheerendsten Föhnstürme dieses Jahrhunderts entfesselt wurde.* Der 19. Januar 1885 gab Gelegenheit zur Darstellung eines heftigen Borasturmes in Dalmatien, während der Föhn auf der Nordseite der Alpen vom 31. Januar 1885 durch zwei Karten erläutert ist. Bekanntlich treten auf der Südseite der Alpen, wenn auch meist in schwächerem Maassstabe, ebenfalls Föhnerscheinungen als Nordföhn auf. Das Kärtchen für den 5. October 1884 giebt die für Nordföhn charakteristische Druckvertheilung und zugleich die normale Luftbewegung in der Umgebung eines Barometermaximums, welche im Gegensatz zur cyclonalen als anticyclonale

* Vergl. Erk, Der Föhnsturm vom 15. und 16. October 1885 und seine Wirkungen im bayerischen Gebirge. Meteorolog. Zeitschr. 1886, S. 24.

bezeichnet wird. Die letzten beiden Blätter beschäftigen sich mit den Regenverhältnissen. Eine Niederschlagskarte für die ganze Erde muss allerdings bei dem heutigen Stande unseres Wissens sich in vielen Theilen mit einer schematischen Darstellung begnügen. Von den Oceanen fehlen quantitative Niederschlagsbestimmungen noch fast gänzlich und auch auf den Continenten ist der Raum, von dem zuverlässige Regenmessungen in einem nicht allzu weitmaschigen Netze vorliegen, ein höchst beschränkter. Da es aber dennoch sehr wünschenswerth schien, in dem vorliegenden Atlas diese Karte zu besitzen, so reproducirt Hann wenigstens den in seiner Allgemeinheit am besten gelungenen Entwurf einer Regenkarte der Erde nach Loomis. Eine werthvolle Beigabe sind die drei Cartons, welche die Regenvertheilung in den nach dieser Richtung hin am besten erforschten Theilen der Erde zeigen. Es sind dies die vereinigten Staaten Nordamerikas, die westlichen Theile Europas und Indien. Da diese Karten im gleichen Maassstabe gezeichnet sind, lassen sie in auffälliger Weise die geringe Ausdehnung der Gebiete mit sehr starkem Regenfall in Europa gegenüber den tropischen Verhältnissen ersehen. Kleine Cartons illustriren noch die Regenverhältnisse von Jamaica, Mauritius und Neuseeland. Der einschlägige Text enthält höchst interessante Zahlenangaben von extremen Regenmengen.

Das letzte Blatt, welches Professor Dr. Köppen in Hamburg bearbeitet hat, beschäftigt sich mit der zeitlichen Vertheilung der Niederschläge. Für den Fachmann dürfte dies eines der interessantesten Blätter sein, während für weitere Kreise das Verständniss desselben etwas zu schwer sein mag, zumal die Deutlichkeit auf Kosten der Reichhaltigkeit gelitten hat. Die Legende, sowie die beigegebenen Curven erläutern zwar Vieles, doch wäre zumal für den Fernerstehenden eine weitere Ausdehnung des Textes wünschenswerth gewesen. Die beiden Nebenkarten, jährliche Periode der Regenhäufigkeit und Zeit des jährlichen Maximums der Regenmenge in Europa, sind sofort verständlich. Die beiden Bewölkungskarten nach Teisserenc de Bort sind jedoch zu klein und undeutlich ausgefallen.

Wer von unseren Lesern die Möglichkeit hat, die alte Auflage des physikalischen Atlas von Berghaus mit dieser neuen Herausgabe vergleichen zu können, dem möchten wir dies auf das Angelegentlichste empfehlen. Es ist von hohem culturhistorischen Interesse, zu sehen, wie sich in den 50 Jahren zwischen den beiden Auflagen unser Wissen erweitert hat und wie verschieden nach ihrem Inhalt und selbst in der Darstellungsweise die Karten hier und dort sind.

Die Gesammtausstattung des ganzen Atlas ist eine vorzügliche und wir können Herrn Professor Berghaus für die technische Redaction, sowie Herrn Perthes als Verleger nur Glück wünschen zur Herausgabe eines Werkes, welches als ein Meisterstück deutscher Kartographie vor uns liegt.

Fritz Erk.

Dr. CARL ISRAEL-HOLTZWART (Oberl. a. d. Musterschule zu Frankfurt a. M.):

I. **Elemente der sphärischen Astronomie**, für Studirende bearbeitet (88 S., 26 Figuren im Text, 1 Figurentafel). Wiesbaden, Bergmann'sche Verlagsbuchhandlung. 1882.

Iª. **Nachträge zu I.** (41 S., 6 Figuren, 9 Tabellen.) 1885.

II. **Elemente der theoretischen Astronomie.** 1885. 1. Abtheilung: Theorie der elliptischen Bewegung und Bahnbestimmung (184 S., 35 Figuren, davon 3 im Anhang; eine grössere Tabelle am Schluss). 2. Abtheilung: Berechnung der Finsternisse, Meteorbahnen, Stellar-Astronomie (168 S., 69 Figuren).

III. **Elemente der Astromechanik.** Störungstheorie; Theorie der Schwere auf der Oberfläche rotirender Sphäroide. Historische Uebersicht der Astronomie. (220 S., 24 Figuren.) 1886.

IV. **Supplemente zu I, II und III.** Theorie der Anziehung der Sphäroide. (96 S., 17 Figuren.) 1887.

Die Tendenz der vorstehenden Lehrbücher, deren jedes für sich (Iª und IV ausgenommen) ein Ganzes bildet, die aber doch in ihrer Gesammtheit als ein Compendium der theoretischen Astronomie gelten können, ist es, dem angehenden Studirenden der Astronomie, sowie Jedem, der bei genügenden mathematischen Vorkenntnissen tiefer in diese Wissenschaft eindringen will, einen Ueberblick über die wesentlichsten Theorien und Probleme derselben zu bieten und zugleich ein zu weiteren und eingehenderen Studien befähigendes Verständniss zu vermitteln; mit der astronomischen Praxis aber befassen sich dieselben in keiner Weise. Da es bisher an einer solchen, auf mathematischer Grundlage beruhenden Propädeutik dieser Wissenschaft fehlte, so muss das Unternehmen des Herrn J. Holtzwart nicht nur als ein dem Bedürfniss eines grossen Leserkreises entsprechendes, sondern auch als ein zeitgemässes anerkannt werden.

Die Ausführungen des Verfassers tragen, soweit Solches bei diesem Lehrgegenstande möglich ist, den Stempel der Selbstständigkeit und Originalität, und mehrfach hat er durch eine eigenthümliche Behandlungsweise oder durch von ihm selbst gefundene neue Methoden die Lösung von Problemen erheblich vereinfacht; so z. B. im 5. Abschnitt von Nr. I (Parallaxenberechnung), im 1. Artikel von Nr. IV und bei der Berechnung der elliptischen Elemente in Nr. II Abth. 1 (S. 147—153). Ob freilich seine Arbeit bei den Astronomen von Fach einerseits, den Vertretern der Elementarmathematik andererseits überall beifällige Aufnahme gefunden habe oder finden werde, muss dahingestellt bleiben; manchem der Ersteren dürfte sie überflüssig, manchem der Letzteren als zu hohe Anforderungen stellend erscheinen. In der That setzt namentlich Nr. III und zum Theil auch Nr. IV bei seinen Lesern eine gewisse Sicherheit in der höheren Analysis und eine nicht unbedeutende Uebung in ihrer Handhabung voraus, wie man sie wenigstens bei angehenden Studirenden schwerlich schon finden wird, während dagegen zum Verständniss von Nr. I und I^a die Kenntnisse eines guten Primaners genügen. Selbst da, wo in Nr. I von den Differentialformeln der sphärischen Dreiecke die Rede ist, wird eine eigentliche Differentiation (die überhaupt nicht früher als auf der vorletzten Seite von I auftritt) umgangen, wird mit endlichen Differenzen operirt. Was Nr. II betrifft, so ist dieser Theil zwar ebenfalls möglichst elementar gehalten, stellt jedoch erheblich höhere Ansprüche, indem die Ausführung der Rechnungen, insbesondere der Zwischenrechnungen, in der Regel dem Leser überlassen bleibt, so z. B. in der Ableitung der Euler-Lambert'schen Formel und dem Olbers'schen Satze. Referent glaubt zwar ebenfalls, dass bei längeren Berechnungen es der Absicht des vorliegenden Werkes am besten entspreche, nur eine Uebersicht über den Gang derselben zu geben, ist jedoch der Meinung, dass in einzelnen Fällen der Verfasser in dieser Hinsicht der mathematischen Leistungsfähigkeit seines Publicums zuviel zugetraut und zugewiesen habe, dass hin und wieder einige Fingerzeige mehr von Vortheil gewesen sein würden. Im Ganzen aber hat er es sich angelegen sein lassen und es wohl verstanden, diejenigen Partien, welche dem Anfänger die meisten Schwierigkeiten entgegenstellen, durch klare und präcise Erörterungen, sowie durch Hinzufügung geeigneter Zahlenbeispiele zu verdeutlichen, so z. B. bei der Besprechung der Methode der kleinsten Quadrate (wo jedoch die Ableitung der Wahrscheinlichkeitsfunction, welche unterblieben ist, kaum schwieriger gewesen sein würde als die mancher Formeln in III und IV), der Theorie der Sonnenfinsternisse und Durchgänge der unteren Planeten und der mathematischen Hilfslehren in Nr. III. Dass letztere der eigentlichen Theorie vorausgehen, kann Referent nicht für zweckmässig halten, weil bei dieser Anordnung die meisten Leser die Hilfssätze zuerst durchnehmen werden (wozu sie — S. 3 Z. 11 in III — ja auch vom Verfasser aufgefordert werden), ehe sie ihren Zusammenhang mit der Theorie kennen; dass dies aber der Uebersicht über letztere nicht förderlich sein kann, ist offenbar. In Nr. II ist die entgegengesetzte — nach des Referenten Ansicht zweckmässigere — Folge eingehalten.

Die Ausstellungen, welche noch zu machen sind, beziehen sich auf kleinere Mängel, die bei einer späteren Auflage leicht gehoben werden können.

Das Streben nach möglichster Kürze des Ausdrucks hat an einzelnen, doch nur wenigen Stellen zu Unklarheiten und Abnormitäten geführt, Letzteres z. B. in Nr. II Abth. 1, S. 38 Z. 18 u. 19, wo es also lautet: „mit Hilfe der bei den Entwickelungen des Lambert'schen Satzes gebrauchten Relationen leicht ableitbaren Gleichungen“ (!).

Ein etwas sparsamerer Gebrauch gewisser Adverbien wäre ferner sehr zu empfehlen; es findet sich z. B. in Nr. I S. 50 u. 51 nicht weit nacheinander: „selbstverständlich, begreiflicher Weise, augenscheinlich“, und S. 58 und 59: „leicht, natürlich, offenbar, bekanntlich, augenscheinlich“. „Konfokalismus" für „Konfokalität", „Aequinox" für „Aequinoctium", „Sinusse" und „Kosinusse" wollen dem Referenten ebenso wenig zusagen, als die zweifache Orthographie: „Differenzierung und Differentierung" oder gar die vierfache: „differenzieren, differenziieren, differentiiren, differentiieren". — In der „historischen Uebersicht" ist Aristarch von Samos insofern nicht genügend gewürdigt, als es unerwähnt geblieben ist, dass er die Erde sich um die Sonne bewegen lässt und überhaupt ein dem Copernicanischen ähnliches Planetensystem aufgestellt hat. Dass Kalif Omar die Alexandrinische Bibliothek zum Einheizen der Bäder benutzt habe, ist als Fabel nachgewiesen. Der Erwähnung werth wäre wohl auch Piazzi's vortreffliches (nicht ganz populäres) Lehrbuch der Astronomie gewesen (im Jahre 1822 erschienen. Uebersetzung von Westphal mit Vorrede von Gauss). Auch Oppolzer's klassisches Lehrbuch der Bahnberechnung (Leipzig bei Engelmann, 1882) ist nicht genannt worden. Ueberhaupt wäre ein ausführlicherer Literaturnachweis namentlich der in neuerer Zeit erschienenen astronomischen Schriften wohl am Orte gewesen. — In I^a ist (S. 29 Z. 4) von einem nullten Vertikal die Rede, welche Bezeichnung eine gar nicht existirende Zählung der Vertikale voraussetzt; der westöstliche Vertikal verdankt vielmehr seine von alters her übliche Bezeichnung als „erster Vertikal" der ungenauen Uebersetzung von „*Verticalis primarius*", womit die Gnomoniker des Mittelalters nur ausdrücken wollten, dass er der vorzüglichste, der geeignetste sei, um in seine Ebene die der Vertikal-Sonnenuhr einzustellen, indem nur dann die Zeichnung auf dem Zifferblatt derselben symmetrisch wird. Für diese Erklärung bürgt keine geringere Autorität als Kepler (in seinem Epitome Astronomiae Copernicanae). — Referent kann endlich auch dem nicht zustimmen, was an einer Stelle der Vorrede zu I^a gesagt ist: es sei ein vergebliches Bemühen, eine Summe von Erkenntnissen, welche, wie die der mathematischen Geographie, des inneren Zusammenhangs entbehrten, systematisch behandeln zu wollen. Ein System freilich, wie das der reinen Mathematik oder der Philosophie wird niemand von einer überwiegend empirischen Wissenschaft erwarten wollen; den inneren Zusammenhang aber der einzelnen Lehren der mathematischen Geographie in Abrede stellen, heisst zugleich auch, sie für ungeeignet zu einem Unterrichtsgegenstande erklären, wenigstens für höhere Schulen. Schon die Existenz so vieler vortrefflicher dem Schulbedürfnisse dienender Lehrbücher dieser Disciplin widerlegt eine solche Ansicht. Der Zusammenhang ist dadurch gegeben, dass die einzelnen Erkenntnisse sich darin vereinigen, die Beziehungen unseres Wohnplaneten zu den anderen Weltkörpern zum Gegenstande zu haben, welche Beziehungen nach verschiedenen Rücksichten in geeigneter Weise zu gruppiren aber die Aufgabe Dessen ist, der hier als Autor auftreten will. Damit soll jedoch keineswegs gesagt sein, dass für die Zwecke des Herrn Verfassers, der für Studirende geschrieben hat, also für Solche, die schon im Besitze der nothwendigsten Vorkenntnisse sind oder doch sein sollten, das von ihm eingehaltene nicht einheitliche und nicht systematische Verfahren ungeeignet sei. Hier war es vielmehr für ihn angezeigt, das Wesentlichste aus dem Gebiete, in welches er seine Leser tiefer einführen will, diesen nacheinander vereinzelt vorzuführen.

Die grosse Zahl der Druckfehler macht keinen erfreulichen Eindruck, zumal da ausser den berichtigten noch eine ganze Anzahl von nicht in den Verzeichnissen aufgeführten, sogar zwei in letzteren selbst, stehen geblieben sind. Referent weiss allerdings sehr wohl, dass ein derartiger Uebelstand nicht überall dem Autor selbst zur Last zu legen ist.

Nachfolgend ein Verzeichniss solcher noch nicht berichtigter Fehler, soweit sie dem Referenten aufgefallen sind.

In Nr. I: S. 19 Z. 22 lies Meridianebenen statt Meridianebene; S. 50 Z. 13 l. durchsetzen st. durch setzen; S. 74 Z. 18 fehlt rechts der Factor $\frac{1}{2}$ vor $(q^2-1)\sin^2\varphi_1$; S. 75 Z. 10 l. $\sin^2 66^0 20'$ st. $\sin 66^0 20'$. Auf S. 22 Z. 19 fehlt hinter „s. Fig. 2“ der Hinweis darauf, dass diese Figur die Tafel am Schluss von I einnimmt.

I^a: S. 35 Z. 12 v. u. l. $\cos z$ st. $\sin z$ im Nenner.

II. in Abth. 1: S. 7 Z. 2 v. u. fehlt zu Anfang ♈ vor ☊; S. 28 Z. 5 l. also st. als; S. 51 Z. 7 l. 360 Grad st. 360^0 Grad; S. 72 Z. 6 l. rechts SPB st. SFB. In Abth. 2: S. 75 Z. 12 l. können st. kann; S. 114 Z. 11 v. u. l. Atair st. Altair; S. 146 Z. 10 l. $\frac{d^2x}{dt^2}$ st. $\frac{d^2y}{dt^2}$.

III: S. 7 Z. 2 v. u. l. a^{-1} st. a^-; S. 13 Z. 13 l. $2(a_1^2+a^2)i\mathfrak{A}_i$ st. $2a_1(a_1^2+a^2)i\mathfrak{A}_i$; S. 93 Z. 4 fehlt (α_2) vor „resultieren“; S. 96 Z. 12 l. $\frac{dr_\varepsilon}{dt}$ st. $\frac{dr_2}{dt}$; S. 103 Z. 8 v. u. fehlt das Minuszeichen zwischen $\frac{n^2a^3m_1r_1\sin b_1}{\varrho^3}$ und $\frac{n^2a^2m_1\sin b_1}{r_1^2}$; S. 109 fehlt der Buchstabe K_1 in Fig. 17; S. 118 Z. 1 l. dividiert st. multipliziert; S. 130 Z. 12 l. $L-☊$ st. $L☊$; S. 196 Z. 6 l. $\frac{b^2}{a^2}$ st. $\frac{b^2}{a}$.

IV: S. 13 Z. 5 v. u. fehlt das Komma vor „bezüglich“, wodurch der ganze Passus undeutlich wird; S. 36 Z. 13 v. u. l. $\frac{1}{2\pi}\sqrt{a(1-\varepsilon^2)}\,dt$ st. $\frac{1}{2}\sqrt{\ldots}$, ibid. Z. 2 v. u. l. XY st. $X-Y$; S. 47 Z. 5 l. $(y-y_0)^2$ st. $y-y_0$ im Nenner des Integranden; S. 57 Z. 14 l. Binomialreihe st. Binominalreihe; S. 69 Z. 11 v. u. l. *falsi* st. *falci*.

In den Druckfehlerberichtigungen selbst steht am Schluss von II, Abth. 2 auf S. 221 Z. 9: S. 110 st. S. 111 und zu Anfang von IV auf S. VII $\frac{1}{2}(\varphi^2-1)\sin^2\varphi_1$ und $(\varphi^2-1)\sin^2\varphi_1$ statt bezw. $\frac{1}{2}(q^2-1)\sin^2\varphi_1$ und $(q^2-1)\sin^2\varphi_1$.

Alles dies kann jedoch den Werth des in hohem Grade verdienstlichen Werkes nicht erheblich beeinträchtigen. Dem angehenden Jünger der

Astronomie wird es gerade in seiner Eigenart willkommen und förderlich sein.

Schliesslich noch die Bemerkung, dass der Verleger für eine gute äussere Ausstattung des Werkes bestens gesorgt hat.

Liegnitz, im Juni 1888. Dr. O. Bermann.

Résumé du cours d'analyse infinitésimal de l'université de Gand par P. Mansion, professeur ordinaire à l'université de Gand, docteur spécial en mathématiques, correspondant de l'académie royale de Belgique, de la société royale des sciences de Liège et de la société mathématique d'Amsterdam. Paris 1887. Gauthier-Villars, imprimeur-libraire. VIII, 300 pag.

Das im Drucke uns vorliegende Werk besteht aus drei voneinander scharf getrennten Abtheilungen. Der eigentliche Lehrgang der Infinitesimalanalysis reicht bis S. 192. Dann kommt ein Anhang bis S. 263. Endlich folgen noch 27 Seiten ergänzender Anmerkungen. Will man ein volles Bild des ganzen Buches gewinnen, so muss man die drei Abtheilungen nicht nacheinander, sondern gleichzeitig vornehmen, bald da, bald dort lesen, was den Ueberblick nicht gerade wesentlich erleichtert. Der Grund zu dieser unbequemen Anordnung liegt nun freilich in der Benutzung des Buches während verschiedener Jahre. Im ersten Jahrgange seiner Vorlesungen lässt Herr Mansion, wie wir aus brieflichen Mittheilungen desselben wissen, fast den ganzen Anhang unerörtert, und da mag es dem Schüler willkommen sein, in der Abtheilung, welche wir den eigentlichen Lehrgang genannt haben, nachlesen zu können, ohne überschlagen zu müssen. Aber auch dieser Nothwendigkeit ist er nicht überhoben, da das V. Capitel (S. 13—16) und Theile der folgenden Capitel von Functionen complex veränderlicher Grössen handeln, welche Herr Mansion im ersten Jahre grundsätzlich nicht berührt. Es will uns darum scheinen, als würden in einer zweiten Auflage, welche kaum ausbleiben dürfte, besser alle Dinge in ihrer logischen Reihenfolge gedruckt und nur durch Sternchen bezeichnet — wie man es in anderen Werken gewöhnt ist —, was beim erstmaligen Gebrauch wegbleiben soll. Wir werden bei unserer Besprechung jedenfalls so thun, als wäre diese Einrichtung schon getroffen, und über den ganzen Inhalt berichten, ohne uns darum zu kümmern, wo der betreffende Paragraph gegenwärtig gedruckt ist.

Allerdings setzen wir uns damit in einer Beziehung in eine gewisse Verlegenheit. Gleich im I. Capitel auf S. 2 finden wir einen aus blossen Namen bestehenden geschichtlichen Ueberblick, welchem S. 193—224 des Anhangs und S. 286—291 der Anmerkungen als willkommene Ergänzung dienen. Wird Herr Mansion bei einer Zusammenschmiedung der einzelnen

Abtheilungen den geschichtlichen Ueberblick am Anfange belassen? Wir bezweifeln es. Wir möchten vielmehr hier wirklich zur Beibehaltung der Spaltung rathen. Eine Namensübersicht am Anfang kann dafür sorgen, dass weiterhin vorkommende Verweisungen dem Schüler nicht ganz fremde Persönlichkeiten zu Gehör bringen, während ein geschichtlicher Anhang doch erst am Schlusse verstanden werden kann. Wir halten es für sehr richtig in diesem Anhange, wie Herr Mansion es thut, den Wortlaut der beiden Erfinder Leibniz und Newton nebeneinander zu stellen, der deutlicher als jede Streitschrift deren gegenseitige Unabhängigkeit erkennen lässt, zugleich erkennen lässt, wie weit beide kamen. Mit grossem Interesse lasen wir S. 288, dass Tacquet die Mangelhaftigkeit der Lehre von den Indivisibilien deutlich erkannt und auf die Möglichkeit, sie auszubilden, hingewiesen habe. Diesem Antwerpener Mathematiker pflegt man überhaupt selten ganz gerecht zu sein, während er beispielsweise auch für die Erklärung des sogenannten Rades des Aristoteles durch seine Abhandlung „De circulorum volutionibus“ Namhaftes leistete. Vielleicht beschäftigt sich Herr Mansion in seiner Zeitschrift „Mathesis“ gelegentlich auch einmal mit dieser Abhandlung seines Mitbürgers?

In sehr eingehender Weise behandelt Herr Mansion den Grenzübergang. Deutlicher, als wir es aus ähnlichen Werken in Erinnerung haben, hebt er namentlich hervor, dass A nur dann Grenze von $f(x)$ ist, wenn von einem bestimmten Werthe von x an der Unterschied $A-f(x)$ nicht blos beliebig klein wird, sondern auch beliebig klein bleibt. Man erkennt in solchen Betonungen den gewissenhaften Lehrer, der sich auch um die Irrthümer kümmert, in welchen Schüler verfallen können. Als sehr lehrreiches Beispiel ist die Function $2+\frac{1}{x}+x-2E\left(\frac{x}{2}\right)$ bei wachsendem x gewählt. Sie hat bei ganzzahlig geradem x den Werth $2+\frac{1}{x}$, bei ganzzahlig ungeradem x den Werth $3+\frac{1}{x}$; ihr Unterschied von 2 wird beliebig klein, bleibt es aber nicht, die Function hat folglich nicht die Grenze 2. Die Incommensurabilitäten werden im gleichen Zusammenhange erörtert und zwar in nahe verwandter Betrachtungsweise, wie sie Herr Dedekind eingeführt hat.

Um die Functionen complex veränderlicher Grössen betrachten zu können, setzt Herr Mansion zwar das Addiren und Subtrahiren, das Multipliciren und Dividiren complexer Grössen als bekannt — folglich auch als berechtigt in ihrer Ausübung — voraus, definirt aber alsdann $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ und $e^{y+xi}=e^y.e^{xi}$. Von dieser Definition aus gewinnt er die Ableitung, später die Reihenentwickelung der Functionen allgemeiner Art. Allerdings ist diese Entwickelungsweise einigermassen formal, aber der Strenge entbehrt sie nicht, mit Ausnahme jener Voraussetzungen, welche wir soeben genannt haben.

Die Reihenlehre kann nach den vorangegangenen Entwickelungen in einer Gestalt vorgetragen werden, wie sie dem heutigen Stande der Wissenschaft entspricht. Nicht nur absolute und relative Convergenz werden unterschieden, wie es in jedem neueren Werke der Fall sein dürfte, auch der Begriff gleichmässiger Convergenz ist sehr deutlich auseinandergesetzt und vielfach benutzt. Bei der Multiplication von Reihen vermissen wir allerdings die Benutzung der Pringsheim'schen Arbeiten, welche doch nicht unerheblich über Cauchy und Mertens hinausgehen.

Auch der Stetigkeit der Functionen sind genaue Erörterungen gewidmet, die so weit gehen, dass der Schüler mit der Weierstrass'schen stetigen, aber ableitungslosen Function bekannt gemacht wird.

Es ist fast überflüssig, zu bemerken, dass neben den hier genannten Gegenständen, die nicht in jeder Differentialrechnung vorkommen, auch Alles gelehrt wird, was den regelmässigen Inhalt solcher Schriften bildet. An nicht wenigen Stellen wird man besondere Eigenthümlichkeiten finden, die dem sachkundigen Leser meistens des Beifalls würdig erscheinen dürften. Dahin zählen wir freilich nicht die Abneigung des Verfassers gegen das Jacobi'sche geschwungene ∂ zur Bezeichnung partieller Differentiation, welches zu allgemein verbreitet ist, um dem Schüler vorenthalten zu werden.

Die geringen Aussetzungen, welche wir uns gestatteten, sollen aber keineswegs unseren Lesern den hauptsächlichen Eindruck enthüllen, den das Werk auf uns machte. Dieser war ein durchaus günstiger, und mit gutem Gewissen können wir Herrn Mansion's Résumé du cours d'analyse infinitésimale empfehlen.

Cantor.

Curso de analyse infinitesimal por F. Gomes Teixeira, Director da Academia Polytechnica do Porto, professor na mesma Academia, antiga professor na Universidade de Coimbra, socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa etc. (Calculo Differencial.) Porto 1887. Typographia Occidental. 372 pag.

Wer uns vor wenigen Wochen gesagt hätte, wir würden ein portugiesisches Buch lesen, der wäre von uns einfach ausgelacht worden. Hatten wir doch das sichere Bewusstsein, weder portugiesisch, noch spanisch jemals gelernt zu haben, und weder ein Wörterbuch, noch eine Grammatik jener Sprachen zu besitzen. Da brachte uns die Post das in der Ueberschrift genannte Werk. Der Name des Verfassers war uns aus Zeitschriften in französischer und deutscher Sprache wohlbekannt. Wir versuchten ein oder das andere Wort zu verstehen, und siehe da, wir erkannten, dass die Sprache der Analysis besser als Volapük oder Pasilingua zur Weltsprache sich eignet! Wir lasen — natürlich nur mit den Augen, denn von portugiesischer Aussprache haben wir nach wie vor keine Ahnung — das ganze Buch durch, ohne einer andern Schwierigkeit zu begegnen, als denen, welche leider recht zahlreiche Druckfehler in den mathematischen Formeln uns bereiteten. Daran erkennt man doch, dass die portugiesischen Druckereien weit weniger als die anderer Länder auf mathematischen Satz eingerichtet sein müssen. Mit dieser Erfahrung stimmt die Geschichte der Mathematik überein. Es ist eine historische Thatsache, dass die Pyrenäenhalbinsel selbst in jenen Zeiten, in welchen die Seefahrtkunst dort vor allen anderen Ländern blühte, ausserordentlich arm an Mathematikern war. Der Portugiese Pedro Nuñez, der Spanier Juan de Ortega, beide in der ersten Hälfte des XVI. Jahrhunderts als Schriftsteller thätig, sind allein über die Grenzen ihrer Heimath hinaus bekannt. Wenn es richtig ist, was als Folgerung aus so manchen Einzelereignissen geschlossen werden kann, dass jedes Land irgend einmal eine stärker hervortretende Rolle auf jedem Bildungsgebiete spielt, so wäre das Zeitalter portugiesischer Mathematik noch bevorstehend, und wenn wir das uns zur Besprechung übergebene Werk genauer ansehen, so gelangen wir zu der Ueberzeugung, dass der heutige Zögling der dortigen hohen Schulen genügende Vorbereitung geniesst, um selbst die Wissenschaft fördern zu können. In der That ist das Werk des Herrn Teixeira als jeder neueren Differentialrechnung ebenbürtig zu rühmen. Ausgehend von den nach Dedekind'scher Grenzauffassung entwickelten Irrationalzahlen, an welche sich die Richtungszahlen, negative wie imaginäre, anschliessen, übergehend zu einer Theorie der Reihen, verwendet der Verfasser etwa das erste Viertel seines Bandes auf Dinge, welche gemeiniglich zur algebraischen Analysis gezählt werden. Dann erst geht er zur Differentialrechnung über, welcher nebst geometrischen und analytischen Anwendungen ungefähr die Hälfte des Bandes gewidmet ist. Das letzte Viertel beschäftigt sich mit den Singularitäten, welche bei solchen Functionen reell veränderlicher Grössen auftreten, die durch unendliche Reihen definirt sind, und mit einer kurzgefassten Functionentheorie. Herr Teixeira verweist vielfach auf die Quellen seiner Entwickelungen. Er zeigt bei dieser Gelegenheit eine fast alle mathematischen Zeitschriften aller Sprachen umfassende Belesenheit, und wenn er nicht selten auch Aufsätze erwähnt, welche ihn selbst zum Verfasser haben, so führen wir dieses nur als Beweis dafür an, dass sein Werk an Eigenthümlichkeiten keineswegs arm ist. Wenn wir hier auf eine ganz unbedeutende Kleinigkeit aufmerksam machen wollen, welche wir vermissen, so geschieht dieses nur deshalb, weil wir diese Lücke in allen Differentialrechnungen finden. Die Tangente wird stets ohne Weiteres als diejenige Secante definirt, welche zwei zusammenfallende Curvenpunkte verbindet, ohne zu bedenken, dass der Anfänger dadurch auf den Irrthum gebracht werden kann, jede durch einen vielfachen Punkt einer Curve hindurchgehende Gerade als Tangente zu betrachten. Man sage nicht, ein solches Missverständniss komme nicht vor. Es kann vorkommen und muss von vornherein vermieden werden. Wir unterscheiden deshalb zwischen geradliniger und curvenmässiger Entfernung zweier Curvenpunkte, letztere, wie es die Benennung mit sich bringt, längs der Curve selbst gemessen. Tangente ist alsdann eine Secante durch zwei curvenmässig verschwindend nahe oder mit einem besondern Namen: durch zwei consecutive Curvenpunkte.

Cantor.

Ueber Fusspunktscurven, von dem beauftragten Gymnasiallehrer Dr. Heinrich Georg Leonhard Schotten. Wissenschaftliche Beilage zum Programm des königl. Gymnasiums und Realgymnasiums zu Hersfeld (1887. Progr.-Nr. 367). 21 S. 4°.

Im Jahre 1883 promovirte Herr Schotten in Marburg auf Grund einer geometrischen Abhandlung „Ueber einige bemerkenswerthe Gattungen von Hypocykloiden". Er betrachtete darin die dreieckige und die viereckige Hypocykloide, d. h. die mit drei, beziehungsweise mit vier Rückkehrpunkten, und definirte erstere (nach Steiner) als Enveloppe der Geraden, in welcher die Fusspunkte der Normalen liegen, welche von einem beweglichen Punkte der Kreisperipherie auf die drei Seiten eines festen Sehnendreiecks gefällt werden. Vielleicht von dieser Definition ausgehend, kam der Verfasser dazu, sich mit Fusspunktscurven zu beschäftigen und ihnen eine eigene Programmabhandlung zu widmen. Er erweiterte dabei den Begriff der Fusspunktscurve nach zwei Richtungen: einmal indem er den Ort des Scheitelpunktes eines constanten Winkels suchte, dessen beide Schenkel Tangenten an je eine gegebene Curve bleiben, und zweitens indem er den constanten Winkel als von 90° verschieden annahm. Beide Begriffserweiterungen sind nicht neu. Die erste findet sich in der geradezu hervorragenden Doctordissertation von Herrn Adolf Schumann: „Disquisitiones de curvis pedalibus" (Halle, 27. Juni 1861), die zweite in einer kurzen Notiz von Herrn Weinmeister, Ueber Fusspunktcurven (Zeitschr. Math. Phys. XXVIII, 256). Von beiden Vorgängern hatte aber Herr Schotten sicherlich keine Kenntniss, wie man auch daraus entnehmen kann, dass mit Ausnahme jener Grundbegriffe eigentlich Nichts den hier genannten Abhandlungen gemeinschaftlich ist. Herr Schotten hat dagegen, wie aus mehrfachen Anführungen hervorgeht, die bekannte Magnus'sche Aufgabensammlung eingehend studirt und hat Sätze aus derselben herbeigezogen, die dort in anderem Zusammenhange erscheinend, hier in ein neues Licht treten. Als Basiscurven — so nennt der Verfasser die beiden Curven, welche die Schenkel des gegebenen Winkels berühren sollen — dienen fortwährend Kegelschnitte. Die angewandte Methode ist durchaus rechnerisch. Vielleicht giebt das Studium der Schumann'schen Abhandlung Herrn Schotten Veranlassung, in der versprochenen Fortsetzung auch geometrische Betrachtungen in Anwendung zu bringen.

Cantor.

Ueber Ovale und Eiflächen. Inaugural-Dissertation von Hermann Brunn. München 1887. 42 S.

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit Raumgebilden, welche geometrisch genau definirt, analytisch unbestimmt gelassen sind. Ein Oval ist nämlich für den Verfasser eine im Endlichen liegende, nach aussen convexe, geschlossene Curve, die mit jeder sie durchsetzenden Geraden ihrer Ebene zwei und nur zwei Punkte gemein hat. Eine Eifläche heisst ihm eine im Endlichen liegende geschlossene Fläche, welche zu jeder sie durchsetzenden Geraden eben diese Beziehung besitzt. Daraus folgt von selbst, dass die unendlichen und imaginären Punkte, welche das analytisch definirte Gebilde noch aufzuweisen hätte, ausser aller Betrachtung bleiben, und dass die Darstellung einen wesentlich graphischen und dabei elementaren Charakter besitzt. Wenigstens sind höhere Kenntnisse als die des Begriffes der Berührung und Krümmung und des Meunier'schen Satzes nirgend vorausgesetzt, wenn auch nicht unerwünscht. Bei den Beweisen spielt der Begriff des Krümmungsgebietes eine wichtige Rolle. Das Krümmungsmaass μ einer Curve in einem Punkte ist als Quotient aus dem Contingenzwinkel und dem Curvenelement eine unbenannte Zahl. Bei einer continuirlichen, überall convexen Curve hat diese Zahl einen grössten und einen kleinsten Werth, und den von diesen beiden Grenzen eingeschlossenen Zahlenraum nennt Herr Brunn das Krümmungsgebiet γ der betreffenden Curve. Aehnliche Definitionen werden für die Fläche aufgestellt. Man übersieht leicht die Berechtigung, von Curven (Flächen) mit gemeinschaftlichen, anstossenden, getrennten Krümmungsgebieten zu reden. Im Verlauf seiner ungemein lesenswerthen Abhandlung begegnet sich der Verfasser mit Steiner's Untersuchungen „über Maximum und Minimum der Figuren", aus welchen einige Sätze als nicht hinlänglich genau gefasst nachgewiesen werden.

Cantor.

Parabolische Koordinaten in der Ebene und im Raume, von Dr. Karl Baer, Oberlehrer. Wissenschaftliche Beilage zu dem Programm des Realgymnasiums zu Frankfurt a. O. 1888. 40 S. mit 2 Figurentafeln.

Die Curve $y^2 = -4p(x-p)$ stellt bei constantem p eine Parabel in der Ebene dar, deren Brennpunkt im Anfangspunkte der rechtwinkligen Coordinaten liegt. Bei variablem, aber stets positivem p ist als Bedeutung eine Schaar confocaler Parabeln ersichtlich, die sämmtlich gegen die negative Seite der Abscissenaxe hin ihre Arme erstrecken. Aehnlich verhält es sich mit $y^2 = 4q(x+q)$. Die Bedeutung ist bei positiv variablem q wieder eine Schaar unter sich und mit den vorhergenannten confocaler entgegengesetzt gerichteter Parabeln. Die Beschränkung des Positivseins für p und

q wird deutlicher, wenn c eine positive Constante und $p=\frac{\xi^2}{c}$, $q=\frac{\eta^2}{c}$ gesetzt wird. Die beiden Grössen ξ und η sind Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier bestimmter confocaler Parabeln. Diese Durchschnittspunkte sind zwei an der Zahl und symmetrisch zu der allen Parabeln beider Schaaren gemeinsamen Axe gelegen. Will man nur einen Punkt bestimmt sein lassen, so kann man η etwa mit Vorzeichen versehen denken, also positiv oder negativ, je nachdem der Punkt über oder unter der Axe gemeint ist. Diese ξ, η sind die parabolischen Coordinaten in der Ebene. Sie schneiden einander orthogonal. Im Raume wird irgend ein Punkt als Durchschnittspunkt dreier sich orthogonal durchsetzender Flächen zweiten Grades gedacht, und damit parabolische Coordinaten entstehen, sind mittelpunktslose Flächen zu wählen: zwei elliptische Paraboloide mit entgegengesetzt liegenden Scheiteln und ein hyperbolisches Paraboloid. Auch diese Flächen enthalten in ihren Gleichungen je einen Parameter, welcher sie als zu einer Schaar von Flächen gleicher Natur gehörend erkennen lässt:

$$\frac{y^2}{\xi^2}+\frac{z^2}{\xi^2+a^2}=\frac{-4cx+4\xi^2}{c^2} \quad \text{mit } \xi^2 \geqq 0,$$

$$\frac{y^2}{\eta^2}+\frac{z^2}{\eta^2-a^2}=\frac{4cx+4\eta^2}{c^2} \quad \text{mit } \eta^2 \geqq a^2,$$

$$\frac{y^2}{\zeta^2}+\frac{z^2}{\zeta^2-a^2}=\frac{4cx+4\zeta^2}{c^2} \quad \text{mit } 0 \leqq \zeta^2 \leqq a^2,$$

und diese Parameter ξ, η, ζ sind alsdann die parabolischen Raumcoordinaten des den drei Flächen gemeinsamen Punktes.

Mit den hier definirten Coordinatensystemen operirt nun Herr Baer in sehr gewandter Weise und gelangt dadurch zu Ergebnissen, welche theils für die Geometrie, theils für die Lehre vom Potential interessant sind.

Cantor.

Die Quadratur des Zirkels. Sichere Lösung einer bislang als Problem betrachteten wissenschaftlichen Frage, dargestellt in 3 Zeichnungen und erläutert von W. F. Lolling, Redacteur. Hamburg 1887.

Beweis, dass es eine Quadratur des Kreises giebt, und dass die bisher zur Berechnung des Kreises benutzte Ludolph'sche Zahl etwas zu klein ist. Von G. Kerschbaum, Steuerrath in Coburg. Coburg 1887.

Die Quadratur der Hyperbel, nach einer neuen Methode berechnet von F. Samuda. Graz 1888.

Für Herrn Lolling ist es unumstösslich, dass die Gesammtfläche des Zirkels eine Zahl bildet, zu deren Quadratwurzel der Durchmesser des Kreises sich verhält wie $1:0{,}88$. Er findet also $\pi=3{,}0976$.

Herr Kerschbaum hat bewiesen $\pi=3{,}1446054\ldots$

Herr Samuda unterscheidet sich von den beiden anderen genannten Schriftstellern durch die Wahl der Aufgabe und durch die bei der Lösung angewandten mathematischen Mittel. Er weiss, dass

$$\int_0^{-a} dx\,(2ax - x^2) = \frac{4a^3}{3} = \int_0^{a} dx\,(2ax + x^2)$$

und folgert daraus

$$\int_0^{-a} dx\,\sqrt{2ax - x^2} = \int_0^{a} dx\,\sqrt{2ax + x^2}.$$

Diese Folgerung, meint er, gestatte die Analogie.

Goethe sagt: Es muss auch solche Käuze geben!

Muss es wirklich? Cantor.

Hydrologische Studien. Von Heinrich Gravé. 1. Heft. Wien 1887, Alfred Hölder. 62 S., 4 Figurentafeln.

Der Inhalt dieser von einem in hydrotechnischen Arbeiten offenbar wohlerfahrenen Manne herrührenden Schrift ist ein etwas bunter, und eine bessere Disposition wäre für die folgenden Hefte entschieden anzurathen. Der „Vorbericht“ beschäftigt sich mit der Bestimmung des Niveaus irgend einer Wasseransammlung, wobei mehrfach interessante und sonst wenig bekannte Mittheilungen über die Anlage von Flusspegeln und über die verschiedenen Höhenfixpunkte in Oesterreich gemacht werden. Daran schliesst sich eine sehr fleissig ausgearbeitete und für die Praxis gewiss werthvolle Tabelle der Porosität verschiedener Gesteinsarten; auf diese letztere Eigenschaft wird nach des Verf. Ansicht bei den üblichen Quellentheorien zu wenig geachtet, und doch wird allerdings das Durchsickern des meteorischen Wassers durch den Fels sehr stark beeinflusst sein durch die Wassercapacität des Stoffes. Dafür, dass die Durchlässigkeit der Gesteine eine grössere sei, als man gemeiniglich annimmt, werden verschiedene Erfahrungen von Tropfstein- und Eishöhlen angeführt.

Hierauf entwickelt der Verf. seine eigenen Ansichten über Quellenbildung, namentlich in Kalkgebirgen, und diese Ansichten haben entschiedenes Interesse für die physikalische Geographie. Den seit Mariotte nahezu allgemein anerkannten Grundsatz, dass alles in der Erde vorkommende und aus ihr durch Quellöffnungen abfliessende Wasser von aussen hineingekommen sei, eignet sich auch der Verf. an; da neuerdings gegen diesen Satz von O. Volger heftiger Protest eingelegt worden ist, so hätten wir eine Vertheidigung der auch nach unserer Ueberzeugung zutreffenden Lehre von Mariotte an dieser Stelle nicht ungern gesehen. Das, was der Verf. an neuen Auffassungen bietet, soll also nicht Bestehendes über den Haufen werfen, sondern nur die einzelnen Formen, unter denen sich der Austritt des absorbirten Regenwassers vollzieht, schärfer präcisiren. Herr Gravé unterscheidet Schichtquellen, Ueberfallquellen, Spaltquellen und Verwerfungsquellen. Erstere sind diejenigen, welche man als Norm betrachtet und auf deren Beschreibung die meisten Lehrbücher sich beschränken, obwohl es auch da rühmenswerthe Ausnahmen giebt, z. B. Lersch's „Hydrophysik“ (Berlin 1865). Das Wasser bahnt sich so lange durch die Hohlräume der Berge seinen Weg, bis es zu einer entweder ganz undurchlässigen oder bereits mit Flüssigkeit vollkommen durchtränkten Schicht gelangt; hier sammelt es sich zu einer Wasserader, welche da, wo die Schicht zu Tage tritt, ihren Ausweg ins Freie nimmt. Einen mehr intermittirenden Charakter werden im Allgemeinen die Ueberfallquellen haben; das Sickerwasser fliesst in einem Hohlraum zusammen, und erst wenn dasselbe das Niveau der Ränder dieser Depression erreicht hat, strömt es von mehreren Punkten über die Ränder ab. Es kann sich aber ereignen; dass ein solches Becken viel rascher entleert wird, und dies geschieht dann, wenn von oben eine Spalte im Gestein unter das Randniveau herabreicht, jedesmal dann, wenn die Auffüllung weit genug gediehen ist, um beim weiteren Anwachsen den Wasserspiegel über die Spaltöffnung zu heben, muss durch diese letztere eine partielle Entleerung stattfinden. Eine Verwerfungsquelle endlich kommt dann zu Stande, wenn ein Schichtentheil gegen den andern abgesunken ist, so dass also die ursprünglich zusammenhängende Schichtfläche nunmehr zwei verschiedenen geologischen Horizonten angehört. Diese Verwerfung kann es bewirken, dass durchaus gesättigtes Gestein sich direct neben poröses legt; das in letzterem befindliche Wasser staut sich dann, da es in der ihm zunächst angewiesenen Richtung nicht vorzudringen im Stande ist, in seinem bisherigen Behälter auf, bis etwa oben eine Oeffnung erreicht wird. Solche Stauprocesse müssen auch angenommen werden, wenn man das thatsächlich beobachtete Vorkommen von eigentlichen Springquellen im Kalkgebirge erklären will. Im unmittelbaren Anschlusse hieran giebt der Autor noch Rathschläge über das Fassen und „Unterfahren“ von Quellen; es kann dadurch ein grosser Nachtheil erreicht werden, nämlich der, dass die „Staucurve“ sich zu sehr erniedrigt und sich infolge dessen die neugebildeten Reservoire rasch entleeren. — Bei allen diesen Erörterungen wäre, wenn der Verf. seine „Studien“ nicht mit Ausschliesslichkeit einem technischen Fachpublicum bestimmt wissen will, eine eingehendere Analyse der physikalischen Vorgänge erwünscht, und wir möchten eine solche für die weiteren Lieferungen des Werkes angelegentlich empfehlen.

München. Dr. S. Günther.

Die Gunterskale. Vollständige Erklärung der Gunterlinien und Nachweis ihrer Entstehung, nebst zahlreichen Beispielen für den praktischen Gebrauch von Capitän LUDWIG JERRMANN. Mit 16 Text-Abbildungen und 3 litographischen Tafeln. Hamburg, Eckardt & Messtorff. 1888. VII, 98 S.

Das von Edmund Gunter 1624 erfundene Rechenlineal hat von je bei den Seeleuten grossen Anklang gefunden, und dass es auch heutigen Tages noch von denselben mit grossem Nutzen gebraucht werden kann, beweist eben die vorliegende Schrift eines Praktikers. In der heutigen Form haben wir allerdings nicht mehr die ursprüngliche „Gunterskale“, sondern ein mehrfach abgeändertes Instrument vor uns; die Abänderungen rühren her von einem gewissen Benjamin Donn, den Herr Jerrmann „ganz unbekannt“ nennt, aber mit sehr wenig Recht, denn die Lebensverhältnisse dieses Mathematikers sind uns ziemlich genau bekannt, wie ein Blick in Poggendorff's „Handwörterbuch“ (1. Band, Spalte 592) darthut. Auf dem Rechenstabe, dem Urbilde des später beliebt gewordenen logarithmischen Rechenschiebers, sind verschiedene Theilungen abgetragen; für einen gegebenen Winkel, der übrigens nach dem nautischen Maasse der „Rhumbs“ oder Compassstriche gemessen sein muss, findet man die Chorden, Sinus, Tangenten und Semitangenten angegeben; mit letzterem Worte (s. $tg\,\varphi$) bezeichnet man den Werth von $tg\,\frac{90^0-\varphi}{2}$. Auf der andern Seite findet man dann noch verschiedene andere Theilungen vor, auf welche hier einzugehen zu weitläufig sein würde; es möge nur kurz erwähnt sein, dass man mit deren Hilfe bequem Wurzelausziehungen vorzunehmen vermag. Dem seemännischen Gebrauche insonderheit dient eine Theilung, mittelst deren man sofort abmessen kann, welches die „vergrösserte“, d. h. Mercator'sche Breite x zu einer gegebenen geographischen Breite φ ist; man hat bekanntlich

$$x = Konst. \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = Konst.\, \log tg\, \frac{90^0+\varphi}{2},$$

und zu jedem φ ist das zugehörige x angegeben.

Man kann sich der Skale, wenn man einigermassen auf sie eingeübt ist, mit grosser Bequemlichkeit zur Auflösung irgendwelcher Aufgaben der sphärischen Astronomie auf graphischem Wege bedienen. Besser als durch viele Worte mag dies durch ein wirkliches Beispiel gezeigt werden: Welches ist der Stundenwinkel t des Punktes, in welchem unter der Polhöhe φ und für die Declination d die Sonne nach ihrem Aufgange den ersten Vertikal durchschneidet? Die Rechnung ergiebt $\cos t = tg\,d\,\cot\varphi$; die graphische Lösung vollzieht sich folgendermassen. Man projicirt die Himmelskugel orthographisch auf die Meridianebene, so dass in deren Mittelpunkt C auch Ost- und Westpunkt sich vereinigen; Hh sei der Horizont, Z das Zenit, N der Nadirpunkt, P der Nordpol, AA' der Aequator, so dass also $ZN \perp Hh$, $OP \perp AA'$ wäre. Schon das Eintragen der Punkte P und A kann mit

Hilfe der Skale geschehen, indem man resp. aus H und h die Chorden von $(90^0 - \varphi)$ und φ in den Kreis einträgt, dessen Halbmesser natürlich gleich *chord* 60^0 des Lineals sein muss. Von A und A' trage man — nach Norden, wenn d positiv ist — jeweils *chord* d in die Peripherie ein; dann ist $DD' \| AA'$ die Projection des Tageskreises der Sonne. DD' schneidet die Mittagslinie Hh in O; man errichte in O auf DD' eine Senkrechte, welche CD' in N trifft, und es liefert CN den Sinus des Stundenwinkels für den Aufgangspunkt. Andererseits schneiden sich DD' und ZN in J; man errichte in J ein Loth auf DD', welches der CD in S begegnet; dann ist CS der gesuchte Cosinus. Um den Beweis nur für den letzteren Fall zu führen, wende man auf das ebene Dreieck CSJ den Sinussatz an; es wird sein

$$CS : CJ = \sin(90^0 - \varphi) : \sin(90^0 - d),$$

$$CS = \frac{CJ \cos\varphi}{\cos d} = \frac{CR \cos\varphi}{\sin\varphi \cos d} = \frac{\sin d \cos\varphi}{\sin\varphi \cos d} = tg\, d \cot\varphi,$$

wie behauptet. R steht am Durchschnitte von DD' und CP. Man hat mithin, nachdem die Construction gemacht ist, nur auf der Skale nachzusehen, welcher Winkel ψ zu CS als Sinus gehört, und es ist dann

$$t = 90^0 - \psi.$$

Ganz besonders gut eignet sich die Skale für die mit dem „Koppeln der Kurse" in Verbindung stehenden Aufgaben, wenn es sich z. B. darum handelt, die Distanz aus gegebenem Kurse und Breitenunterschiede nebst bekannter Abweichung zu berechnen. Ueberhaupt entzieht sich kein Problem der ebenen und sphärischen Trigonometrie, wie aus der reichen Sammlung durchgerechneter Beispiele hervorgeht, der Anwendung dieses Verfahrens, nur möchte der Nutzen in dem Maasse geringer ausfallen, je mehr sich der Natur der Sache nach die Rechnung complicirt. Namhaft gemacht zu werden verdient noch die Verzeichnung orthographischer und stereographischer Bilder der Erd- und Himmelskugel, wobei die Lage des Projectionspunktes völlig willkürlich bleibt. Der Uebelstand, dass die stereographische Projection, wenn sie auch durchaus nichts weiter als Lineal und Zirkel erfordert, doch oft wegen der Nothwendigkeit, Kreise von sehr grossem Halbmesser zu ziehen, mit Schwierigkeiten der Ausführung zu kämpfen hat, ein Uebelstand, den Heymann durch tabellarische Zusammenstellung der Coordinatenwerthe für die wichtigeren Netzpunkte zu heben suchte, wird durch die Gunterskale zwar nicht ganz beseitigt, aber doch abgeschwächt, weil durch sie die Interpolation von Zwischenpunkten sehr erleichtert ist.

Die Darstellung des Verf. ist eine sehr ausführliche und im Wesentlichen klare, doch durchaus den Wünschen des Nautikers angepasste. Eine Bemerkung über Sprachliches können wir nicht unterdrücken. Der Berichterstatter zählt sich nicht zu den Sprachreinigern, hält vielmehr die Ausmerzung der Fremdwörter aus unserer wissenschaftlichen und Umgangssprache für ein aussichtsloses Beginnen, aber gewisse Ausschreitungen vermag auch er nicht zu billigen. Ausdrücke wie „Navigateur“ und „Premiervertikal“ nehmen sich in einem noch dazu mit deutschen Lettern gedruckten Buche denn doch nicht schön aus.

München. Dr. S. Günther.

Bibliographie

vom 16. September bis 31. October 1888.

Periodische Schriften.

Archiv der Mathematik und Physik, begr. v. Grunert, fortges. v. R. Hoppe. 2. Reihe, 7. u. 8. Thl. Leipzig, Koch. 21 Mk.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben v. A. Krueger. 120. Bd. Hamburg, Mauke Söhne. compl. 15 Mk.

Veröffentlichungen des königl. preuss. geodät. Instituts. Gradmessungs-Nivellement zwischen Anclam und Cuxhaven. Berlin, Stankiewicz. 7 Mk.

Repertorium für Meteorologie, redig. v. H. Wild. 11. Bd. Leipzig, Voss. 12 Mk. 40 Pf.

Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Petersbourg. VII. série, tome XXXVI, Nr. 3—5. Ebendas. 4 Mk. 70 Pf.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Nagel, A., Gerbert und die Rechenkunst d. X. Jahrh. Wien, Tempsky. 2 Mk.

Graf, H., Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in den bernischen Landen. 1. Heft: Das XVI. Jahrh. Bern, Wyss. 1 Mk.

Loria, G., Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung. Histor. Monogr. Uebers. v. F. Schütte, mit Vorw. v. R. Sturm. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Clerke, A., Geschichte der Astronomie im 19. Jahrh., gemeinfasslich dargestellt. Deutsch v. H. Maser. Berlin, Springer. 10 Mk.

Reine Mathematik.

Graefe, F., Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes insbes. der Flächen 2. Gr. Leipzig, Teubner. 3 Mk.

Schroeter, H., Die Theorie der ebenen Curven 3. Ordnung; auf synthetischem Wege abgeleitet. Ebendas. 8 Mk.

Adam, W., 6500 Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Theil. Neuruppin, Petrenz. 2 Mk.

Greve, Lehrbuch der Mathematik. IV. Curs, 2. Thl. (Arithm.) Bielefeld, Velhagen & Klasing. 1 Mk. 80 Pf.

Weidemann, H. Lehrbuch der Planimetrie. Berlin, Deubner. 3 Mk.

Nies, K., Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Darmstadt, Bergsträsser. 1 Mk. 20 Pf.

Angewandte Mathematik.

Czuber, E., Zum Gesetz der grossen Zahlen mit Rücksicht auf d. Ziehungen der Lotterien in Prag und Brünn. Prag, Dominicus. 80 Pf.

Fischer, E., Zeichenvorlagen für Stereotomie. 1. Heft. Nürnberg, Korn. 5 Mk.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 1. Bd.: Ausgleichungsrechnung; 2. Bd.: Feld- und Landmessung. 3. erweit. Aufl. Stuttgart, Metzler. 22 Mk.

Bauernfeind, M. v., Das bayerische Präcisions-Nivellement. 7. Mittheil. München, Franz. 2 Mk. 80 Pf.

Stambach, J., Coradi's Planimeter, Theorie, Construction und Genauigkeitsgrad. Stuttgart, Wittwer. 1 Mk.

Bibler, A., Leitfaden und Repetitorium der analytischen Mechanik. 2. Thl.: Dynamik fester Körper. Leipzig, Violet. 1 Mk. 80 Pf.

Dziobeck, O., Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig, Barth. 9 Mk.

Gallenmüller, J., Elemente der mathematischen Geographie und Astronomie. Regensburg, Pustet. 2 Mk.

Stern-Ephemeriden für die Jahre 1889 und 1890. (Aus d. Berliner astron. Jahrb.) Berlin, Dümmler. 6 Mk.

Messer, J., Sternatlas aller bis zu 35° südl. Decl. sichtbaren Sterne. Petersburg, Ricker. 10 Mk.

Auwers, A., Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen von 1750 bis 1762. Bd. III. Leipzig, Voss. 9 Mk. 20 Pf.

Wittstein, A., Ein Beispiel zum Oppolzer'schen Kanon der Finsternisse. Leipzig, Köhler's Antiqu. 10 Mk.

Wislicenus, F., Untersuchungen über den absoluten persönlichen Fehler bei Durchgangsbeobachtungen. Leipzig, Engelmann. 3 Mk.

Bohn, C., Ueber Linsenzusammenstellungen und ihren Ersatz durch eine Linse von vernachlässigbarer Dicke. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Pabst, C., Leitfaden der theoretischen Optik f. höh. Unterrichtsanst. Halle, Schmidt. 1 Mk. 25 Pf.

Physik und Meteorologie.

Hagemann, A., Aggregatzustände d. Wassers. Berlin, Friedländer & S. 60 Pf.

Bolz, H., Die Pyrometer. (Krit. Vergleich. d. Pyrom.) Gekrönte Preisschrift. Berlin, Springer. 3 Mk.

Kohlrausch, F., Ueber den absoluten elektrischen Leitungswiderstand des Quecksilbers. München, Franz. 3 Mk. 50 Pf.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1887.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Aberration.

277. Nouvelles méthodes pour la détermination de la constante de l'aberration. Loewy. Compt. rend. CIV, 18, 455, 538, 615, 1207, 1398, 1650; CV, 11.
278. Sur une méthode pour déterminer la constante de l'aberration. J. C. Houzeau. Compt. rend. CIV, 278, 563. — Loewy ibid. 396, 727.
279. Recherches sur certains phénomènes relatifs à l'aberration de la lumière. Fizeau. Compt. rend. CIV, 935.

Analytische Geometrie des Raumes.

280. Ein Coordinatensystem der Kreise einer Ebene. P. H. Schoute. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 786.
281. Théorème sur les complexes linéaires. V. Jamet. Compt. rend. CIV, 567.
282. Sur l'octaèdre. P. Serret. Compt. rend. CIII, 867, 999.
283. Sur un genre particulier de transformations homographiques. Mdlle. L. Bortniker. Compt. rend. CIV, 771. — G. Darboux ibid. 778. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 330.]
284. Bemerkung zu den desmischen Tetraedern. F. Caspary. Mathem. Annal. XXIX, 581.
285. Sur les sections des hélicoïdes à plan directeur. P. Pécharman. Compt. rend. CIII, 987.
286. Ueber eine besondere Raumcurve dritter Ordnung. A. Hurwitz. Mathem. Annal. XXX, 291.

Vergl. Ellipsoid. Geodäsie 414, 415. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

287. Sur les formules de M. Loewy pour la réduction des circompolaires. Gruey. Compt. rend. CII, 966. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 331.]
288. Nouvelles méthodes pour la détermination des éléments de la réfraction. Loewy. Compt. rend. CII, 74, 290, 380, 533, 887, 1196, 1278.
289. Détermination de l'erreur de la constante de réfraction astronomique, par les observations méridiennes. A. Gaillot. Compt. rend. CII, 200, 247.
290. Sur une forme géométrique des effets de la réfraction dans le mouvement diurne. Gruey. Compt. rend. CV, 847.
291. Formules différentielles pour la variation des éléments d'une orbite. R. Radau. Compt. rend. CV, 432.
292. Entwickelung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anomalien in independenter Form. N. Herz. Wien. Akad.-Ber. XCI, 344.
293. Simplifications qui se présentent dans le calcul numérique des perturbations pour certaines valeurs de l'argument. O. Callandreau. Compt. rend. CII, 598.
294. Sur un cas remarquable du problème des perturbations. F. Tisserand. Compt. rend. CIII, 446.
295. Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire. F. Tisserand. Compt. rend. CIV, 259.
296. Sur une équation différentielle que l'on rencontre dans la théorie des orbites intermédiaires. Andoyer. Compt. rend. CIV, 1425.
297. Sur le calcul approximatif d'une orbite parabolique. R. Radau. Compt. rend. CV, 457.

298. Entwickelung der Differentialquotienten der geocentrischen Coordinaten nach zwei geocentrischen Distanzen in einer elliptischen Bahn. N. Herz. Wien. Akad.-Ber. XCII, 590.
299. Ueber die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn, mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall. Ed. Weiss. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1456.
300. Sur la réduction de la distance apparente de deux astres voisins à leur distance moyenne d'une époque donnée. G. Bigourdan. Compt. rend. CV, 606.
301. Sur une nouvelle méthode permettant de déterminer la parallaxe du Soleil à l'aide de l'observation photographique du passage de Vénus. Obrecht. Compt. rend. CIV, 560; CV, 1004.
302. Zur Hansen'schen Theorie der Sonnenfinsternisse. R. Schram. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1233.

Vergl. Aberration. Geodäsie 418. Geschichte der Mathematik 457, 458, 459, 460, 461. Nautik. Optik 612.

B.

Bestimmte Integrale.

303. Ueber die Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral. P. Schafheitlin. Mathem. Annal. XXX, 157. — N. Sonine ibid. 582.
304. Sur les intégrales $\int \frac{G(x).dx}{\sqrt{R(x)}}$. G. Guichard. Compt. rend. CIV, 1494.
305. Zur Theorie der binomischen Integrale. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 372.
306. Sur les résidus des intégrales doubles. H. Poincaré. Compt. rend. CII, 202.
307. Sur les périodes des integrales doubles. E. Picard. Compt. rend. CII, 349, 410.
308. Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale. R. Lipschitz. Crelle CI, 214.

Vergl. Functionen 398. Gammafunctionen. Potential 624.

D.

Determinanten.

309. Ueber eine Formel der Determinantentheorie. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCI, 622.
310. Zur Theorie der Hesse'schen Determinante. A. Voss. Mathem. Annal. XXX, 418.
311. Sur une extension d'un théorème de Clebsch relatif aux courbes du quatrième degré. J. J. Sylvester. Compt. rend. CII, 1532.

Differentialgleichungen.

312. Ueber die Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung angehörigen selbständigen Transcendenten. L. Königsberger. Mathem. Annal. XXX, 299.
313. Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. L. W. Thomé. Crelle CI, 203. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 54 und XXXIII, Nr. 32.]
314. On the theory of linear differential equations. A. Cayley. Crelle CI, 209.
315. Sur l'équation différentielle de la série hypergéometrique. II. A. Markoff. Mathem. Annal. XXIX, 247. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 373.]
316. Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. L. Pochhammer. Crelle CII, 76.
317. Sur la théorie des équations linéaires. E. Goursat. Compt. rend. CII, 204.
318. Sur une représentation géométrique dans l'espace des intégrales de l'équation $f\left(\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}\right)=0$. L. Autonne. Compt. rend. CV, 850.
319. Sur l'application des substitutions quadratiques crémoniennes à l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre. L. Autonne. Compt. rend. CV, 929.
320. Sur quelques équations différentielles non linéaires. Rog. Liouville. Compt. rend. CIII, 457, 520.
321. Sur certaines équations différentielles du premier ordre. Rog. Liouville. Compt. rend. CIII, 476.

322. Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre et sur les formations invariantes qui s'y rapportent. Rog. Liouville. Compt. rend. CV, 460.
323. Sur une classe d'équations différentielles, parmi lesquelles, en particulier, toutes celles des lignes géodésiques se trouvent comprises. Rog. Liouville. Compt. rend. CV, 1062.
324. Interprétation géométrique de l'équation $L\left(x\cdot\frac{dy}{dx}-y\right)-M\frac{dy}{dx}+N=0$, dans laquelle L, M, N désignent des fonctions homogènes, algébriques, entières et d'un même degré de x et y. G. Fouret. Compt. rend. CII, 415.
325. Integration regulärer linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung durch die Kettenbruchentwickelung von ganzen Abel'schen Integralen 3. Gattung. K. Heun. Mathem. Annal. XXX, 553.
326. Sur une classe d'équations différentielles. Ém. Picard. Compt. rend. CIV, 41.
327. Sur les équations différentielles algébriques et homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. Appell. Compt. rend. CIV, 1776. [Vergl. Nr. 509.]
328. Ueber die linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, zwischen deren particulären Integralen eine Relation besteht. A. Winckler. Wien. Akad.-Ber. XCII, 7.
329. Sur les intégrales algébriques de l'équation de Kummer. E. Goursat. Compt. rend. CIII, 993.
330. Sur les équations différentielles linéaires du 3. ordre. P. Painlevé. Compt. rend. CIV, 1829; CV, 58.
331. Sur un système d'équations aux dérivées partielles. E. Goursat. Compt. rend. CIV, 1361.
332. Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles. Painlevé. Compt. rend. CIV, 1497.
333. Sur un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Rog. Liouville. Compt. rend. CIV, 1496.
334. Sur les équations linéaires à deux variables indépendantes. G. Darboux. Compt. rend. CV, 199.

Vergl. Astronomie 296. Mechanik 530. Oberflächen 584, 585. Thetafunctionen 673.

Differentialquotient.

335. Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polaroperationen. Alf. Capelli. Mathem. Annal. XXIX, 331.

Vergl. Astronomie 298. Formen 375. Functionen 376. Oberflächen 581.

E.

Elasticität.

336. Schwingungszahlen einer elastischen Hohlkugel. J. Loschmidt. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 434.
337. Sur le coefficient de contraction des solides élastiques. Gros. Compt. rend. CII, 418.
338. Sur le mouvement d'un fluide indéfini, perfaitement élastique. N. Marin. Compt. rend. CIII, 989.

Elektricität.

339. Ueber das Verhältniss der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik zu dem von Hertz aufgestellten Princip der Einheit der elektrischen Kräfte. Ed. Aulinger. Wien. Akad.-Ber. XCI, 880.
340. Sur un principe de l'électrodynamique. Ém. Mathieu. Compt. rend. CV, 659.
341. Sur le problème de la distribution électrique. H. Poincaré. Compt. rend. CIV, 44.
342. Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe. G. Robin. Compt. rend. CIV, 1834.
343. Ueber die Linien gleicher Stromdichte auf flächenförmigen Leitern. J. Haubner. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 46.
344. Sur la mesure des conductibilités intérieures. Morisot. Compt. rend. CIV, 1836.
345. Loi du rendement correspondant au maximum du travail utile dans une distribution électrique. A. Vaschy. Compt. rend. CII, 1235, 1457.
346. Sur la nature des actions électriques dans un milieu isolant. A. Vaschy. Compt. rend. CIII, 1186; CIV, 51.

347. Action d'un champ électrostatique sur un courant variable. A. Vaschy. Compt. rend. CIV, 1609.
348. Sur la nature des phénomènes électrocapillaires. Vaschy. Compt. rend. CV, 64.
349. Sur la pression électrique et les phénomènes électrocapillaires. P. Duhem. Compt. rend. CIV, 54.
350. Sur une relation entre l'effet Peltier et la différence de niveau potentiel entre deux métaux. P. Duhem. Compt. rend. CIV, 1606.
351. Sur le phénomène Peltier dans une pile hydro-électrique. P. Duhem. Compt. rend. CIV, 1697.
352. Sur la période variable des courants dans le cas où le circuit contient un électro-aimant. Leduc. Compt. rend. CIV, 286.
353. Sur la définition du coefficient de self-induction d'un système électromagnétique. G. Cabanellas. Compt. rend. CIII, 250.
354. Sur la détermination du coefficient de self-induction. P. Ledeboer. Compt rend. CII, 606, 1375, 1549.
355. Sur la détermination du coefficient de self-induction. P. Ledeboer & G. Maneuvrier. Compt. rend. CIV, 900.
356. Sur le coefficient de self-induction de deux bobines réunies en quantité. P. Ledeboer & G. Maneuvrier. Compt. rend. CV, 218, 371.
357. Sur l'emploi et la graduation de l'électromètre à quadrants dans la méthode homostatique. P. Ledeboer & G. Maneuvrier. Compt. rend. CV, 571.
358. Zur Theorie des von Hall entdeckten elektromagnetischen Phänomens. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 644.
359. Sur la période variable du courant dans un système électromagnétique. R. Arnoux. Compt. rend. CIV, 425.
360. Sur une méthode de détermination du flux d'induction qui traverse un système électromagnétique. R. Arnoux. Compt. rend. CIV, 498.
361. Détermination des flux de force des systèmes électromagnétiques quelconques. Méthode de la servo-variation de l'induction. G. Cabanellas. Compt. rend. CIV, 495.

Vergl. Hydrodynamik 496.

Ellipsoid.

362. Sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution allongé. Halphen. Compt. rend. CV, 535.

Vergl. Potential 624, 625.

Elliptische Transcendenten.

363. Zur Theorie der elliptischen Functionen. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCI, 974.
364. Note on Kiepert's L-equations in the transformation of elliptic functions. A. Cayley. Mathem. Annal. XXX, 75.
365. Zur Lehre von den Modulargleichungen der elliptischen Functionen. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCI, 138.
366. Zur Theorie der an einer allgemeinen Curve 3. Ordnung hinerstreckten Integrale und der von ihnen abhängenden elliptischen Functionen. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 71.
367. Aufstellung einer Differentialgleichung, welcher die Wurzeln der Gleichungen für die Theilung der elliptischen Perioden als Functionen des Moduls genügen. Ad. Migotti. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 748.

Vergl. Rectification 631, 632. Substitutionen 662, 663.

F.

Formen.

368. Zur Theorie der positiven quadratischen Formen. H. Minkowski. Crelle CI, 196.
369. Sur les réciprocants purs irréductibles du quatrième ordre. J. J. Sylvester Compt. rend. CII, 152. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 406.]
370. Sur la théorie des réciprocants. R. Perrin. Compt. rend. CII, 351.
371. Ueber Binärformen 6. Ordnung mit linearen Substitutionen in sich. O. Bolza. Mathem. Annal. XXX, 546.
372. Ueber die bestimmenden Eigenschaften der Resultante von n-Formen mit n-Veränderlichen. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 527.
373. Sur la théorie des formes algébriques à p variables. R. Perrin. Compt. rend. CIV, 108, 220, 280.

374. Ueber binäre Formenbüschel mit besonderer Combinanteneigenschaft. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXX, 561.
375. Sur une classe de formes de différentielles et sur la théorie des systèmes d'éléments. G. Koenigs. Compt. rend. CIV, 673, 842.

Vergl. Differentialquotient. Invariantentheorie. Substitutionen. Zahlentheorie.

Functionen.

376. Ueber Differentiirbarkeit und Anschaulichkeit der stetigen Functionen. Alfr. Köpcke. Mathem. Annal. XXIX, 123.
377. Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce. E. Picard. Compt. rend. CII, 250. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 433.]
378. Sur la détermination du genre d'une fonction holomorphe dans quelques cas particuliers. De Sparre. Compt. rend. CII, 740.
379. Sur le développement en série de polynômes d'une fonction holomorphe dans une aire quelconque. P. Painlevé. Compt. rend. CII, 672.
380. Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraischen Grundoperationen. O. Simony. Wien. Akad.-Ber. XCI, 232.
381. Ueber einige Punkte der Functionentheorie. M. Pasch. Mathem. Annal. XXX, 132.
382. Sur le problème de l'anamorphose. L. Lecornu. Compt. rend. CII, 813.
383. Ueber einige Anwendungen des Princips der Apolarität. B. Igel. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1153.
384. Zur Theorie der algebraischen Functionen. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XXIX, 171.
385. Ueber einen Satz des Herrn Noether. L. Stickelberger. Mathem. Annal. XXX, 401.
386. Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Functionen. M. Noether. Mathem. Annal. XXX, 410.
387. Ueber die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Grössen enthalten sind. Ad. Kneser. Mathem. Annal. XXX, 179.
388. Sur une classe étendue de transcendantes uniformes. H. Poincaré. Compt. rend. CIII, 862.
389. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. J. L. W. V. Jansen. Compt. rend. CIV, 1156.
390. Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt. F. Schottky. Crelle CI, 227.
391. Sur la transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes. H. Poincaré. Compt. rend. CII, 41.
392. Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéfinies. H. Poincaré. Compt. rend. CII, 735.
393. Zur Theorie der Fuchs'schen Functionen. O. Biermann. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1137.
394. Bestimmung der allgemeinsten der Functionalgleichung der σ-Function genügenden Function. A. Delisle. Mathem. Annal. XXX, 91.
395. Beweis von der Unmöglichkeit der Existenz eines andern Functionaltheorems als des Abel'schen. L. Königsberger. Crelle CI, 1. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 421.]
396. Untersuchungen über die Existenz eines Functionaltheorems. L. Königsberger. Crelle CII, 224.
397. Sur le théorème d'Abel. G. Humbert. Compt. rend. CIII, 919.
398. Ueber $\int\limits_{\mathfrak{S}} \frac{R_1(\mathfrak{z}, \mathfrak{w})}{R_2(\mathfrak{z}, \mathfrak{w}) - t}\, d\mathfrak{z}$, wo R_1 und R_2 algebraische Functionen derselben Riemann'schen Fläche sind. Fr. Krieg von Hochfelden. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 221.
399. Sur la réduction des intégrales abéliennes. H. Poincaré. Compt. rend. CII, 915.
400. Sur les fonctions abéliennes. Appell. Compt. rend. CIII, 1246.
401. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. G. Pick. Mathem. Annal. XXIX, 259. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 428.]
402. Ueber Integrale zweiter Gattung. J. Thomae. Crelle CI, 326.
403. Ueber die Entwickelung der doppeltperiodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen. M. Krause. Mathem. Annal. XXX, 425, 516.

404. Ueber mehrdeutige doppeltperiodische Functionen. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCII, 893.
405. Ueber die Abel'schen Integrale dritter Gattung, welche zu singularitätenfreien ebenen algebraischen Curven gehören. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 367.
406. Ueber die zu einer singularitätenfreien ebenen algebraischen Curve gehörigen Θ-Functionen. G. Pick. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 739.
407. Zur graphischen Auswerthung der Functionen mehrerer Veränderlichen. Aug. Adler. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 404.
408. Tafeln der eindeutig umkehrbaren Functionen zweier Variabeln auf den einfachsten Zahlengebieten. E. Schröder. Mathem. Annal. XXIX, 299.
409. Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabeln. Al. Witting. Mathem. Annal. XXIX, 157.
410. Ueber eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen zweier Veränderlicher. O. Staude. Mathem. Annal. XXIX, 468.
411. Zur Theorie der Abel'schen Functionen von vier Variabeln. F. Schottky. Crelle CII, 304.
412. Zur Theorie der reducibeln ganzen Functionen von n Variabeln. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXX, 30.

Vergl. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Elliptische Transcendenten. Formen. Gammafunctionen. Geometrie (höhere). Gleichungen. Invariantentheorie. Kettenbrüche. Kugelfunctionen. Mannigfaltigkeiten. Oberflächen. Reihen. Substitutionen. Thetafunctionen. Ultraelliptische Transcendenten.

G.

Gammafunctionen.

413. Ueber Gammafunctionen mit beliebigem Parameter. Bigler. Crelle CII, 237.

Geodäsie.

414. Sur un nouveau système de projection de la sphère. Guyou. Compt. rend. CII, 308.
415. Emploi des coordonnées azimutales. Hatt. Compt. rend. CII, 485.
416. Sur les nivellements de précision. Goulier. Compt. rend. CV, 270, 306.
417. Mesures de nuages. N. Ekholm. Compt. rend. CV, 936.
418. Sur la théorie de la figure des planètes. O. Callandreau. Compt. rend. CIV, 1600; CV, 1171.

Vergl. Geschichte der Mathematik 464, 465.

Geometrie (absolute).

419. Ueber die projective Geometrie und die analytische Darstellung der geometrischen Gebilde. M. Pasch. Mathem. Annal. XXX, 127.
420. Sur la géométrie non-Euclidienne. Vent. Reyes y Prósper. Math. Annal. XXIX, 154.
421. Ueber den Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. Jul. Petersen. Mathem. Annal. XXIX, 289.

Geometrie (descriptive).

422. Der Pohlke'sche Lehrsatz der Axonometrie und eine Verallgemeinerung desselben. J. Mandl. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 60.

Geometrie (höhere).

423. On the intersection of curves. A. Cayley. Mathem. Annal. XXX, 85. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 454.]
424. Sur les normales aux courbes. A. E. Pellet. Compt. rend. CIV, 1501.
425. Condition d'égalité de deux figures symétriques. G. Weill. Compt. rend. CV, 1237.
426. Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprincip. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 899.
427. Détermination du rayon de courbure d'une trajectoire particulière d'un point faisant partie d'un solide invariable assujetti à quatre conditions. J. Réveille. Compt. rend. CIV, 1827.
428. Détermination des éléments de courbure de la surface décrite par un point quelconque d'un solide invariable, dont quatre points donnés décrivent des surfaces dont les éléments de courbure sont donnés. J. Réveille. Compt. rend. CV, 159.

429. Ueber gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCI, 476.
430. Sur les transformations rationnelles des courbes algébriques. P. Painlevé. Compt. rend. CV, 792.
431. Zur Theorie derjenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Functionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Functionen eines Parameters darstellen lassen. C. Weltzien. Mathem. Annal. XXX, 585.
432. Sur les principes fondamentaux de la géométrie supérieure. A. Mouchot. Compt. rend. CIII, 1110.
433. Propriétés descriptives segmentaires et métriques de la ligne droite de mode quelconque. A. Mouchot. Compt. rend. CIV, 1053.
434. Propriétés descriptives segmentaires ou métriques de la circonférence de mode quelconque. Mouchot. Compt. rend. CV, 602.
435. Ueber das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck. Gust. Kohn. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 314.
436. Ein Steiner'sches Problem. P. H. Schoute. Crelle CI, 154.
437. Ueber eine ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen Grundgebilden zweiter Stufe. A. Schwarz. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 310.
438. Ueber conjugirte Curven, insbesondere über die geometrische Relation zwischen einer Curve 3. Ordnung und einer zu ihr conjugirten Curve 3. Classe. O. Schlesinger. Mathem. Annal. XXX, 453.
439. Ueber Configurationen und Polygone auf biquadratischen Curven. Ad. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 357.
440. Zur geometrischen Theorie der ebenen Curven 4. Ordnung. J. Cardinaal. Crelle CII, 160.
441. Ueber die rationale ebene Curve 4. Ordnung. W. Stahl. Crelle CI, 300.
442. Sur l'équation différentielle d'une courbe d'ordre quelconque. J. Sylvester. Compt. rend. CIII, 408.
443. Ueber die Brennpunktscurve der räumlichen Parabel. W. Wirtinger. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 302.
444. Ein specieller $F^{(2)}$-Bündel und der dazu gehörige Bündel Raumcurven 3. Ordnung. J. Cardinaal. Crelle CI, 142.
445. Ueber rationale Raumcurven 4. Ordnung. W. Wirtinger. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 28.
446. Ueber Raumcurven 4. Ordnung 1. Species. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 790.
447. Die Raumcurve 4. Ordnung 2. Art und die desmische Fläche 12. Ordnung 4. Classe. W. Stahl. Crelle CI, 73.
448. Ueber die mit der Erzeugung der Raumcurven 4. Ordnung II. Species verknüpften algebraischen Processe. Fr. Meyer. Mathem. Annal. XXIX, 447.
449. Ueber Raumcurven 5. Ordnung vom Geschlecht 1. Em. Weyr. Wien. Akad.-Ber. XCII, 498.
450. Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel. K. Hensel. Crelle CII, 273.
451. Représentation géométrique des propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes. H. Bourget. Compt. rend. CIV, 1253.
452. Étude géométrique d'un complexe. P. G. Schoute. Compt. rend. CIV, 1055.
453. Ueber Strahlencongruenzen von gleichem Bündel- und Feldgrade. R. Sturm. Crelle CI, 162.
454. Sur les surfaces principales des complexes de droite et les lignes asymptotiques de leur surface de singularités. G. Koenigs. Compt. rend. CIV, 1824.
455. Sur le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes. G. Humbert. Compt. rend. CV, 54.

Vergl. Determinanten 311. Elliptische Transcendenten 366. Functionen 405, 406. Invariantentheorie 499. Singularitäten. Ultraelliptische Transcendenten 674, 675.

Geometrie (der Lage).

456. Ueber Euler'sche Polyeder. M. Feil. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 869.

Geschichte der Mathematik.

457. Die astronomischen Angaben der assyrischen Keilinschriften. Jul. Oppert. Wien. Akad.-Ber. XCI, 894.
458. Astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte ägyptische Finsterniss. Ed. Mahler. Wien. Akad.-Ber. XCI, 987.

459. Astronomische Untersuchungen über in hebraischen Schriften erwähnte Finsternisse. Ed. Mahler. Wien. Akad.-Ber. XCII, 939, 1102; XCIII, 455.
460. Sur un travail de M. Romieu intitulé „Essai sur les décans égyptiens". J. Oppert. Compt. rend. XCII, 242. — Omont ibid. 455.
461. Die Sternkunde der südarabischen Kabylen. Ed. Glaser. Wien. Akad.-Ber. XCI, 89.
462. Sur un principe de mécanique rationnelle et une démonstration dont Daniel Bernoulli s'est servi en 1757. De Jonquières. Compt. rend. CIII, 617. [Vergl. Nr. 545 u. 546.]
463. Sur de prétendues expériences du XVIII. siècle, relatives à l'influence extérieure de substances renfermées dans des tubes. W. de Fonvielle. Compt. rend. CV, 898.
464. Sur l'authenticité de la toise du Pérou. C. Wolf. Compt. rend. CII, 567; CIII, 124. — W. Förster ibid. CIII, 122.
465. Lavoisier et la commission des poids et mesures. C. Wolf. Compt. rend. CII, 1279. — E. Grimaux ibid. 1362.
466. Adh. Barré de Saint-Venant 23. VIII. 1797 — 6. I. 1886. Jurien de la Gravière. Compt. rend. CII, 73. — Ed. Phillips ibid. 141.
467. L. F. C. Bréguet 22. XII. 1804 — 27. X. 1883. De Jonquières. Compt. rend. CIII, 5.
468. G. Rosenhain 10. VI. 1816 — 14. III. 1887. Hermite. Compt. rend. CIV, 891.
469. Alex. Lallemand 25. XII. 1816 — 16. III. 1886. Mascart. Compt. rend. CII, 784.
470. Jean Claude Bouquet 7. IX. 1819 — 9. IX. 1885. Halphen. Compt. rend. CII, 1267.
471. Discours prononcés aux obsèques de Mr. Jamin 15 Février 1886. Compt. rend. CII, 337.
472. Alfr. Terquem 31. I. 1831 — 16. VII. 1887. Mascart. Compt. rend. CV, 196.
473. Edmond Laguerre 9. IV. 1834 — 13. VIII. 1886. J. Bertrand. Compt. rend. CIII, 424. — Halphen ibid. 425. — Poincaré ibid. CIV, 1643.
474. Oppolzer 1840 — 26. XII. 1886. Tisserand. Compt. rend. CIV, 103.

Vergl. Hydrodynamik 484, 490. Reihen 685.

Gleichungen.

475. Zur Theorie der iterirten Functionen. E. Netto. Mathem. Annal. XXIX, 148.
476. Ueber trinomische Gleichungen. P. Nekrassoff. Mathem. Annal. XXIX, 413.
477. Sur une découverte de Mr. James Hammond relative à une certaine série de nombres qui figurent dans la théorie de la transformation Tschirnhausen. J. Sylvester. Compt. rend. CIV, 1228.
478. Sur une nouvelle méthode générale de calcul graphique au moyen des abaques hexagonaux. Ch. Lallemand. Compt. rend. CII, 816.
479. Ueber einen Algorithmus zur Auflösung numerischer algebraischer Gleichungen. E. Netto. Mathem. Annal. XXIX, 141.
480. Ueber biquadratische Gleichungen. P. Gordan. Mathem. Annal. XXIX, 318.
481. Zur Auflösung der Gleichungen 4. und 5. Grades durch Bewegungsmechanismen. Ad. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 380.
482. Note on the Jacobian sextic equation. A. Cayley. Mathem. Annal. XXX, 78.
483. Ueber eine Classe von algebraisch auflösbaren Gleichungen 5., 6. und 7. Grades. M. Mandl. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 246.

Vergl. Invariantentheorie 498.

H.

Hydrodynamik.

484. Réclamation de priorité pour la découverte des figures annulaires de masses fluides en équilibre. L. Matthiessen. Compt. rend. XCII, 857. — H. Poincaré ibid. 970. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 499.]
485. Sur un théorème de M. Liaponnoff, relatif à l'équilibre d'une masse fluide. H. Poincaré. Compt. rend. CIV, 622.
486. Ueber die Rotation und Präcession eines flüssigen Sphäroids. S. Oppenheim. Wien. Akad.-Ber. XCII, 528.
487. Oscillations tournantes d'un solide de révolution en contact avec un fluide visqueux. Couette. Compt. rend. CIV, 1064.
488. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide. Halphen. Compt. rend. CIV, 807.
489. Sur un théorème relatif au mouvement permanent et à l'écoulement des fluides. Hugoniot. Compt. rend. CIII, 1178. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 495.]

490. Mémoire posthume de M. de Saint-Venant sur la résistance des fluides. Boussinesq. Compt. rend. CIII, 179.
491. Sur la théorie de l'écoulement par un déversoir en mince paroi, quand il n'y a pas de contraction latérale et que la nappe déversante est libre en dessous. J. Boussinesq. Compt. rend. CV, 17.
492. Sur la théorie des déversoirs en mince paroi et à nappe soit déprimée, soit soulevée. J. Boussinesq. Compt. rend. CV, 585.
493. Sur la théorie des déversoirs épais, ayant leur seuil horizontal et évasé ou non à son entrée. J. Boussinesq. Compt. rend. CV, 682.
494. Sur une forme de déversion en mince paroi, analogue à l'ajutage rentrant de Borda, pour laquelle le relèvement de la face inférieure de la nappe liquide, à la sortie du déversoir peut être déterminé théoriquement. J. Boussinesq. Compt. rend. CV, 697.
495. Sur les explosions au sien des liquides. G. Robin. Compt. rend. CV, 61.
496. Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und elektrischen Erscheinungen. Ed. Riecke. Mathem. Annal. XXX, 309.
497. On recent english researches in vortex-motion. A. E. H. Love. Mathem. Annal. XXX, 326.
Vergl. Elasticität 338.

I.

Invariantentheorie.

498. Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten. Fr. Brioschi. Mathem. Annal. XXIX, 327.
499. Die geometrische Deutung einer gewissen Invariante bei ebenen Collineationen. J. Kraus. Mathem. Annal. XXIX, 234.
500. Sur une extension du théorème relatif au nombre d'invariants asyzygétiques d'un type donné à une classe de formes analogues. J. Sylvester. Compt. rend. CII, 1430.
501. Théorème sur les formes binaires. M. d'Ocagne. Compt rend. CII, 916.
502. Sur les peninvariants des formes binaires. M. d'Ocagne. Compt. rend. CIV, 961, 1364.
503. Sur les peninvariants des formes binaires. R. Perrin. Compt. rend. CIV, 1097, 1258.
504. Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete. D. Hilbert. Mathem. Annal. XXX, 15.
505. Die Discriminante der binären Form 6. Ordnung. G. Maisano. Mathem. Annal. XXX, 442.
506. Ueber ternäre lineare Formen. E. Study. Mathem. Annal. XXX, 120.
507. Ueber die Invarianten dreier ternären quadratischen Formen. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 62.
508. Sur les invariants différentiels. J. J. Sylvester. Compt. rend. CII, 31.
509. Sur les invariants des équations différentielles. Appell. Compt. rend. CV, 55. [Vergl. Nr. 327.]
Vergl. Differentialgleichungen 322. Formen. Thetafunctionen 669.

K.

Kegelschnitte.

510. Zwei geometrische Beweise eines Satzes von Hesse. F. Hofmann. Crelle CII, 175.
511. Ueber einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCI, 637.
512. Ueber einen Satz der Kegelschnittlehre. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 794.
513. Recherches sur les surfaces par chaque point desquelles passent deux ou plusieurs coniques tracées sur la surface. G. Koenigs. Compt. rend. CV, 407.

Kettenbrüche.

514. Ueber einen Hermite'schen Satz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCII, 995.
515. Ueber die in den Vielfachen eines Kettenbruchs enthaltenen grössten Ganzen. Koppe. Mathem. Annal. XXIX, 187.

Kinematik.

516. Die Contourevolute axialer Schraubenflächen. Jos. Tesař. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 181.
517. Théorie géometrique de l'hyperboloïde articulé. A. Mannheim. Compt. rend. CII, 253, 310, 353, 501. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 523, 524.]
518. Sur l'herpolhodie. Hess. Compt. rend. CII, 1304, 1366.
519. Sur la génération de l'herpolhodie. Pinczon. Compt. rend. CIV, 1048.
520. Construction des tangentes aux courbes planes et détermination du point où une droite mobile touche son enveloppe. R. Godefroy. Compt. rend. CII, 604.

Kugelfunctionen.

521. Ueber ein Theorem des Herrn Catalan. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 801.
522. Ueber das Additionstheorem der Functionen $Y^m(x)$. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1340.

M.

Magnetismus.

523. Sur le nombre des pôles à la surface d'un corps magnétique. Stieltjes. Compt. rend. CII, 805.
524. Sur la théorie du magnétisme. P. Duhem. Compt. rend. CV, 932.
525. Sur l'aimentation par influence. P. Duhem. Compt. rend. CV, 749, 798, 1113, 1239.

Mannigfaltigkeiten.

526. Sur la théorie des diversités. R. Lipschitz. Compt. rend. CII, 602.

Maxima und Minima.

527. Ueber dem Kreise ein- und umgeschriebene Vierecke. Jos. Kürschák. Math. Annal. XXX, 578.

Mechanik.

528. Sur certaines définitions de mécanique et sur les unités en vigueur. De Freycinet. Compt. rend. CV, 908.
529. Ueber Gruppen von Bewegungen. A. Schönflies. Mathem. Annal. XXIX, 50. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 519.]
530. Sur les intégrales algébriques des problèmes de la dynamique. G. Koenigs. Compt. rend. CIII, 460.
531. Ueber einige Fälle, wo die lebendige Kraft nicht integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Energie ist. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. XCII, 853.
532. Sur l'accélération angulaire. Ph. Gilbert. Compt. rend. CIII, 1248.
533. Sur les accélérations des points d'un système invariable en mouvement. Ph. Gilbert. Compt. rend. CIV, 162.
534. Sur un théorème général relatif à la propagation du mouvement. Hugoniot. Compt. rend. CII, 858. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 495.]
535. Sur certains problèmes dans lesquels on considère, sur une courbe plane, des arcs de même origine parcourus dans le même temps que les cordes correspondantes. G. Fouret. Compt. rend. CIII, 1114, 1174.
536. Sur le mouvement d'un fil dans un plan fixe. Appell. Compt. rend. CIII, 991.
537. Ueber Stabilität periodischer ebener Bahnen. J. Korteweg. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 995.
538. Ueber die mit Ecken behafteten Schwingungen gespannter Saiten. A. Harnack. Mathem. Annal. XXIX, 486.
539. Die Drehschwingungen einer Kugel mit Luftwiderstand. Ant. Lampel. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 291.
540. Sur le mouvement d'une surface autour d'un point fixe. G. Floquet. Compt. rend. CV, 746.
541. Ueber das Gyroskop bei allgemeinster Wahl des zur Bewegung anregenden Momentankräftesystems. W. Hess. Mathem. Annal. XXIX, 500.
542. Sur la condition de stabilité du mouvement d'un système oscillant soumis à une liaison synchronique pendulaire. A. Cornu. Compt. rend. CIV, 1463.
543. Sur la synchronisation d'une oscillation faiblement amortie. Indicatrice de synchronisation représentant le régime variable. A. Cornu. Compt. rend. CIV, 1656.
544. Sur les tourbillons des fumeurs. A. F. Noguès. Compt. rend. CIV, 1166.

545. Au sujet de certaines circonstances qui se présentent dans le mouvement de la toupie. De Jonquières. Compt. rend. CII, 1519.
546. Sur le mouvement d'un solide homogène, pesant, fixé par un point de son axe de figure. De Jonquières. Compt. rend. CIII, 17.
547. Sur la vrille et le pieu à vis. H. Resal. Compt. rend. CII, 233.
548. Sur le pieu à vis. H. Léauté. Compt. rend. CII, 746. — H. Resal ibid. 749.
549. Sur la flexion des prismes. H. Resal. Compt. rend. CII, 658, 719, 799. — J. Boussinesq ibid. 797.
550. Calcul des moments de flexion dans les poutres continues de section constante ou variable. M. Lévy. Compt. rend. CII, 470.
551. Sur la théorie des machines dynamo-électriques fonctionnant comme réceptrices. Giza Szarvady. Compt. rend. CII, 749.
552. Sur la détermination de la position de la manivelle correspondant à une position donnée du piston dans une machine à vapeur. H. Léauté. Compt. rend. CIV, 410.
553. Nouvelle odographe à papier sans fin. Marey. Compt. rend. CIV, 1582.
554. Analyse cinématique de la course de l'homme. Marey & G. Demeny. Compt. rend. CIII, 509.
555. Étude expérimentale de la locomotion humaine. Marey & Demeny. Compt. rend. CV, 544.
556. Étude des déplacements du centre de gravité dans le corps de l'homme pendant les actes de la locomotion. Demeny. Compt. rend. CV, 679.
557. Analyse cinématique de la locomotion du cheval. Marey & Pagès. Compt. rend. CIII, 538. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 531.]
558. Parallèle de la marche et de la course. Marey & G. Demeny. Compt. rend. CIII, 574.
559. Locomotion comparée: mouvement du membre pelvien chez l'homme, l'éléphant et le cheval. Marey & Pagès. Compt. rend. CV, 149.
560. Le mécanisme du vol des oiseaux étudié par la chronophotographie. Marey. Compt. rend. CIV, 210.
561. Mouvements de l'aile de l'oiseau représentés suivant les trois dimensions de l'espace. Marey. Compt. rend. CIV, 323.
562. Figures en relief représentant les attitudes successives d'un goéland pendant une révolution de ses ailes. Marey. Compt. rend. CIV, 817.
563. Figures en relief représentant les attitudes successives d'un pigeon pendant le vol. Disposition de ces figures sur un zootrope. Marey. Compt. rend. CIV, 1669.
564. La photochronographie appliquée au problème dynamique du vol des oiseaux. Marey. Compt. rend. CV, 421.
565. Sur la mesure des forces qui agissent dans le vol de l'oiseau. Marey. Compt. rend. CV, 504.
566. Du travail mécanique dépénsé par le goéland dans le vol horizontal. Marey. Compt. rend. CV, 594.
567. Sur le vol des oiseaux. Bertinet. Compt. rend. CV, 1089.

Vergl. Astronomie. Elasticität. Elektricität. Geschichte der Mathematik 462. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Optik. Pendel. Potential. Wärmelehre.

Mehrdimensionale Geometrie.

568. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. C. Segre. Mathem. Annal. XXX, 203.
569. Sur un théorème de la géométrie à n dimensions. C. Segre. Mathem. Annal. XXX, 308. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 593.]
570. Ueber die Maassbestimmung extensiver Grössen. E. Study. Wien. Akad.-Ber. XCI, 100.
571. La surface du sixième ordre avec six droites. Giov. Bordiga. Compt. rend. CII, 743.
572. Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à n dimensions. Giov. Bordiga. Compt. rend. CII, 1442.

Vergl. Singularitäten 654.

Molecularphysik.

573. Sur les lois numériques des équilibres chimiques. H. Le Chatelier. Compt. rend. CIII, 253.
574. Sur la théorie de la dissociation et quelques actions de présence. G. Chaperon. Compt. rend. CIII, 479.

575. Sur quelques formules relatives aux dissolutions salines. P. Duhem. Compt. rend. CIV, 683, 780.
Vergl. Geschichte der Mathematik 463.

N.

Nautik.

576. Rapport sur un mémoire des MM. Guyou et Simart intitulé „Développements de géométrie du navire". De Jonquières. Compt. rend. CIV, 746.
577. Détermination du mouvement angulaire que prend un navire sur une houle de vitesse et de grandeur données. L. de Bussy. Compt. rend. CII, 35, 196.
578. Considérations sur le roulis. A. Ledieu. Compt. rend. CII, 581; CIII, 23. — De Bussy ibid. 1446.
579. Rationelle Verwerthung nicht steuerbarer Winkelunterschiede bei Kursbestimmungen zur See. F. Zehden. Wien. Akad.-Ber. XCI, 1184.

O.

Oberflächen.

580. Extension du théorème de Riemann-Roch aux surfaces algébriques. M. Noether. Compt. rend. CIII, 734.
581. Ueber die totalen algebraischen Differentialausdrücke. M. Nöther. Mathem. Annal. XXIX, 339.
582. Génération des surfaces algébriques. De Jonquière. Compt. rend. CV, 1203.
583. Beiträge zur Theorie der algebraischen Flächen. A. Voss. Mathem. Annal. XXX, 227. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 548.]
584. Sur la transformation des surfaces algébriques en elles mêmes. Ém. Picard. Compt. rend. CIII, 517, 549, 635, 730.
585. Sur les transformations des surfaces en elles-même. H. Poincaré. Compt. rend. CIII, 732.
586. Sur une généralisation de l'indicatrice de Ch. Dupin. Ém. Barbier. Compt. rend. CV, 516.
587. Sur une extension du théorème de Pascal aux surfaces du troisième ordre. A. Petot. Compt. rend. CII, 737.
588. Construction de la courbe gauche du sixième ordre et du premier genre. Transformation de la surface du troisième ordre sur un plan. A. Petot. Compt. rend. CII, 805.
589. Ueber die Hesse'sche Fläche der Flächen dritter Ordnung. C. Le Paige. Wien. Akad.-Ber. XCI, 981.
590. Sur une propriété de la surface $xyz = l^3$. G. Floquet. Compt. rend. CV, 854.
591. Die Flächen 4. Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. K. Rohn. Mathem. Annal. XXIX, 81.
592. Sur quelques propriétés des surfaces coniques. G. Humbert. Compt. rend. CV, 739.
593. Ueber eine Gattung Rückungsflächen. A. Suchard. Wien. Akad.-Ber. XCII, 836.
594. Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung. G. Affolter. Mathem. Annal. XXIX, 1. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 554.]
595. Sur les surfaces applicables. E. Amigues. Compt. rend. CIV, 564.
596. Théorèmes sur les surfaces gauches. E. Amigues. Compt. rend. CIV, 1092.
597. Zur Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen. R. v. Lilienthal. Mathem. Annal. XXX, 1.
598. Sur les lignes de courbure dans deux surfaces à rayons vecteurs réciproques. P. Serret. Compt. rend. CIII, 1116. — L. Lindelöff ibid. CIV, 63.
599. Sur les surfaces où la différence des rayons de courbure principaux en chaque point est constante. R. Lipschitz. Compt. rend. CIV, 418.
600. Sur les surfaces qui ont pour lignes isothermes une famille de cercles. Demartres. Compt. rend. CIV, 217.
601. Démonstration analytique d'un théorème relatif aux surfaces orthogonales. P. Adam. Compt. rend. CIII, 996.
602. Sur la théorie des surfaces minima. G. Darboux. Compt. rend. CII, 1513.
603. Sur un problème relatif à la théorie des surfaces minima. G. Darboux. Compt. rend. CIV, 728.
604. Sur la théorie des surfaces minima. E. Goursat. Compt. rend. CV, 743.

605. Ueber eine transcendente Minimalfläche. O. v. Lichtenfels. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 41.
Vergl. Geometrie (höhere). Kegelschnitte 513.

Oberflächen zweiter Ordnung.

606. Bemerkung zur Axenbestimmung der Kegelflächen zweiten Grades. C. Pelz. Wien. Akad.-Ber. XCII, 410.
607. Sur les surfaces enveloppes de cônes du second degré, dans le cas où chaque cône touche son enveloppe suivant un cercle. E. Beutel. Compt. rend. CIII, 687.
608. Un théorème sur les arcs des lignes géodésiques des surfaces de révolution du second degré. Halphen. Compt. rend. CV, 583.
609. Die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kanten des gemeinschaftlichen Poltetraeders zweier Flächen II. Ordnung schneidenden Geraden besteht. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCI, 519.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 282. Ellipsoid.

Optik.

610. Essai d'application du calcul à l'étude des sensations colorées. R. Féret. Compt. rend. CII, 44, 256, 608.
611. Sur l'emploi de la lumière intermittente pour la mesure des mouvements rapides. Gust. Hermite. Compt. rend. CIII, 412.
612. Ueber die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten in der Bewegung der physischen Doppelsterne. L. Birkenmajer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 713.
613. Ueber die Isogyrenfläche der doppeltbrechenden Krystalle. H. Pitsch. Wien. Akad.-Ber. XCI, 527.
614. Sur l'expérience des trois miroirs de Fresnel. Mascart. Comp. rend. CV, 967.
615. Sur les équations les plus générales de la double réfraction compatibles avec la surface de l'onde de Fresnel. M. Levy. Compt. rend. CV, 1044.
616. Ueber die Verschiebung des Vereinigungspunktes der Strahlen beim Durchgang eines Strahlenbüschels monochromatischen Lichtes durch ein Prisma mit gerader Durchsicht. J. v. Hepperger. Wien. Akad.-Ber. XCI, 640.
617. Quelques propriétés relatives à l'action des lames cristallines sur la lumière. Mascart. Compt. rend. CV, 536.
618. Ueber die Lichtgeschwindigkeit im Quarze. K. Exner. Wien. Akad.-Ber. XCI, 218.
619. Ueber Krümmungsvermögen und Dispersion von Prismen. J. v. Hepperger. Wien. Akad.-Ber. XCII, 261.
620. Geometrische Untersuchung über die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde. Max. Sternberg. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 95.
Vergl. Aberration. Astronomie 288, 289, 290, 301.

P.

Pendel.

621. Sur les mouvements d'oscillation simultanées de deux pendules suspendus bout à bout. De Jonquières. Compt. rend. CV, 23, 140, 253.
622. Théorie et application du pendule à deux branches. G. A. Hirn. Compt. rend. CV, 40.

Potential.

623. Sur le problème de Gauss concernant l'attraction d'un anneau elliptique. Halphen. Compt. rend. CIII, 363.
624. Eine einfache Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. F. Mertens. Wien. Akad.-Ber. XCII, 524.
625. Sur le potentiel de deux ellipsoides. Laguerre. Compt. rend. CII, 17.
626. Quelques remarques sur la théorie des potentiels multiformes. P. Appell. Mathem. Annal. XXX, 155.
Vergl. Elektricität. Reihen 641, 642, 643.

Q.

Quadratur.

627. Détermination du reste, dans la formule de quadrature de Gauss. P. Mansion. Compt. rend. CII, 412; CIV, 488. [Vergl. Nr. 214.]

R.

Rectification.

628. Division approximative d'un arc de cercle dans un rapport donné, à l'aide de la règle et du compas. A. Pellet. Compt. rend. CV, 1119.
629. Sur les courbes algébriques rectifiables. G. Humbert. Compt. rend. CIV, 1051.
630. Sur les arcs des courbes planes. G. Humbert. Compt. rend. CIV, 1826.
631. Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin, au moyen des intégrales elliptiques. G. de Longchamps. Compt. rend. CIV, 676.
632. Rectification des cubiques circulaires, unicursales, droites au moyen des intégrales elliptiques. G. de Longchamps. Compt. rend. CIV, 964.
633. Sur la rectification des courbes planes unicursales. L. Raffy. Compt. rend. CIV, 892.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 608.

Reihen.

634. Sur les séries entières. L. Lecornu. Compt. rend. CIV, 349.
635. Sur une série dont le terme général est de la forme $A_n(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. G. Eneström. Compt. rend. CIII, 523. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 500.]
636. Sur les séries qui procèdent suivant les puissances d'une variable. Stieltjes. Compt. rend. CIII, 1243. [Vergl. Nr. 717.]
637. Sur une certaine classe de suites récurrentes. M. d'Ocagne. Compt. rend. CIV, 419.
638. Ueber zwei der Binomialreihe verwandte Reihengruppen. E. Weiss. Wien. Akad.-Ber. XCI, 587.
639. Ueber die Summirung einiger Reihen. M. Mandl. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 947.
640. Die höheren Sinus. J. C. Kapteyn & W. Kapteyn. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 807.
641. Développements en séries trigonométriques de certaines fonctions vérifiant l'équation du potentiel $\Delta F=0$. Appell. Compt. rend. CII, 1439.
642. Sur le développement en série du potentiel d'un corps homogène de révolution. O. Callandreau. Compt. rend. CIII, 33, 195.
643. Sur la série de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle. Application au développement en série du potentiel d'un corps homogène. O. Callandreau. Compt. rend. CIII, 864, 954; CIV, 38.
644. Sur des fonctions uniformes provenant des séries hypergéométriques de deux variables. E. Goursat. Compt. rend. CIV, 893.
645. Sur les séries hypergéométriques de deux variables. E. Picard. Compt. rend. CIV, 896.

Vergl. Bestimmte Integrale 303. Differentialgleichungen 315, 316. Functionen 379, 403. Thetafunctionen 673.

S.

Singularitäten.

646. Gleichung der Curve, welche die Berührungspunkte der Doppeltangenten der allgemeinen Curve des fünften Grades ausschneidet. G. Maisano. Math. Annal. XXIX, 431.
647. Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. G. B. Guccia. Compt. rend. CIII, 594.
648. Recherche du nombre maximum de points doubles (proprement dits et distincts) qu'il est permis d'attribuer arbitrairement à une courbe algébrique d'ordre *m*, cette courbe devant d'ailleurs passer par d'autres points simples, qui complètent la déterminations de la courbe. De Jonquières. Compt. rend. CV, 917.
649. Nombre maximum de points multiples d'ordre *r*, qu'il est permis d'attribuer à une courbe C_m conjointement avec des points simples en nombre suffisant pour déterminer la courbe. De Jonquières. Compt. rend. CV, 971.
650. Génération des courbes unicursales. De Jonquières. Compt. rend. CV, 1148.
651. Ueber das Maximalgeschlecht von algebraischen Raumcurven gegebener Ordnung. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 13.
652. Ueber einen Beweis der Zeuthen'schen Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechts. W. Weiss. Mathem. Annal. XXIX, 382.
653. Théorème sur les points singuliers des surfaces algébriques. G. B. Guccia. Compt. rend CV, 741.
654. Ueber die Singularitäten der Discriminantenfläche. D. Hilbert. Math. Annal. XXX, 437.

Substitutionen.

655. Ueber die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten. Alfr. Bochert. Mathem. Annal. XXIX, 27.
656. Ueber primitive Gruppen. S. Rudio. Crelle CII, 1.
657. Recherches sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions linéaires de contact. Autonne. Compt. rend. CII, 313. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 430.]
658. Sur les groupes irréductibles d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. L. Autonne. Compt. rend. CIII, 1176.
659. Sur les substitutions crémoniennes quadratiques. L. Autonne. Compt. rend. CIV, 767.
660. Sur les groupes quadratiques crémoniens. Autonne. Compt. rend. CIV, 1422.
661. Sur les groupes cubiques Cremona d'ordre fini. L. Autonne. Compt. rend. CV, 267.
662. Die Congruenzgruppen der 6. Stufe. Rob. Fricke. Math. Annal. XXIX, 97.
663. Ueber die ausgezeichneten Untergruppen vom Geschlechte $p = 1$, welche in der Gruppe der linearen ω-Substitutionen enthalten sind. Rob. Fricke. Mathem. Annal. XXX, 345.
664. Ueber die quaternäre, endliche, lineare Substitutionsgruppe der Borchardt-schen Moduln. H. Maschke. Mathem. Annal. XXX, 496. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 468.]
665. Ueber die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. G. Frobenius. Crelle CI, 273. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 487.]
666. Zur Theorie der Thetacharakteristiken. Ad. Ameseder. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 618.

Vergl. Differentialgleichungen 318, 319. Formen.

T.

Thetafunctionen.

667. Ueber die Producte von 3 und 4 Thetafunctionen. W. Scheibner. Crelle CII, 255.
668. Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln. L. Kronecker. Crelle CII, 260.
669. Darstellung der rationalen ganzen Invarianten der Binärformen 6. Grades durch die Nullwerthe der zugehörigen Thetafunctionen. O. Bolza. Mathem. Annal. XXX, 478.
670. Sur les systèmes orthogonaux, formés par les fonctions thêta. F. Caspary. Compt. rend. CIV, 490.
671. Sur une méthode élémentaire pour obtenir le théorème fondamental de Jacobi, relatif aux fonctions thêta d'un seul argument. F. Caspary. Compt. rend. CIV, 1094.
672. Sur les théorèmes d'addition des fonctions thêta. F. Caspary. Compt. rend. CIV, 1255.
673. Ueber eine partielle Differentialgleichung der Thetafunctionen zweier Argumente und über die Reihenentwickelung derselben. L. Wiltheiss. Mathem. Annal. XXIX, 272. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 588.]

Vergl. Functionen 406.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

674. Ueber hyperelliptische Curven. K. Bobek. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 601; XCIV, 861.
675. Ueber hyperelliptische Curven. K. Bobek. Mathem. Annal. XXIX, 386.
676. Sur quelques formules hyperelliptiques. F. Brioschi. Compt. rend. CII, 239.
677. Ueber einen einfachen Beweis der Rosenhain'schen Fundamentalformeln. F. Caspary. Mathem. Annal. XXX, 571.

W.

Wärmelehre.

678. Sur la théorie analytique de la chaleur. H. Poincaré. Compt. rend. CIV, 1753.
679. Formule nouvelle pour représenter la tension maxima de la vapeur d'eau. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 389.
680. Sur les problèmes de la thermodynamique. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 441.

681. Sur la fonction de Carnot. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 477.
682. Sur le coefficient de détente d'un gaz parfait. F. Lucas. Compt. rend. CIII, 1181.
683. Le coefficient de dilatation et la température des gaz. F. Lucas. Compt. rend. CIII, 1251.
684. Les chaleurs spécifiques d'un gaz parfait. F. Lucas. Compt. rend. CIV, 49.
685. Sur l'entropie. F. Lucas. Compt rend. CIV, 569.
686. Étude thermodynamique des propriétés générales de la matière. F. Lucas. Compt. rend. CIV, 1083.
687. La cinétique moderne et le dynamisme de l'avenir. G. A. Hirn. Compt. rend. CIII, 514.
688. Sur une brochure de M. G. A. Zanon intitulée „La cinetica combattuta e vinta da G. A. Hirn". H. Faye. Compt. rend. CV, 600.
689. Remarques sur un principe de physique, d'où part M. Clausius dans sa nouvelle théorie des moteurs à vapeur. G. A. Hirn. Compt. rend. CV, 716.
690. Sur l'écoulement des gaz dans le cas du régime permanent. Hugoniot. Compt. rend. CII, 1545; CIII, 241. — Hirn ibid. CIII, 109, 371. — Parenty ibid. CIII, 125.
691. Écoulement varié des gaz. Haton de la Goupillière. Compt. rend. CIII, 661, 708. 785.
692. Sur l'écoulement d'un gaz qui pénètre dans un récipient de capacité limitée. Hugoniot. Compt. rend. CIII, 922. – Haton de la Goupillière ibid. 925.
693. Sur le mouvement varié d'un gaz comprimé dans un réservoir qui se vide librement dans l'atmosphère. Hugoniot. Compt. rend. CIII, 1002. — Hirn ibid. 1232.
694. Sur l'écoulement des fluides élastiques. Hugoniot. Compt. rend. CIII, 1253.
695. Remarques relatives aux observations de M. Hirn sur l'écoulement des gaz. Hugoniot. Compt. rend. CIV, 46.
696. Sur les vapeurs émises par un mélange de substances volatiles. P. Duhem. Compt. rend. CII, 1449.
697. Volume, chaleur totale, chaleur spécifique des vapeurs saturées. Ch. Antoine. Compt. rend. CIII, 1242.
698. Variation de température d'un gaz ou d'une vapeur qui se comprime ou se dilate, en conservant la même quantité de chaleur. Ch. Antoine. Compt. rend. CV, 1242.
699. Ueber die zum theoretischen Beweise des Avogadro'schen Gesetzes erforderlichen Voraussetzungen. L. Boltzmann. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 613.
700. Recherches sur l'état sphéroïdal. E. Gonsart. Compt. rend. CV, 518.
701. Sur une nouvelle méthode pour déterminer le coefficient de dilatation des solides. Rob. Weber. Compt. rend. CIII, 553.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

702. Problème se rapportant aux scrutins de ballotage. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 369, 438. — Em. Barbier ibid. 407. — Dés. André ibid. 436.
703. Théorème relatif au jeu de loto. Ém. Barbier. Compt. rend. CV, 435.
704. Sur un paradoxe analogue au problème de St. Pétersbourg. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 831.
705. Sur la résolution, dans un cas particulier, des équations normales auxquelles conduit la méthode des moindres carrés. A. Port. Compt. rend. CV, 491.
706. Sur une loi singulière de probabilité des erreurs. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 779.
707. Théorème relatif aux erreurs d'observation. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 1043. — Faye ibid. 1102.
708. Sur ce qu'on nomme le poids et la précision d'une observation. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 1099.
709. Sur la loi des erreurs d'observation. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 1147.
710. Sur les épreuves répétées. J. Bertrand. Compt. rend. CV, 1201.

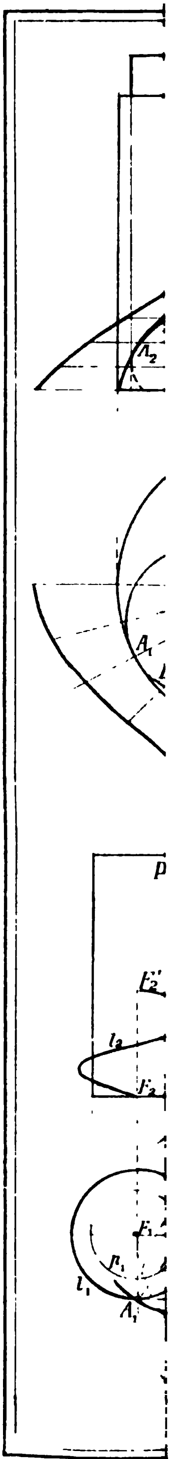
Z.

Zahlentheorie.

711. Ueber den Zahlbegriff. L. Kronecker. Crelle CI, 337.
712. Untersuchung der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Gattungsbereiches für einen beliebigen algebraischen Primdivisor. K. Hensel. Crelle CI, 99.

713. Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. A. Kneser. Crelle CII, 20.
714. Ueber die ganzen complexen Zahlen von der Form $a+bi$. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCI, 1047.
715. Beitrag zur Theorie gewisser complexer Zahlen. K. Schwering. Crelle CII, 56.
716. Ueber das Legendre-Jacobi'sche Symbol. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCI, 11; XCII, 876. [Vergl. Bd. XXXI, Nr. 711.]
717. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. L. Kronecker. Compt. rend. CIII, 980. [Vergl. Bd. XXXII, Nr. 625.]
718. Die mittlere Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in zwei Factoren von vorgeschriebener Form. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 90.
719. Ueber die Darstellung der ganzen Zahlen durch binäre quadratische Formen mit negativer Discriminante. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCII, 380.
720. Ueber die mittlere Anzahl der Classen quadratischer Formen von negativer Determinante. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1307.
721. Ueber die Classenanzahl der quadratischen Formen von negativer Determinante. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 54.
722. Die mittlere Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine Summe von bestimmten Vielfachen von Quadraten. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 215.
723. Neue Classenanzahlrelationen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 288.
724. Zur Theorie der Function $E(x)$. M. Stern. Crelle CII, 9.
725. Ueber asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1290.
726. Ueber den grössten gemeinschaftlichen Divisor. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCI, 338.
727. Ueber die Divisoren der ganzen Zahlen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCI, 600.
728. Ueber grösste ganze Zahlen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 611.
729. Ueber grösste Divisoren. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 714.
730. Ueber Primzahlen. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 903.
731. Arithmetische Notiz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCI, 1194.
732. Arithmetische Sätze. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCII, 1055.
733. Arithmetische Notiz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIII, 447.
734. Zahlentheoretische Notiz. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 35.
735. Ueber ein arithmetisches Theorem des Herrn Sylvester. L. Gegenbauer. Wien. Akad.-Ber. XCIV, 757.
736. Sur l'équation $t^2 - Du^2 = -1$. J. Perott. Crelle CII, 185.
737. Le produit de 2 sommes de 8 carrés est une somme de 8 carrés. X. Antomari. Compt. rend. CIV, 566.
738. Sur l'équation $ax^4 + by^4 = cz^2$. Desboves. Compt. rend. CIV, 846, 1602, 1832.
739. Sur une partition de nombres. C. de Polignac. Compt. rend. CIV, 1688, 1779.
740. On suppose écrite la suite naturelle des nombres; quel est le (10^{1000})ième chiffre écrit? Ém. Barbier. Compt. rend. CV, 795.
741. On suppose écrite la suite naturelle des nombres; quel est le (10^{10000})ième chiffre écrit? Ém. Barbier. Compt. rend CV, 1238.

Vergl. Formen. Kettenbrüche.


A_2
A_1
p
F_2'
l_2
F_2
F_1
P_1
l_1
A_1